6 Equacions i sistemes

ABANS DE COMENÇAR LA UNITAT...

Gabriel & Giovanni

Gabriel Cramer va néixer a Ginebra (Suïssa) el 1704 i va morir a Bagnols-sur-Cèze (França) el 1752.

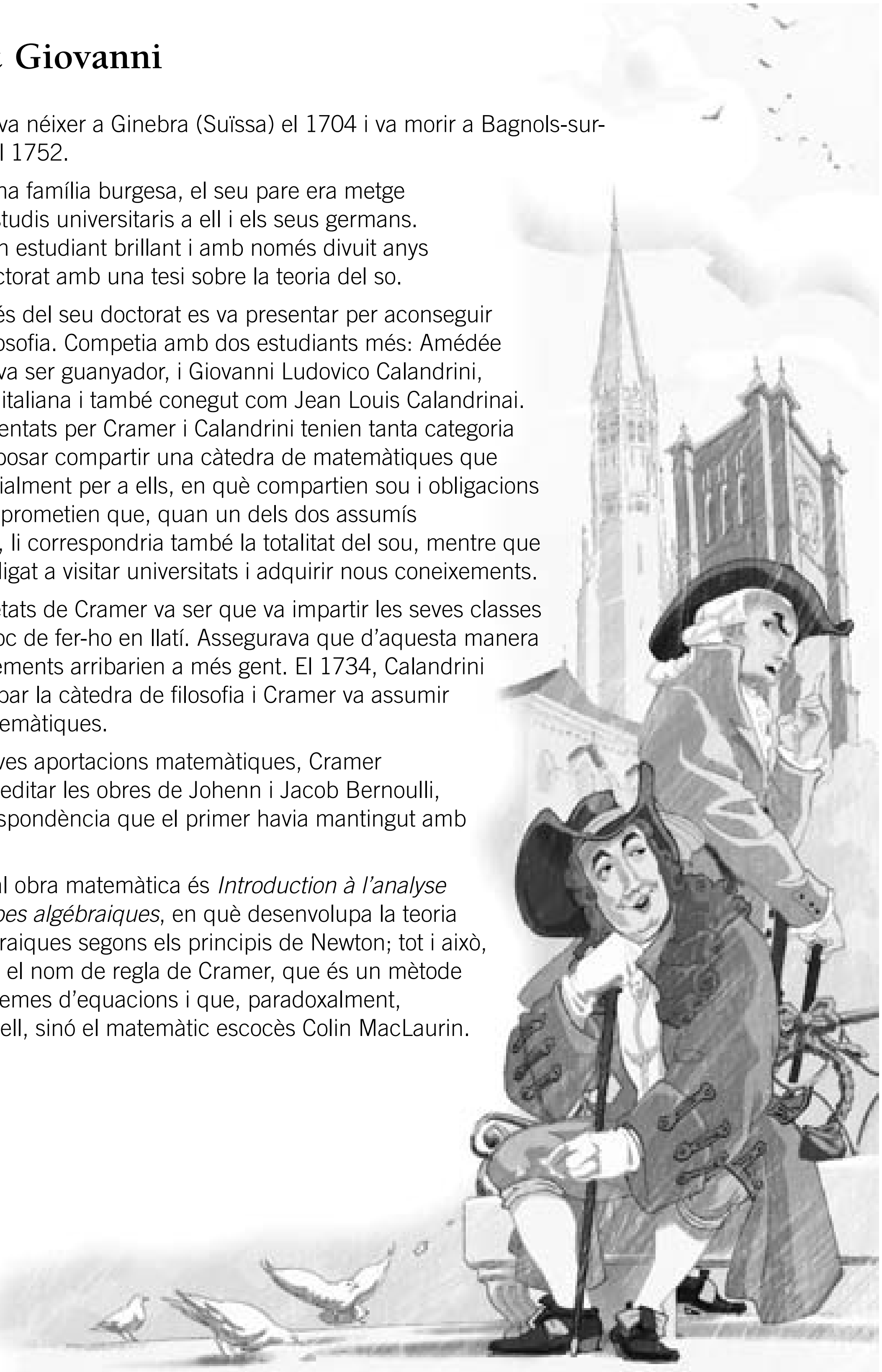
Es va criar en una família burgesa, el seu pare era metge i els va donar estudis universitaris a ell i els seus germans. Gabriel va ser un estudiant brillant i amb només divuit anys va obtenir el doctorat amb una tesi sobre la teoria del so.

Dos anys després del seu doctorat es va presentar per aconseguir la càtedra de filosofia. Competia amb dos estudiants més: Amédée de la Rive, que va ser guanyador, i Giovanni Ludovico Calandrini, de procedència italiana i també conegut com Jean Louis Calandrinai. Els treballs presentats per Cramer i Calandrini tenien tanta categoria que els van proposar compartir una càtedra de matemàtiques que van crear especialment per a ells, en què compartien sou i obligacions i en què es comprometien que, quan un dels dos assumís tota la docència, li correspondria també la totalitat del sou, mentre que l'altre estaria obligat a visitar universitats i adquirir nous coneixements.

Una de les novetats de Cramer va ser que va impartir les seves classes en francès en lloc de fer-ho en llatí. Assegurava que d'aquesta manera els seus coneixements arribarien a més gent. El 1734, Calandrini va passar a ocupar la càtedra de filosofia i Cramer va assumir tot sol la de matemàtiques.

A part de les seves aportacions matemàtiques, Cramer va destacar per editar les obres de Johenn i Jacob Bernoulli, i també la correspondència que el primer havia mantingut amb Leibniz.

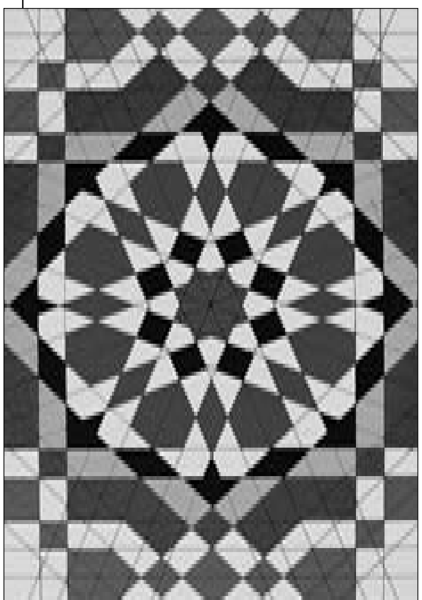
La seva principal obra matemàtica és *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraiques*, en què desenvolupa la teoria de corbes algebraiques segons els principis de Newton; tot i això, és conegut amb el nom de regla de Cramer, que és un mètode per resoldre sistemes d'equacions i que, paradoxalment, no va descobrir ell, sinó el matemàtic escocès Colin MacLaurin.



COMPETÈNCIA LECTORA

CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Àlgebra no simbòlica



Els àrabs van destacar en l'estudi de l'àlgebra, però la seva manera de plantejar i resoldre problemes era molt diferent de la nostra. L'exemple següent prové de l'àlgebra d'Abenbéder (segle XIII). Observa la seva manera peculiar de raonar i la dificultat que suposa no fer servir símbols, com la lletra *x*, a l'hora de resoldre aquests problemes.

Problema

Dos homes amb certa quantitat de diners a la mà cadascun, es troben. Un d'ells li diu a l'altre: «Si em dónes del que tens tres unitats, les afegeixo al que tinc i tindré el mateix que el que et queda». El segon li respon: «Si tu em dónes del que tens sis unitats, les afegeixo al que tinc i tindré dues vegades el que et queda». Quant té cadascun?

Solució

1r Hem de suposar que el que té el primer és una incògnita menys tres unitats, i que el que té el segon és una incògnita més tres unitats. Quan el primer pren tres unitats del segon tenint a la mà una incògnita menys tres, el primer tindrà a la mà una incògnita, i a la mà del segon en quedarà una.

2n El segon li va dir al primer: «Si em dónes del que tens sis unitats, tindré dues vegades el que et quedi»; per tant, el segon tindrà una incògnita més nou, i a la mà del primer hi queda una incògnita menys nou. A més, la quantitat del segon: una incògnita més nou, és el doble de la del primer: una incògnita menys nou, és a dir, dues incògnites menys divuit.

3r Apliquem l'*al-gabr* (transposició) i el *muqabala* (reducció) i tenim que una incògnita més vint-i-set és igual a dues incògnites. Per tant, una incògnita és 27.

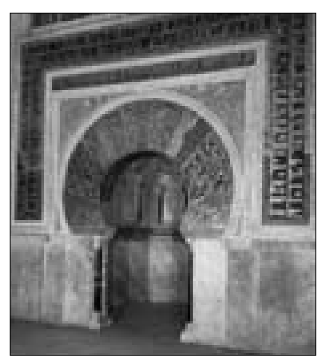
4t Com que el primer tenia una incògnita menys tres, i el segon, una incògnita més tres, el primer tindrà 24 monedes i el segon en tindrà 30.

Muhammad ibn Musà al-Hwarizmi

Les dades biogràfiques d'aquest matemàtic són escasses, però les seves contribucions científiques, que estan contingudes en mitja dotzena de llibres, resulten notables.

La paraula *àlgebra*, amb què avui coneixem una de les branques de les matemàtiques, apareix en el títol de la seva obra més important.

En aquesta obra, al-Hwarizmi resol sis tipus d'equacions de segon grau amb una incògnita. Al llarg dels sis capítols apareixen catorze equacions, juntament amb les estratègies que s'han d'aplicar en cada cas per resoldre-les i obtenir les solucions respectives.



6 Equacions i sistemes

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE...

Recordis la **propietat distributiva del producte**.

PERQUÈ...

L'hauràs d'aplicar en el producte de polinomis.

PROPIETAT DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTE RESPECTE DE LA SUMA I DE LA DIFERÈNCIA

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$$

$(-3) \cdot (8 - 4) = (-3) \cdot 8 - (-3) \cdot 4 = -24 - (-12) = -12$

$5 \cdot (x + 3) = 5 \cdot x + 5 \cdot 3 = 5x + 15$

CONVÉ QUE...

Coneguis la **regla dels signes**.

PERQUÈ...

Et serà útil per fer transformacions en les equacions.

$(+10) \cdot (+5) = +50$
$(-10) \cdot (-5) = +50$
$(+10) \cdot (-5) = -50$

$(+10) : (+5) = +2$
$(-10) : (-5) = +2$
$(+10) : (-5) = -2$

Multiplicació	Divisió
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$

CONVÉ QUE...

Sàpigues **reduir fraccions a comú denominador**.

PERQUÈ...

Ho faràs servir per resoldre equacions amb denominadors.

Reduïm $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{10}$ a comú denominador.

PRIMER. Calculem el m.c.m. dels denominadors.

m.c.m. $(6, 10) = 30$

SEGON. Dividim el m.c.m. entre el denominador de cada fracció i el resultat el multipliquem pel numerador.

$30 : 6 = 5 \longrightarrow \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}$

$30 : 10 = 3 \rightarrow \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$

CONVÉ QUE...

Sàpigues calcular el **valor numèric** d'un polinomi.

PERQUÈ...

Ho faràs servir per verificar les solucions d'una equació.

$P(x) = x^2 - 3x + 2$ per a $x = 2$ $\quad P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

$Q(x, y) = 2xy^2 + 3x^2y$ per a $x = 2, y = 1$ $\quad Q(2, 1) = 2 \cdot 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 = 16$

NOTACIÓ MATEMÀTICA

QUÈ VOL DIR? --------→ **COM HO ESCRIVIM?**

$ax + b = 0$ Indica l'**expressió general d'una equació de primer grau**.

$ax + by = c$ Indica una **equació de primer grau amb dues incògnites**.

Quan escrivim una equació amb una sola incògnita, acostumem a posar la x per designar la incògnita, tot i que també podem fer servir altres lletres, com y, z, t…

Les incògnites de les equacions les acostumem a denotar amb les últimes lletres de l'abecedari, generalment x, y, z, i representen quantitats desconegudes.

Les primeres lletres de l'abecedari les fem servir per als coeficients de les incògnites i el terme independent, i representen quantitats conegudes.

a, b $\rightarrow$ Coeficients de les incògnites. Són valors coneguts.

c $\longrightarrow$ Terme independent. És un valor conegut.

x, y $\rightarrow$ Incògnites de l'equació lineal. Són valors desconeguts.

QUÈ VOL DIR? --------→ **COM HO ESCRIVIM?**

$3 + 4 \neq 9$ Indica que els **dos membres de la igualtat són diferents**.

El símbol $\neq$ expressa que el primer membre de la igualtat no és igual al segon.

QUÈ VOL DIR? --------→ **COM HO ESCRIVIM?**

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Representa un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites**.

Per escriure un sistema d'equacions posem les equacions, una a sota de l'altra, i les agrupem amb una clau de tancament, }.

Això indica que la solució ha de verificar totes les equacions que hi ha dins de la clau.

QUÈ VOL DIR? --------→ **COM HO ESCRIVIM?**

$$\begin{array}{rr} \cancel{2x} - 3y = & 5 \\ + \quad -\cancel{2x} + 4y = & -3 \\ \hline y = & 2 \end{array}$$

Indica que estem **sumant les equacions membre a membre**.

Quan volem reduir un sistema d'equacions, col·loquem una equació a sota de l'altra i mantenim les incògnites semblants alineades. Després, tracem una línia a sota i fem l'operació (suma o resta) que estigui indicada a la part esquerra.

6 Equacions i sistemes

A LA VIDA QUOTIDIANA... Els Jocs Olímpics

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

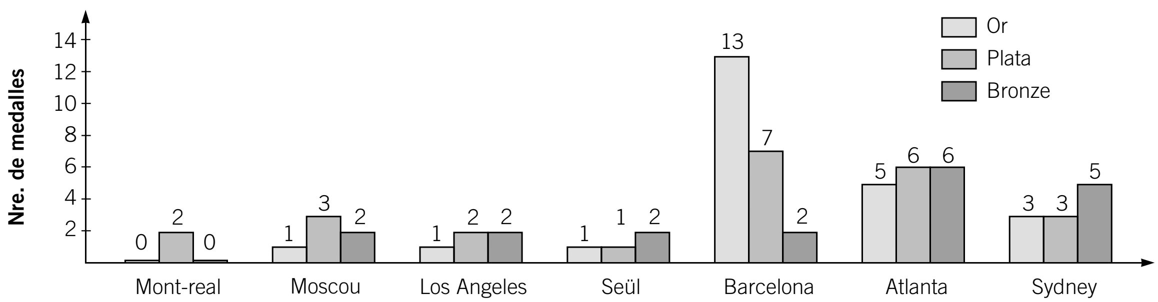
• Conèixer l'actuació espanyola en els Jocs Olímpics. • Relacionar les medalles amb el nombre d'habitants de cada país. • Analitzar els resultats d'alguns països de la Unió Europea en tres Jocs Olímpics consecutius. • Platejar equacions i sistemes si en coneixem les solucions.

1 Actuació espanyola en els Jocs Olímpics

Els Jocs Olímpics de l'era moderna van néixer a Atenes el 1896, i des de llavors s'han celebrat cada quatre anys, excepte el 1916, el 1940 i el 1944, en què es van suspendre. En els onze Jocs olímpics en què Espanya va competir fins al 1972 va obtenir només 9 medalles: París 1900 (1 de plata), Anvers 1920 (2 de plata), Amsterdam 1928 (1 d'or), Los Angeles 1932 (1 de bronze), Londres 1948 (1 de plata), Hèlsinki 1932 (1 de plata), Roma 1860 (1 de bronze) i Munic 1972 (1 de bronze).

La taula i el gràfic següents resumeixen el medaller espanyol en els Jocs Olímpics.

Edició	Or	Plata	Bronze	Total
Mont-real 1976	0	2	0	2
Moscou 1980	1	3	2	6
Los Angeles 1984	1	2	2	5
Seül 1988	1	1	2	4
Barcelona 1992	13	7	2	22
Atlanta 1996	5	6	6	17
Sydney 2000	3	3	5	11



COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

2 Relació de les medalles amb el nombre d'habitants

En aquesta taula apareixen alguns països participants amb el barem (en milions d'habitants per medalla) als Jocs Olímpics de Sydney 2000.

País	Medalles	Habitants (mil.)	Barem
França	38	58,5	1,5
Rússia	88	147,7	1,7
R. Unit	28	58,2	2,1
Canadà	14	29,9	2,1
Ucraïna	23	51,4	2,2
Polònia	14	38,6	2,8
EUA	97	271,6	2,8
Espanya	11	39,7	3,6

AMB LES DADES DE LA TAULA, RESOL LES ACTIVITATS

a) *Si Espanya hagués repetit els resultats d'Atlanta 1996, en quin lloc de la taula estaria? I si hagués repetit els resultats de Barcelona 1992?*

b) *Un país amb 28 medalles i 45,7 milions d'habitants, quin barem va obtenir a Sydney 2000?*

c) *Un país amb 7 medalles i un barem de 2,4, quants milions d'habitants tenia l'any 2000?*

d) *Un país amb 8,8 milions d'habitants i un barem de 0,8, quantes medalles va obtenir a Sydney 2000?*

3 Anàlisi dels resultats d'alguns països de la Unió Europea

Els resultats (O-P-B) d'alguns països de la Unió Europea en tres Jocs Olímpics consecutius van ser:

País	Barcelona 92	Atlanta 96	Sydney 2000
Alemanya	33-21-28	20-8-27	14-17-26
Àustria	0-2-0	0-1-2	2-1-0
Bèlgica	0-1-2	2-2-2	0-2-3
Dinamarca	1-1-4	4-1-1	2-3-1
Espanya	13-7-2	5-6-6	3-3-5
Finlàndia	1-2-2	1-2-1	2-1-1
França	8-5-16	15-7-15	13-14-11
Grècia	2-0-0	4-4-0	4-6-3
Holanda	2-6-7	4-5-10	12-9-4
Irlanda	1-1-0	3-0-1	0-1-0
Itàlia	6-5-8	13-10-12	13-8-13
Luxemburg	0-0-0	0-0-0	0-0-0
Portugal	0-0-0	1-0-1	0-0-2
R. Unit	5-3-12	1-8-6	11-10-7
Suècia	1-7-4	2-4-2	4-5-3

Per analitzar els resultats i comprendre'n millor l'evolució, són molt útils les activitats següents, que has de fer amb les dades de la taula.

a) *Quantes medalles va obtenir en total cada país de la Unió Europea en cadascun dels Jocs Olímpics?*

b) *Estableix l'ordre dels països en funció de les medalles aconseguides en cadascun dels Jocs Olímpics.*

c) *Troba el nombre total de medalles de cada país en aquests tres Jocs Olímpics.*

d) *Estableix els percentatges de variació del total de medalles de cada país a Atlanta i a Sydney respecte dels Jocs Olímpics anteriors.*

e) *Tenint en compte la resposta a la pregunta anterior, quin país ha tingut una evolució millor en els seus resultats?*

f) *Quin país de la taula no ha obtingut cap medalla?*

4 Plantejament d'equacions i sistemes si en coneixem les solucions

Partirem de les taules anteriors per establir condicions que ens permetin formar sistemes d'equacions i arribar a la solució.

Considerant les medalles aconseguides per Espanya a Sydney 2000 (3 ors, 3 plates i 5 bronzes), formula un enunciat que permeti obtenir aquests valors resolent un sistema d'equacions.

Espanya va obtenir en total 11 medalles. Va aconseguir els mateixos ors que plates i va obtenir dues medalles més de bronze que de plata. Quantes medalles va obtenir de cada tipus?

Hi ha tres incògnites:

$o =$ or, $p =$ plata, $b =$ bronze

1a equació: $o + p + b = 11$
2a equació: $o = p$
3a equació: $b = p + 2$

El sistema d'equacions és:

$$\left.\begin{aligned} o + p + b &= 11 \\ o &= p \\ b &= p + 2 \end{aligned}\right\}$$

El resolem per substitució. Substituïm o i b en la primera equació:

$$p + p + (p + 2) = 11,\ \text{d'on } p = 3$$

Per tant, va obtenir: or $= 3$, plata $= 3$ i bronze $= 5$.

RESOL LES ACTIVITATS

a) *Els països de la taula van obtenir entre Sydney i Atlanta 468 medalles. A Atlanta se'n van aconseguir 10 més que a Sydney. Quantes en van obtenir en cadascun dels Jocs Olímpics?*

b) *Itàlia va obtenir a Sydney 34 medalles. D'or i de bronze en va aconseguir el mateix nombre, i d'or en va obtenir cinc més que de plata. Quantes medalles va obtenir de cada tipus?*

6 Equacions i sistemes

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Diferents plantejaments mitjançant equacions

Estratègia Un problema el podem resoldre plantejant diferents equacions la solució dels quals ens pot donar un resultat diferent. Tot i això, la seva interpretació final condueix a la mateixa solució del problema.

PROBLEMES RESOLTS

La suma de tres nombres consecutius és 48. Quins són aquests nombres?

Plantejament i resolució

Anomenem x el nombre central, $(x - 1)$ l'anterior, i $(x + 1)$ el posterior.

$$(x-1) + x + (x+1) = 48 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + x + x = 48 \rightarrow x = 16 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 15 \\ x = 16 \\ x + 1 = 17 \end{cases}$$

En una granja hi ha conills i gallines. Si comptem els caps són 30 i si comptem les potes són 80. Quants conills i gallines hi ha?

Plantejament i resolució

Anomenem $x =$ nre. de conills; $y =$ nre. de gallines.

Plantegem les equacions: $\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ 4x + 2y &= 80 \end{aligned}\right\}$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ 4x + 2y &= 80 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{2 \cdot 1a} \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 60 \\ 4x + 2y &= 80 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Restem } 2a - 1a} \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 60 \\ 4x + 2y &= 80 \end{aligned}\right\}$$
$$2x \qquad = 20$$

D'on: $x = 10$.

Si $x = 10$, llavors: $10 + y = 30 \rightarrow y = 20$

Hi ha 10 conills i 20 gallines.

PROBLEMES PROPOSATS

1. **Els diners que té en Pere són el triple dels que té l'Antoni. Si en Pere tingués 0,18 € menys i l'Antoni 0,48 € més, tots dos tindran la mateixa quantitat de diners. Quants en té cadascun?**

2. **Troba dos nombres la suma dels quals és 100 i la diferència dels quocients que obtenim quan dividim el més gran entre 4 i el més petit entre 6 és 10.**

6 OBJECTIU 1
DISTINGIR I IDENTIFICAR EQUACIONS I IDENTITATS

NOM: ______________________________ CURS: __________ DATA: __________

IDENTITATS I EQUACIONS

- Una **igualtat algebraica** està formada per dues expressions algebraiques separades pel signe igual (=).
- Una **identitat** és una igualtat algebraica que es verifica per a qualsevol valor de les lletres.
- Una **equació** és una igualtat algebraica que no es compleix per a tots els valors de les lletres. Resoldre una equació és trobar el valor o valors de les lletres perquè es compleixi la igualtat.

EXEMPLE

$\boldsymbol{x + x = 2x}$ és una identitat.

Es compleix la igualtat per a qualsevol valor numèric que prengui x:

Per a $x = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 2$

Per a $x = -2 \rightarrow (-2) + (-2) = 2(-2) \rightarrow -4 = -4$

$\boldsymbol{x + 4 = 10}$ és una equació. Només es compleix quan $x = 6 \rightarrow 6 + 4 = 10$.

1 **Indica si les igualtats són identitats o equacions.**

a) $x + 8 = 2x - 15$

b) $2(x + 2y) = 2x + 4y$

c) $x + x + x = 3x$

d) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

e) $2x + 1 = 11$

f) $\frac{x}{2} = 12$

2 **Indica el valor de x perquè es compleixi la igualtat.**

EQUACIÓ	PREGUNTA	VALOR DE x
$15 - x = 12$	Quin nombre restat a 15 dóna 12?	$x =$
$10 + x = 14$		
$11 - x = 10$		
$2 + x = 9$		
$16 - x = 4$		

3 **Calcula mentalment el valor de x perquè es compleixi la igualtat.**

a) $x - 1 = 2$

b) $x + 7 = 15$

c) $x - 3 = 6$

d) $-x + 10 = 5$

e) $x + 4 = 12$

f) $-x - 6 = -10$

EQUACIONS EQUIVALENTS

Dues o més **equacions** són **equivalents** quan tenen les mateixes solucions.

$x + 4 = 10$ i $2x = 12$ són equacions equivalents, ja que la solució de totes dues és $x = 6$.

$$6 + 4 = 10 \qquad 2 \cdot 6 = 12$$

4 **Per a cadascuna d'aquestes equacions, escriu una equació equivalent i troba'n la solució.**

EQUACIÓ	EQUACIÓ EQUIVALENT	SOLUCIÓ
$7 + x = 13$		
$x + 2 = 9$		
$2x = 14$		
$x - 4 = 4$		
$11 = 9 + x$		

5 **L'equació $3x + 4 = 10$ té com a solució $x = 2$. Esbrina quines de les equacions són equivalents a l'equació $3x + 4 = 10$.**

a) $3x + 10 = 20$

b) $\frac{3}{2}x - 8 = -5$

c) $4x + 12 - x = 21$

d) $\frac{4}{9}x + 12x - 8 = 18$

e) $\frac{2}{7}x + 2x - 5 = 6x$

f) $2x + 8 - \frac{1}{2}x = x + 9$

g) $12x - 3x + 10 = 5x + 18$

h) $\frac{1}{2}x + 3x = \frac{3}{2}x + 4$

6 **Tempteja i troba la solució de les equacions següents.**

a) $x - 2 = 2$

b) $4 + x = -2$

c) $x - 1 = -5$

d) $\frac{x}{2} = 4$

e) $x - 4 = 1$

f) $-1 + x = -3$

g) $-2 - x = -4$

h) $\frac{x}{18} = -6$

i) $2x - 1 = 3$

j) $3x = -15$

k) $-2x - 4 = 10$

l) $\frac{2x}{5} = 2$

RESOLDRE EQUACIONS DE PRIMER GRAU

NOM: ____________________ CURS: __________ DATA: __________

TRANSPOSICIÓ DE TERMES

- Si als dos dels membres d'una equació els **sumem o restem un mateix nombre** o expressió algebraica, obtenim una altra equació equivalent a la donada.
- Si als dos dels membres d'una equació els **multipliquem o dividim per un mateix nombre diferent de zero**, obtenim una equació equivalent a la donada.

EXEMPLE

Resol l'equació $x - 4 = 10$.

Sumem 4 en tots dos membres $\longrightarrow x - 4 + 4 = 10 + 4$

$$x = 14$$

Resol l'equació $x + 2x = 4 + 2x + 5$.

Restem $2x$ en tots dos membres $\longrightarrow x + 2x - 2x = 4 + 2x - 2x + 5$

$$x = 4 + 5$$

$$x = 9$$

Resol l'equació $3x = 12$.

Dividim tots dos membres entre 3 $\longrightarrow \dfrac{3x}{3} = \dfrac{12}{3} \rightarrow x = 4$

Resol l'equació $\dfrac{5x}{4} = 10$.

Multipliquem per 4 tots dos membres $\longrightarrow \dfrac{5x}{4} \cdot 4 = 10 \cdot 4 \rightarrow 5x = 40$

Dividim tots dos membres entre 5 $\longrightarrow \dfrac{5x}{5} = \dfrac{40}{5} \rightarrow x = 8$

1 **Resol les equacions següents aplicant la transposició de termes.**

a) $3x = 15$

b) $x + 6 = 14$

c) $-10 = -x + 3$

d) $2x + 6 = 20 + 6 + x$

e) $2x + 4 = 16$

f) $-4x - 4 = -20 - x$

2 **Resol les equacions següents.**

a) $2x - 5 = 3$

c) $-x - 4 = 10$

b) $x = -15 - 4x$

d) $3x + 8 = 12 - x$

MÈTODE GENERAL DE RESOLUCIÓ D'EQUACIONS

Resol l'equació $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$.

Per resoldre una equació és convenient seguir aquests passos.

1r Eliminem parèntesis. $2x - 8 - 6 - x = 3x - 4$

2n Reduïm termes semblants. $x - 14 = 3x - 4$

3r Transposem termes.

Restem x en tots dos membres. $x - x - 14 = 3x - x - 4$

$-14 = 2x - 4$

Sumem 4 en tots dos membres. $-14 + 4 = 2x - 4 + 4$

$-10 = 2x$

4t Aïllem la incògnita.

Dividim tots dos membres entre 2. $\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2} \rightarrow -5 = x$

3 **Resol aquestes equacions.**

a) $4 - x = 2x + 3x - 5x$

e) $2(x + 5) = 3(x + 1) - 3$

b) $2x - 9 = 3x - 17$

f) $3(x - 3) - 5(x - 1) - 6x$

c) $3x + 8 - 5(x - 1) = 2(x + 6) - 7x$

g) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

d) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

h) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

RESOLUCIÓ D'EQUACIONS AMB DENOMINADORS

Resol l'equació $\dfrac{2x-1}{3} = \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{3x-7}{4}$.

Per resoldre una equació amb denominadors és convenient seguir aquests passos.

1r Eliminem denominadors.

$$\text{m.c.m. } (3, 2, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot \frac{x-3}{2} + 12 \cdot \frac{3x-7}{4}$$

$$4(2x-1) = 6(x-3) + 3(3x-7)$$

2n Eliminem parèntesis.

$$8x - 4 = 6x - 18 + 9x - 21$$

3r Reduïm termes semblants

$$8x - 4 = 15x - 39$$

4t Transposem termes.

Restem $8x$ en tots dos membres.

$$8x - 4 - 8x = 15x - 39 - 8x$$
$$-4 = 7x - 39$$

Sumem 39 en tots dos membres.

$$-4 + 39 = 7x - 39 + 39$$
$$35 = 7x$$

5è Aïllem la incògnita.

Dividim tots dos membres entre 7.

$$\frac{35}{7} = \frac{7x}{7} \rightarrow x = 5$$

4 **Troba la solució d'aquestes equacions.**

a) $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{12-2x}{5} = \dfrac{x-2}{5}$

d) $\dfrac{x-4}{2} + \dfrac{x+3}{6} - \dfrac{x-6}{3} = 1 + \dfrac{x-7}{2}$

b) $5 - \dfrac{x-2}{4} = 4 + \dfrac{x-3}{2}$

e) $2\left(\dfrac{x}{3} + 5\right) = \dfrac{2x}{4} + 4$

c) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{6} = 30$

f) $\dfrac{3(x+5)}{4} + \dfrac{-7(x+3)}{10} = 4$

IDENTIFICAR SISTEMES D'EQUACIONS I ELS SEUS ELEMENTS

NOM: ______________________ CURS: __________ DATA: __________

Un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites** és un conjunt de dues equacions de les quals busquem una solució comuna.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Coeficients} \text{ de les incògnites: } a, a', b, b' \\ \textbf{Termes independents: } k, k' \end{cases}$$

EXEMPLE

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{x - 2y} &\boldsymbol{= 2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{Incògnites: } x, y \\ \text{Coeficients de les incògnites: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Termes independents: } 5, 2 \end{cases}$$

1 **Determina les incògnites, els coeficients i els termes independents d'aquests sistemes.**

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

- Una **solució** d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites és una parella de nombres que verifica totes dues equacions.
- **Resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites** és trobar-ne les solucions.
- **Si un sistema té solució**, és a dir, si es poden trobar dos nombres que compleixin les dues equacions, direm que és **compatible**.

EXEMPLE

Comprova si el sistema d'equacions següent té com a solució $x = 4$ i $y = 1$.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{x - 2y} &\boldsymbol{= 2} \end{aligned}\right\}$$

Vegem si la solució de l'enunciat verifica les dues equacions del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 4,\ y = 1} \left.\begin{aligned} 4 + 1 &= 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \\ &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \end{aligned}$$

Per tant, $x = 4$ i $y = 1$ és una solució del sistema. El sistema és compatible.

2 **Determina si $x = 0$ i $y = -1$ és solució d'aquests sistemes.**

a) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 4y &= 2 \\ 3y &= -3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= -4 \end{aligned}\right\}$

RESOLDRE SISTEMES MITJANÇANT DIVERSOS MÈTODES: A) SUBSTITUCIÓ

NOM: ____________________ CURS: __________ DATA: __________

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode de substitució**, hem de:

a) **Aïllar** la incògnita en una de les dues equacions.

b) **Substituir** l'expressió obtinguda a l'altra equació.

c) **Resoldre** l'equació amb una incògnita que resulta.

d) **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per obtenir l'altra incògnita.

e) **Comprovar** que la solució obtinguda verifica totes dues equacions.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent pel mètode de substitució.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &= \mathbf{30} \\ \boldsymbol{x - y} &= \mathbf{10} \end{aligned}\right\}$$

a) Triem, per **aïllar**, la incògnita x de la segona equació.

$$x = 10 + y$$

b) **Substituïm** aquesta incògnita en la primera equació.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolem** l'equació obtinguda.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \boxed{y = 10} \end{aligned}$$

d) **Substituïm** el valor $y = 10$ en la primera equació.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \\ \boxed{x = 20} \end{aligned}$$

e) **Comprovem** la solució obtinguda. Per fer-ho, hem de substituir el parell de valors (20, 10) en totes dues equacions.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 20,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 20 + 10 &= 30 \\ 20 - 10 &= 10 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to \text{Compleix l'equació.} \\ &\to \text{Compleix l'equació.} \end{aligned}$$

La solució del sistema és el parell de valors $x = 20$ i $y = 10$.

Per tant, el sistema d'equacions té una solució, és a dir, és un sistema compatible.

1 **Resol el sistema d'equacions pel mètode de substitució.**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= \mathbf{5} \\ \boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} &= \mathbf{2} \end{aligned}\right\}$$

a) Triem, per aïllar, la incògnita y en la primera equació.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Substituïm aquesta incògnita en la segona equació.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolem l'equació obtinguda.

$\boxed{x = \quad}$

d) Substituïm el valor de x obtingut en una de les equacions, per exemple, en la primera.

$x + y = 5$

$\boxed{} + y = 2$

$\boxed{y = \quad}$

Solució del sistema: $\boxed{x = \quad}$ $\boxed{y = \quad}$

e) Comprovem la solució del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \boxed{} + \boxed{} &= 5 \\ \boxed{} - 2 \cdot \boxed{} &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ Si obtenim aquest resultat, els valors de x i y són correctes.

2 **Resol els sistemes pel mètode de substitució i comprova'n els resultats.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 8 \\ 2x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -x + y &= 7 \\ 3x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} \frac{x - 2}{3} + y &= 4 \\ x + \frac{y}{3} &= 6 \end{aligned}\right\}$

ADAPTACIÓ CURRICULAR

OBJECTIU 4

RESOLDRE SISTEMES MITJANÇANT DIVERSOS MÈTODES: B) IGUALACIÓ

NOM: ______________________ CURS: __________ DATA: __________

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites **pel mètode d'igualació** hem de:

a) **Aïllar** la mateixa incògnita en totes dues equacions.
b) **Igualar** les expressions obtingudes.
c) **Resoldre** l'equació d'una incògnita que resulta.
d) **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per obtenir l'altra incògnita.
e) **Comprovar** la solució obtinguda.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent pel mètode d'igualació.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{-1} \\ \mathbf{3x + y} &= \mathbf{11} \end{aligned}\right\}$$

a) Triem per **aïllar** la incògnita y de les dues equacions.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 1 &= y \\ 11 - 3x &= y \end{aligned}\right\}$$

b) **Igualem** les expressions obtingudes.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolem** l'equació obtinguda.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 2}$$

d) **Substituïm** el valor $x = 2$ en qualsevol de les equacions. En aquest cas, triem la segona.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{y = 5}$$

e) **Comprovem** la solució obtinguda.

Per fer-ho, hem de substituir el parell de valors (2, 5) en totes dues equacions.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 3x + y &= 11 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=2,\ y=5} \left.\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 5 &= -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 &= 11 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \\ &\rightarrow \text{Compleix l'equació.} \end{aligned}$$

La solució del sistema és el parell de valors $x = 2$ i $y = 5$.

Per tant, el sistema d'equacions té solució, és a dir, és compatible.

1 **Resol el sistema per mitjà del mètode d'igualació i comprova'n la solució.**

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{x+y=77} \\ \boldsymbol{x-y=2} \end{array}\right\}$$

a) Aïllem la mateixa incògnita en totes dues equacions.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=77 \\ x-y=2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

b) Igualem les equacions obtingudes.

c) Resolem l'equació d'un incògnita obtinguda.

d) Substituïm el valor de les incògnites en qualsevol de les dues equacions del sistema.

e) Comprovem la solució.

2 **Resol els sistemes següents per mitjà del mètode d'igualació i comprova'n els resultats.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2x-4y=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=10 \\ 4x+10y=20 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=6 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{9}=6 \end{array}\right\}$

RESOLDRE SISTEMES MITJANÇANT DIVERSOS MÈTODES: C) REDUCCIÓ

NOM: ______________________ CURS: __________ DATA: __________

Per resoldre un sistema d'equacions amb dues incògnites pel **mètode de reducció** hem de:

a) **Buscar un sistema equivalent** en què els coeficients d'una mateixa incògnita siguin iguals o oposats.
b) **Sumar** o **restar** les dues equacions obtingudes per eliminar així una incògnita.
c) **Resoldre** l'equació que resulta.
d) **Substituir** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per obtenir l'altra incògnita.
e) **Comprovar** la solució obtinguda.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent per mitjà del mètode de reducció.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + 2y = 25} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 40} \end{aligned}\right\}$$

a) **Obtenim** un sistema equivalent.

Escollim una incògnita en les dues equacions, en aquest cas, *x*.

Multipliquem la primera equació per 2.

$$\left.\begin{aligned} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

Ara el sistema equivalent és:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y = 50 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

b) **Restem** les dues equacions del sistema per eliminar la *x*.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -\ (2x + 3y = 40) \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -2x - 3y = -40 \\ \hline y = 10 \end{array}$$

c) **Resolem** l'equació d'una incògnita que en resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Substituïm** el valor obtingut en una de les dues equacions del sistema, en aquest cas, en la primera equació.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprovem** el resultat.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y = 25 \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 10 = 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 25 = 25 \\ 40 = 40 \end{aligned}\right\}$$

La solució del sistema és el parell de valors $x = 5$ i $y = 10$.

Per tant, el sistema d'equacions té solució, és a dir, és un sistema compatible.

1 **Resol el sistema següent pel mètode de reducció i comprova'n el resultat.**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{3x - 2y = -10}\\ \mathbf{4x + 5y = 140}\end{array}\right\}$$

a) Obtenim un sistema equivalent. Triem una incògnita, per exemple, la y.

Multipliquem la primera equació per 5 i la segona equació per 2.

$$\left.\begin{array}{l}5(3x - 2y = -10)\\ \\ 2(4x + 5y = 140)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}15x - 10y = -50\\ \\ 8x + 10y = 280\end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema equivalent}$$

b) Sumem les dues equacions per eliminar la y.

$$\begin{array}{rrl} & 15x - \cancel{10y} & = -50\\ + & 8x + \cancel{10y} & = 280\\ \hline & 23x & = 230\end{array}$$

c) Resolem l'equació obtinguda.

$\boxed{x = }$

d) Substituïm el valor numèric en qualsevol de les equacions del sistema i obtenim el valor de y.

e) Comprovem la solució.

2 **Resol pel mètode de reducció el sistema i comprova'n el resultat.**

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{3x + 2y = 26}\\ \mathbf{2x - 3y = -13}\end{array}\right\}$$

Triem una incògnita: Per quin nombre hem de multiplicar les equacions perquè aquest incògnita desaparegui quan les sumem?

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{}\,(3x + 2y = 26)\\ \boxed{}\,(2x - 3y = -13)\end{array}\right\} \rightarrow$$

ADAPTACIÓ CURRICULAR

6 OBJECTIU 5
RESOLDRE PROBLEMES MITJANÇANT EQUACIONS I SISTEMES

NOM: ______________________ CURS: __________ DATA: __________

RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Per resoldre un problema fent servir equacions convé seguir aquests passos.

1r Lectura i comprensió de l'enunciat. Cal distingir les dades conegudes i la dada desconeguda, és a dir, la incògnita.

2n Plantejament de l'equació. Hem d'expressar les condicions de l'enunciat en forma d'equació: la correspondència entre les dades i la incògnita.

3r Resolució de l'equació: Obtenim el valor de la incògnita resolent l'equació.

4t Comprovació i interpretació del resultat. Hem de comprovar si el resultat verifica l'enunciat i interpretar la solució en el context del problema.

EXEMPLE

L'Anna té 2 € més que la Berta; la Berta té 2 € més que l'Eva, i l'Eva té 2 € més que la Lluïsa. Entre les quatre amigues tenen 48 €. Calcula la quantitat de diners que té cadascuna.

1r Lectura i comprensió de l'enunciat.

Agafem com a dada desconeguda els diners que té la Lluïsa.

2n Plantejament de l'equació.

Diners de la Lluïsa → x

La resta de quantitats de diners les escrivim en funció de x:

Diners de l'Eva ⟶ 2 € més que la Lluïsa → $x + 2$
Diners de la Berta → 2 € més que l'Eva ⟶ $(x + 2) + 2 = x + 4$
Diners de l'Anna ⟶ 2 € més que la Berta ⟶ $(x + 4) + 2 = x + 6$

Escrivim la condició que la suma de les quantitats és 48 €.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

3r Resolució de l'equació.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48 \rightarrow 4x + 12 = 48 \rightarrow 4x = 48 - 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \text{La Lluïsa té 9 €.}$$

L'Eva té: $9 + 2 = 11$ €. La Berta té: $9 + 4 = 13$ €. L'Anna té: $9 + 6 = 15$ €.

4t Comprovació i interpretació del resultat.

Les quantitats de les amigues: 9, 11, 13 i 15 € compleixen les condicions de l'enunciat.

$$9 + 11 + 13 + 15 = 48$$

1 **La suma de tres nombres consecutius és 30. Troba'ls.**

2 **En una classe de 2n d'ESO hi ha 28 alumnes. Si el triple del nombre de noies és igual a quatre vegades el de nois, quants alumnes hi ha de cada sexe?**

