

# Enriquiment competencial de tasques matemàtiques

**Xavier Vilella Miró**

IES Vilatzara, Formador ICE-UAB, GTPR - Departament d'Educació, xvilella@xtec.cat

## Resum

Per desenvolupar les competències de l'alumnat a l'aula cal fer una transició partint de la nostra manera actual de treballar per anar a aquella que faciliti més bé aquest desenvolupament. En aquest article es proposa una via per aconseguir-ho: l'enriquiment de les tasques competencialment pobres, mitjançant petites millores que poden ser assumides per tothom. Aquest enriquiment es basa en 4 passos que formen un cicle de reflexió sobre la pròpia pràctica: anàlisi – enriquiment – experimentació – anàlisi. Per a un altre article queda l'avaluació i la programació del treball competencial.

## Abstract

*In order to develop pupils' skills in the classroom we need to make a transition from our current way of working towards one that facilitates this development better. This article proposes one way to do this: enriching tasks which are weak in skills content through small improvements which everybody can take on board. This enrichment is based on four steps which make up a cycle of reflective thought about the practice in question: analysis – enrichment – experimentation – analysis. Assessing and planning skills work is left for another article.*

Quan va aparèixer el nou currículum, en el qual es destaca com a objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques aconseguir el desenvolupament de les competències bàsiques del nostre alumnat, especialment les competències matemàtiques, bona part del professorat hi trobà a faltar algunes indicacions sobre com es pot aconseguir aquest objectiu a partir del qual actualment es treballa a l'aula.

D'altra banda, en la formació contínua es rebien peticions de cursos per desenvolupar projectes (interdisciplinaris i també matemàtics) en el centre. Una vegada realitzat el curs, les avaluacions eren positives, les persones assistents sovint afirmaven que consideraven els projectes una bona eina per desenvolupar competències, que tot això era molt bonic, però veien molt difícil la seva implementació a l'aula, en general, i a la seva aula, en particular.

## Entre el llibre de text i els projectes matemàtics

Com a professor de Matemàtiques a l'IES Vilatzara de Vilassar de Mar, feia anys que treballava, conjuntament amb els companys i les companyes del departament<sup>1</sup> i del Grup Vilatzara<sup>2</sup>, les tasques anomenades Projectes Matemàtics. Com a formador de professorat, feia alguns anys que impartia cursos en els quals els projectes eren una proposta de treball dirigida a assolir objectius que difícilment es poden aconseguir amb altres propostes (com ara problemes, breus investigacions, etc.)<sup>3</sup>.

Però la realitat, tossuda, una vegada i una altra em mostrava que a bona part del professorat li costava molt de fer el salt des del llibre de text fins als projectes. Calia trobar una proposta que omplís el buit que hi ha enmig de les dues maneres de fer la classe de matemàtiques.

Atès que ja feia algun temps que treballava aspectes de millora en el desenvolupament de competències en la formació contínua del professorat (especialment en un centre concertat de la ciutat de Mataró, l'Escola Salesiana<sup>4</sup>), vaig intentar trobar una manera de facilitar l'evolució des de les tasques que es proposen habitualment a l'aula, basades en el llibre de text, i aquelles que afavoreixen un fort desenvolupament competencial.

## Perquè... volem desenvolupar les competències matemàtiques, oi?

Una primera decisió que cal prendre és si realment estem interessats a desenvolupar les competències bàsiques del nostre alumnat, i, en el nostre cas, especialment les competències matemàtiques. Aquesta pregunta ens l'hem de fer –encara que potser per a moltes persones la seva resposta positiva pugui resultar òbvia– abans de posar-nos a intentar millorar les tasques que proposem a l'aula.

Cal tenir en compte que si, en el fons, el que pretenem és seguir transmetent els continguts matemàtics i prou, si considerem secundàries les competències matemàtiques davant de rutines i mecàniques tradicionals, si pensem que l'aportació de les matemàtiques a la vida de l'alumnat que tenim al davant ha de ser únicament basada a donar una bona base per als aprenentatges posteriors a l'etapa obligatòria i no donar-los eines per afrontar els reptes de la seva vida futura per a tothom: si pensem així, potser no cal que ens hi posem.

Cal llegir amb atenció l'annex 1 del currículum vigent a Catalunya, i analitzar-ne amb cura les 8 competències bàsiques, per adonar-nos de la importància que té per al nostre alumnat que acabin l'ESO essent persones competents. Per anar per la vida i per anar al batxillerat i als cicles formatius. Per a les dues coses, han de ser al màxim de competents.

## Tasques pobres des del punt de vista competencial

Fem una ullada a propostes de tasques d'alguns llibres de text. Personalment, quan vaig començar la meva anàlisi de tasques de llibres de text, em va sorprendre la línia molt homogènia, més del que havia suposat, de diferents editorials<sup>5</sup>. Observeu-ne alguns exemples, tots ells extrets d'editorials habituals en els centres educatius, ben conegudes i que venen milers i milers d'exemplars cada curs.

***“Ens falten 60 km per arribar a Santiago de Compostel·la i volem recórrerlos en 3 dies. El primer dia recórrerem el triple que el segon, i el segon, la meitat que el tercer. Quina distància recórrerem cada dia?”***

Aquest és el *primer problema* de la primera pàgina del tema de l'àlgebra en un llibre de primer d'ESO. Es presenta com un exemple del que treballarà l'alumnat a partir d'aquella pàgina. En una anàlisi inicial, encara que no sigui molt profunda, ja podem veure que es pretén mostrar una determinada idea de l'àlgebra:

- l'enunciat és com un joc de paraules: primer, triple, segon, segon, meitat, tercer;
- el context del problema té molt de decorat, ja que no serveix en absolut per ajudar a situar o enfortir la resolució del problema: a quin caminant se li acudiria fer-se una pregunta com aquesta? El que es fa és determinar la distància a caminar en els pròxims dies partint de consideracions reals i pràctiques, com ara l'estat dels peus, la fatiga acumulada, la pressa per acabar...;

- finalment, sembla prou evident que la intenció d'aquest enunciat és provocar que l'alumnat prepari la seva equació de primer grau i la resolgui: poc pensament i raonament algebraic s'hi desenvoluparà.

Des del punt de vista de la diversitat, un problema com aquest difícilment permetrà cap camí alternatiu al plantejament de l'equació en alumnes de primer curs d'ESO, ni tampoc afavoreix representacions personals que ajudin a la comprensió de la situació i del que es demana. No posa facilitats en el desenvolupament de la competència d'aprendre a aprendre perquè no se situa en la ZPD<sup>6</sup> de la immensa majoria de l'alumnat, ni desenvolupa l'autonomia i la iniciativa personal perquè qui ho sàpiga fer, ho farà i ja està, i qui no, no podrà fer res de res, més enllà d'esperar que ho faci la persona del costat i copiar-ho.

En definitiva, es tracta d'una tasca pobre des del punt de vista competencial. Però, atès que és la primera tasca que l'alumnat veu en seu llibre a l'inici del tema de l'àlgebra, mostra una idea de l'àlgebra com a rutina, traducció a símbols, mecànica de resolució, sense relació amb la funció principal que té l'àlgebra, que és, curt i ras, resoldre problemes reals de les persones.

Aquí tenim un altre exemple similar a l'anterior. També es troba en les primeres pàgines del tema de l'àlgebra:

***“Escriu l'expressió algebraica corresponent a la frase següent: la diferència entre el triple del quadrat d'un nombre i el doble del cub d'un altre nombre és igual a 12”***

Aquí encara es destaca més l'element de traducció i de mecànica, però hem d'agrair, si més no, que no hi afegixin un fals context.

L'exemple següent és d'una altra mena. El trobem just a sota del títol de l'apartat: “L'equació de primer grau”. El primer exemple que l'alumnat es troba és aquest:

$$4x-2=x^2+1$$

Cal destacar que, portats possiblement per l'obsessió de “donar un nivell alt”, les persones autores volen presentar un exemple que mostri com seran les dificultats d'aquest tema tan seriós, però se'ls en va la mà i col·loquen una equació de segon grau...

D'altra banda, com es pot veure en tots els exemples presentats, s'insisteix en l'àlgebra com a llenguatge a dominar per damunt dels significats. Una àlgebra buida de significats en l'ESO portarà amb molta probabilitat a la desafecció cap a les matemàtiques en els cursos posteriors, i possiblement a buscar alternatives d'estudis al més allunyades possible de les matemàtiques.

Quan comencen a aparèixer els sistemes d'equacions, ho acostumen a fer amb aquest format:

$$4x + 3y = 12,5$$

$$8x + 4y = 22$$

***Esbrina el valor de x i de y***

En algun llibre he constatat un esforç per donar un context a aquest plantejament, la qual cosa és d'agrair, i l'enunciat pren aquesta forma:

***Ahir vam comprar 4 entrepans i 3 begudes i ens van costar 12,50 €. Avui hem comprat 8 entrepans i 4 begudes i ens han costat 22 €. Esbrina el preu d'un entrepà i el preu d'una beguda.***

En el cas que comento, el bon començament queda esgarrat de seguida: presenten aquest enunciat i, a sota mateix, mostren tota la solució pas per pas, organitzada amb indicacions com “Primer pas”, “Segon pas”, etc. Línia per línia van fent una de les possibles maneres de resoldre aquest problema, i la mostren amb una clara finalitat de norma de resolució: sembla que digui “així ho has de fer”.

D'aquesta manera es perd l'element més ric de la tasca proposada, consistent a obrir les possibilitats per a tothom (possibilitats de dibuixar i simbolitzar les relacions buscant d'ajustar les variables en funció de la informació complementària, o bé de plantejar les equacions i resoldre el sistema, per exemple).

En un llibre de text he trobat una lliçó que porta per títol “Perímetre i àrea”. Em sembla del tot encertat aquest tema, ja que l'alumnat que arriba a l'ESO presenta sovint confusions entre aquests dos conceptes.

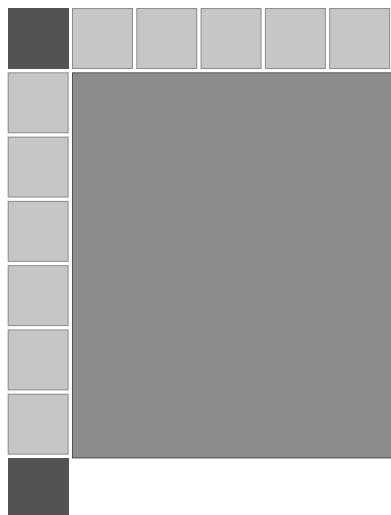
La sorpresa apareix quan en el contingut de tot el capítol només trobem dos moments en els quals es parla del perímetre. En el primer s'explica com es calcula el perímetre d'un rectangle. Fixem-nos-hi: *com es calcula*, no hi ha cap esforç per donar significat al concepte.

I en el segon es proposa un problema amb “rajoles d'1 m de costat”:

**“Quantes rajoles necessitarem per enrajolar la vora de la piscina si fa 6 m de llarg per 5 d'ample?”**

És clar que el que pretén aquest enunciat és que l'alumnat faci una operació com  $6 \cdot 2 + 5 \cdot 2$  i doni un resultat de 22 rajoles.

Però hi ha un problema, derivat del fet de treballar en contextos reals: si fem el dibuix de la piscina i imaginem les rajoles que hi aniran per la vora, tenim un aspecte a considerar: les cantonades.



Les rajoles seran 25 si volem cobrir també les cantonades.  
Quin paleta deixaria les cantonades sense cobrir?

La riquesa d'aquesta tasca resideix en el fet que el context real és més complex que el context matemàtic del perímetre d'un rectangle. Treballar amb objectes acostuma a aportar complexitat matemàtica i, alhora, també aporta elements de desenvolupament competencial i facilita el treball inclusiu a l'aula.

Justament per això és molt important el treball matemàtic contextualitzat, perquè ens permet presentar a l'alumnat situacions en les quals cal tenir en compte aspectes que, sobre el paper, amb elements abstractes, no és necessari considerar.

Hi ha qui pensa que per a l'aprenentatge matemàtic en aquestes edats convé presentar situacions simples i senzilles, en un ordre creixent de dificultat, creient que així facilitaràn l'aprenentatge: jo crec que és ben al contrari. Les situacions simples, mecàniques, senzilles el que aconseguen és no interessar en absolut a l'alumnat, especialment a aquella part de l'alumnat que li costa més aprendre matemàtiques, i allunyar-lo de donar significat a les matemàtiques que aprenen. Pensar que "el significat ja vindrà després: ara que aprenguin les rutines, com em van fer fer a mi", com em deia un professor en un assessorament, provoca la pèrdua d'interès d'una part de l'alumnat des dels primers dies de classe. Tenint en compte que, a més, la part de l'alumnat que inicialment segueix la classe de matemàtiques, si realment és altament capaç d'entendre-les, aviat també hi perdrà l'interès, atès que en aquestes activitats no hi trobarà cap font de provocació, de repte a la seva intel·ligència. Per tant, amb aquestes tasques el que aconseguim és no atendre la diversitat ni per baix ni per dalt.

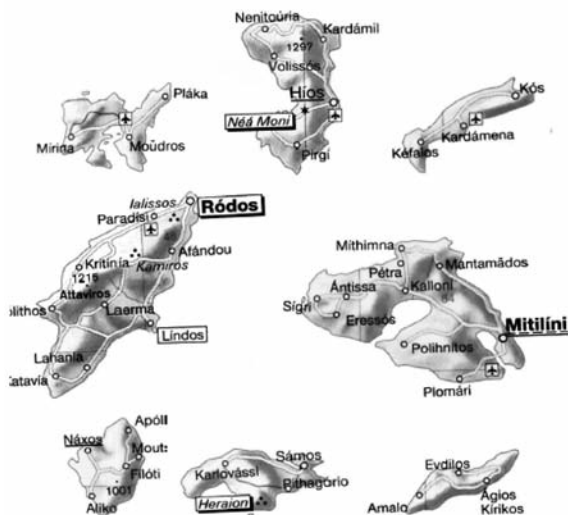
## Tasques competencialment riques

Comencem analitzant algunes altres tasques. Aquí en teniu una<sup>7</sup> de relacionada amb el concepte de grandària, en una i en dues dimensions. La pregunta clau és: "Sabries ordenar aquestes illes gregues de major a menor?".

### 10.1 Quina és més gran?

Grècia és un país que, a més de tenir força illes, va ser bressol de les matemàtiques i, en concret, de la geometria.

Sabries ordenar aquestes illes gregues de major a menor?



Una pregunta que es pot entendre de diferents maneres. Hi ha qui pensaria que no és adequada per a l'aula de matemàtiques. Tot al contrari: la manca de concreció de la pregunta genera immediatament una reacció en l'alumnat. Comencen per discutir entre ells i elles de quina mena de grandària estem parlant. Cada alumne que vulgui opinar haurà de dir la seva opinió i argumentar-la, ja que probablement en el seu petit grup hi haurà qui no hi estarà d'acord i l'un intentarà de convèncer l'altre. Argumentacions i també vocabulari lligat a situacions de geometria, àrea i perímetre. Podem referir-nos a la costa com a criteri d'ordenació, o potser a si una "té més terra" que una altra (en termes escoltats a l'aula). De fet, una cosa és el punt on espera el professorat que arribi l'alumnat, i l'altra són els camins que, en una activitat rica i oberta, pren l'alumnat. El debat sobre el que està bé i el que està malament a l'aula de matemàtiques no serà el que digui el professor o professora, sinó que pot quedar establert pel mateix alumnat: en

aquest exemple, tan correcte és un criteri com l'altre, tot depèn del que volem estudiar. Estem en una òrbita plenament competencial.

Per tant, provoca el debat, desenvolupa el pensament lògic, l'argumentació i prepara la negociació de significats i de vocabularis, i ho fa en un context complex, pròxim a la realitat, on es fan servir les matemàtiques.

Aquesta tasca és ideal per demanar un treball en petits grups heterogenis, ja que provoca el debat i el contrast d'opinions en una situació en la qual l'alumne més avantatjat no té d'entrada la raó i tothom es veu amb cor d'opinar.

Al cap d'una estona de treballar en petits grups, hi haurà qui voldrà que sigui el professor o la professora qui estableixi qui té raó, de quina grandària estem parlant. Tal com deia abans, si volem seguir enriquint la tasca, cal no definir-hi i donar pas que cada grup prengui la decisió que cregui oportuna, i, quan es posi en comú la solució de cada grup, ja veurem qui té raó.

Aquesta actitud del professorat a l'aula és una de les claus per mostrar a l'alumnat la norma clau de la gestió rica de l'activitat matemàtica, basada a permetre que l'alumnat pugui fer el seu camí de construcció, i deixant la seva intervenció per a una fase posterior del treball.

## Tasques pobres i tasques riques

Si el que volem, doncs, és afavorir a les aules el desenvolupament de les competències bàsiques i de les específiques de l'àrea de matemàtiques, ens cal la creació de situacions d'aprenentatge en les quals l'alumnat pugui coconstruir amb el professorat el coneixement.

Aquestes situacions, per treballar en la ZPD de l'alumnat, han de presentar unes característiques que podem agrupar sota el terme de **tasques riques**.

Les tasques riques es caracteritzen per, entre d'altres, les funcions següents:

- presenten situacions contextualitzades, pròximes a l'alumnat que les ha d'afrontar,
- generen actituds de curiositat i d'interès per la seva resolució,
- són obertes, ja que permeten abordatges diferents per part d'alumnes diferents,
- faciliten l'entrada de coneixement extern al centre educatiu,
- tenen resultats obtinguts per camins diversos,
- presenten la informació inicial usant representacions diverses,
- afavoreixen la generació d'opinions personals i crítiques, i
- faciliten l'intercanvi d'aquestes opinions en petits grups.

En un institut de l'àrea metropolitana de Barcelona estàvem treballant com enriquir una tasca pobre. Un professor de matemàtiques del centre va proposar aquesta tasca:

***¿Quantes vegades ha bategat el cor d'una persona de 80 anys en tota la seva vida, si suposem una mitjana de 72 batecs per minut?***

Aquesta tasca era habitual a l'aula d'aquell professor, la posava cada any, i cada any constatava que un part de l'alumnat no s'hi posava, restaven inactius fins que algun company o companya havia acabat i ho copiaven (algú ni això).

Els que s'hi posaven, de seguida la tenien feta, perquè realment és una proposta molt senzilla per als primers cursos de secundària. Havia provat també de posar-los en petits grups, però la motivació dels més apàtics no millorava i seguien esperant que el llest o la llesta del grup l'acabés per copiarla.

Evidentment, no és una tasca que faciliti un treball inclusiu, ni desenvolupa competències, ja que qui la sap fer la fa i acaba de seguida, i qui no la sap fer, simplement no fa res.

La primera cosa que vàrem fer fou analitzar amb una mica de detall quin contingut competencial tenia. És clar que el professor que la va proposar no la considerava massa indicada per desenvolupar competències (si no fos així, ja no l'hauria proposat per a un exercici d'enriquiment), però calia compartir l'anàlisi amb la resta del seu petit grup. Tothom va coincidir que les operacions a realitzar no eren complicades, però sí que apareixien complicacions d'altres menes: per part de l'alumnat, l'enunciat podia ser una mica confús, i segurament no serien les equivalències entre minuts, hores, dies i any les que en complicaven el desenvolupament, sinó el fet de donar totes aquestes dades comprimides en un curt enunciat.

Per això, van decidir fer un enriquiment suprimint dades, i la proposta va quedar així enriquida:

### ***Quantes vegades batega el cor d'una persona en tota la seva vida?***

Val a dir que un altre professor, crec que de ciències, va objectar que l'enunciat era incorrecte tal com havia quedat perquè hi faltaven dades. La resta del petit grup insistí a portar-la a l'aula i provar-ne l'eficàcia. Ho van fer i els resultats van ser realment espectaculars.

La gestió de l'activitat de l'alumnat es basà en el treball en petits grups heterogenis, els mateixos que quan el professor ho havia intentat anteriorment amb poc èxit. Però ara les coses havien canviat: de seguida que es posaven a treballar, tothom podia notar que faltaven dades; no quedava ningú exclòs d'aquesta observació, i les mans s'aixecaven per demanar al professor que els les donés. La primera dada que trobaven a faltar era quants anys viu una persona. Però el professor, en acostar-se al petit grup, els contestava que ho decidissin ells mateixos, que en parlessin i prenguessin una decisió per poder continuar la resolució del problema. La resposta els resultava sorprenent tenint en compte que gairebé mai en matemàtiques els enunciats deixen marge de maniobra a l'alumnat en el tema de les dades, però s'hi van posar.

Un rere l'altre, tots els grups van anar demanant el mateix i a tots se'ls contestà de la mateixa manera. En cada grup es va produir un debat sobre quina edat havien d'establir, i cada grup ho va resoldre de maneres diferents. Els uns decidien fer la mitjana de les edats que cadascú del grup havia dit, mentre que un altre grup decidia triar una edat que els semblava més habitual.

Com es pot veure, la manca d'alguna dada en l'enunciat ha afavorit (i de quina manera!) un enfocament de la tasca a realitzar per part de l'alumnat totalment diferent de la que es demanava quan totes les dades eren servides en safata. Allò que semblava una dificultat afegida al problema resulta que és una de les claus per desenvolupar competències matemàtiques (i bàsiques, en general). Allò que era més simple, més rutinari, no permetia un bon desenvolupament competencial, i això, que és més complex, sí que l'afavoreix.

La sessió va seguir amb noves peticions de dades (preguntaven, per exemple: *quantes vegades batega el cor d'una persona* en un temps determinat, normalment en un minut, perquè els sonava de pel·lícules d'hospitals que veuen per la televisió), i la resposta tornava a ser *Decidiu-ho vosaltres!*

A més, la sessió va permetre treballar pràcticament a tothom, perquè totes les fases del treball facilitaven que fos així, i només al final, en el moment de les últimes operacions, podien aparèixer algunes dificul-

tats relacionades amb les equivalències d'unitats de temps, fàcilment superades amb el treball en equip. La calculadora facilità els càlculs més mecànics i tots els grups van acabar el problema.

Però això no s'acaba aquí: el fet que cada grup triés diferents dades provocava que els resultats finals (tots ells molt grans per al que s'esperava l'alumnat) no coincidissin. Això va permetre fer un pas més, una posada en comú i un debat sobre dues coses: les raons de les diferències i la manera de resoldre la situació, donat que no necessàriament resultats diferents han d'estar malament.

En acabar la sessió, es van analitzar els aspectes competencials treballats, que tocaven parts de:

- la competència matemàtica,
- la competència d'iniciativa i autonomia personal,
- la competència d'aprendre a aprendre, la lingüística i comunicativa, i
- la competència de coneixement del món físic...

El treball a l'aula fou molt ric i ple d'intercanvis i debats. L'alumnat participava en diferents moments perquè la situació ho facilitava, i la seva participació no es basava únicament en el que sabien de matemàtiques: també es posaven en marxa sabers de fora de l'aula, i de familiars, com els que intervenien en el primer debat sobre els anys que viu una persona. Hi havia hagut:

- planificació per fases (primer cal saber el que viu una persona, després els batecs per minut, i finalment arribar al càlcul dels batecs en tota la vida),
- contrast d'opinions i necessitat d'arribar a consens,
- mesura directa dels batecs del cor,
- càlcul amb equivalències d'unitats de temps,
- contrast de resultats obtinguts a diferents equips i cerca d'explicacions plausibles del perquè de les diferències, i
- comunicació de raonaments i idees matemàtiques.

La valoració que van fer d'aquest enriquiment de tasca pobre fou molt positiva. Allò que habitualment feia el professor en 20 minuts s'allargà tota una sessió de prop d'una hora, però la feina desenvolupada fou molt més gran i de caire competencial. Un exercici senzill i rutinari de càlcul es convertí en un treball cooperatiu de resolució de problemes.

## Enriquiment competencial de tasques pobres

Resulta difícil trobar tasques que reuneixin alhora totes les característiques d'una tasca rica, però no ho és tant intentar que les tasques que portem a l'aula n'integrin algunes d'aquelles. Aquest procés és ***l'enriquiment de tasques pobres***.

L'enriquiment de tasques pobres comença per establir quina tasca de les que portem a l'aula és pobre, i per fer-ho caldrà que en la formació comencem per proposar exemples de tasques i demanar als i les participants que les analitzin amb una mirada competencial. De seguida podem afrontar com enriquir-la. Aquest procés es pot repetir algunes vegades amb tasques pobres de diferents assignatures. Una vegada el professorat que es forma tingui una certa pràctica a fer-ho, podrem passar a l'anàlisi de tasques pròpies i el seu enriquiment.

### Primer pas: anàlisi

El primer pas consistirà a establir el contingut competencial d'una tasca. Per fer-ho, haurem d'analitzar la tasca des del punt de vista de les competències que desenvolupa en l'alumnat. La referència són, per



exemple, els comentaris de l'Annex 1 del currículum, o bé mapes conceptuals de les 8 competències bàsiques prèviament preparats en equip.

En alguns casos, però, la pobresa de la tasca és molt evident i potser convé començar per aquestes tasques, ja que són les que demanen un enriquiment amb prioritat.

Exemple:

### ***“Calcula el mcm de 40 i 100”***

Difícilment podrem trobar-hi algun aspecte competencial més enllà de posar a prova si l'alumnat coneix i sap aplicar l'algorisme del mínim comú múltiple. És una tasca de tipus reproductiu<sup>8</sup>, perquè no facilita la construcció de coneixement: l'alumnat que sàpiga calcular el mcm ho farà, reproduint el que ja sap, i l'alumnat que no el recordi, simplement no farà res.

Aquesta tasca, extreta d'un llibre de primer d'ESO de matemàtiques, pot ser enriquida convertint-se en una situació que desenvolupi molts aspectes competencials.

### **Segon pas: enriquiment**

En un dels centres on ho vam treballar, la proposta enriquida fou la següent:

***“Per una parada del centre del poble passen dues línies d'autobusos, la línia A i la línia B. Totes dues comencen a funcionar a les 6 del matí. La primera línia, la A, fa un recorregut curt, i torna a passar per la parada del centre al cap de 40 minuts. La línia B, en canvi, fa una volta més llarga, i triga 1 hora i 40 minuts a tornar a la parada del centre. A quina hora es tornaran a trobar tots dos autobusos a la parada del centre? Quantes vegades es trobaran en tota una jornada, si pleguen a les 12 de la nit?”***

Certament, no es tracta d'un enriquiment espectacular, ja que problemes com aquest es treballen sovint a les aules de matemàtiques, però la diferència amb l'anterior és molt gran.

Per començar, la situació és abordable des de diferents punts de vista sense condicions de coneixement previ limitatives per a qualsevol alumne de primer d'ESO: l'enunciat s'entén, i es capten tant les informacions importants com les preguntes a respondre. El context que es presenta és pròxim a l'alumnat (si es tracta d'una població on el transport en autobús és habitual) i l'ajuda a afrontar la tasca matemàtica: un bon context.

En segon lloc, les representacions que permetran a cada alumne avançar en la solució són diverses: hi ha qui necessita representar cada autobús amb una corba que surt d'un punt i torna a aquest punt, hi ha qui passa directament a la taula de valors i hi ha qui usa d'entrada llenguatge simbòlic.

En tercer lloc, les diverses maneres d'afrontar el problema afavoreixen que existeixin opinions personals diferents i, per tant, que en el petit grup de treball tinguin sentit compartir-les i comparar-les, arribant finalment a alguna conclusió de consens entre tots els membres del grup: per exemple, que la solució correcta pot ésser obtinguda per diferents camins, tots ells correctes, però d'eficàcies i eficiències diferents. Aquest fet es pot destacar en la posada en comú posterior (de tota la classe), i apreciar el valor relatiu que tenen diferents formes de resoldre problemes segons la situació concreta en què ens trobem. Un aspecte de la competència matemàtica molt important, i moltes vegades difícil de plantejar, que aquí apareix de forma natural.

### **Tercer pas: experimentació**

Una vegada enriquida la tasca, cal portar-la a l'aula i comprovar-ne l'eficàcia. La comprovació no es pot basar en la intuïció del professorat, i cal que abans d'experimentar-la disposem d'una petita graella en la

qual figurin amb claredat les observacions que farem a l'aula per tal d'establir la millora aconseguida. Aquesta petita graella ha de constar, si més no, de la columna dels aspectes competencials que esperem desenvolupar amb la tasca enriquida i de les accions observables en l'alumnat que ens mostraran aquest canvi.

Fases de la tasca	Aspectes competencials	Accions observables

En el cas de l'exemple anterior, el que esperem que es desenvolupi a l'aula és, entre d'altres possibilitats, els aspectes següents:

- un ambient de treball generalitzat, atès que tothom podrà afrontar la tasca;
- la motivació podrà observar-se en l'intent de resoldre la tasca d'alumnes poques vegades interessats a treballar tasques matemàtiques, en l'esforç que hi posin, malgrat que les coincidències horàries dels autobusos, posteriors a la primera (el mcm) demanin a alguns alumnes poc hàbils un procés recursiu d'uns quants minuts;
- la representació que utilitzi cada alumne ens informará de l'eficiència de l'estratègia utilitzada per resoldre el problema, de manera que podrem establir nivells competencials del tipus "necessita un dibuix figuratiu", "utilitza una taula de dades", "usa l'algoritme del mcm";
- observant el debat en els petits grups, podrem establir el rol que cadascú adopta en el grup d'iguals, i la mena d'intervencions que hi fa, o si no en fa, que també és una observació significativa.

Cal destacar en aquest punt que les observacions a l'aula ens donaran elements avaluatius de primer ordre: elements que ens permetran, si ho considerem oportú, actuar amb l'alumnat poc hàbil, en la línia de l'avaluació reguladora, que pretén millorar el rendiment de tot l'alumnat.

### Quart pas: anàlisi dels resultats

Les observacions obtingudes a l'aula han de ser analitzades per comprovar l'eficiència de la millora realitzada. Normalment, en els casos que ho he practicat en assessorament de centres, es mostra una tècnica molt eficient, tant des del punt de vista de les poques energies que consumeix, com des del punt de vista dels efectes que provoca en l'alumnat. La satisfacció acostuma a ser generalitzada perquè l'alumnat denota més dinamisme a l'aula, hi ha sovint treball cooperatiu i no competitiu; tothom pot participar i té importància l'opinió personal de cadascú, es fomenta l'esperit crític i es demana fins i tot que s'expressi i s'arribi a consens. A més, presentant les tasques en context, se'n facilita la resolució perquè es posen en marxa els sabers acumulats de tota mena.

Per part del professorat també es valora positivament, amb l'única excepció de qui pensa que funciona però li "consumeix massa temps". Darrera d'aquesta queixa sovint hi ha la creença que els aprenentatges de continguts conceptuals (i procedimentals més mecànics) són els realment importants i tots els altres ens fan perdre temps d'ensenyar-ne més als més capaços. Opinió errònia, des del meu punt de vista, perquè tot l'alumnat, també els més capaços, han de ser competents en acabar l'educació obligatòria, facin el que facin a la vida. Les persones competents tenen més possibilitats de viure una vida més fàcil i més feliç, tant si segueixen estudis superiors com si no ho fan. I jo sóc dels que creu que ser competent en matemàtiques els ajudarà en aquesta cerca de la felicitat.

### Algunes formes d'enriquiment competencial

Hi ha moltes maneres d'enriquir una tasca pobre. Aquí n'escriu algunes, molt habituals als assessoraments que realitzo:

- Contextualitzar-la: de quina mena de context parlem? No és únicament l'entorn físic de l'alumnat,

sinó que el context ha de facilitar a l'alumnat afrontar i resoldre la tasca proposada.

- Respecte a les dades de la situació presentada:
  - Amagar-ne alguna: aquesta tècnica afavoreix especialment la lectura comprensiva dels enunciats, atès que per poder començar a resoldre la situació plantejada cal descobrir que ens falta alguna dada.
  - Donar-ne massa: també afavoreix la lectura comprensiva, però en aquest cas es desenvolupa l'anàlisi crítica i l'argumentació, especialment si es treballa en petits grups en els quals cal consens per seguir endavant.
- Respecte a la pregunta:
  - Donar una resposta i demanar la pregunta: aquest enriquiment és molt interessant, perquè mobilitza capacitats poc treballades a les aules. Normalment el procés és l'invers: se'ls dóna una pregunta i s'espera que la responguin. Aquí ens adonarem a quantes preguntes diferents creu l'alumnat que respon la mateixa resposta, i això mostra dues coses: que l'alumnat de vegades no lliga correctament la resposta amb la pregunta (i apareixeran pistes interessants sobre els motius d'aquesta divergència) i que la seva creativitat encara existeix, amagada.
  - Presentar una resposta llarga d'un company o companya i demanar-ne l'anàlisi personal: es genera un debat en el qual es confronten interpretacions diverses entre iguals, que porten finalment a un consens habitualment encertat, sense gairebé cap intervenció del professorat.
  - Canviar la pregunta: de vegades, el sol fet de canviar la pregunta és suficient per enriquir la tasca. També es pot demanar que la canviï l'alumnat i que es justifiqui el canvi (competència comunicativa, argumentació, crítica...).

### Enriquiment mitjançant la gestió de l'activitat a l'aula

No hem d'oblidar, finalment, que *una tasca rica* que proposem a l'aula serveix per provocar *l'activitat rica* de l'alumnat. Per tant, serà igualment important la manera com gestionarem l'activitat de l'alumnat, una vegada iniciada aquesta a l'aula.



Una tasca rica pot ser del tot *empobrida* per una mala gestió a l'aula. Difícilment, però, es dóna la situació contrària: una tasca pobre costa molt d'enriquir amb una bona gestió.

La gestió rica es caracteritza per facilitar el desenvolupament de les competències en l'alumnat, i va lligada als aspectes de riquesa de les tasques. Normalment, la gestió serà la responsable d'aspectes com la comunicació de les idees pròpies, i de molts aspectes d'actituds i valors.

Exemples de gestió rica de l'activitat de l'alumnat:

- **Cerca d'informació:** amb pautes i guia del professorat, acompanyament imprescindible per convertir la informació en coneixement.
- **Preguntes de l'alumnat:** sempre que es pugui, contestar amb una nova pregunta que provoqui la necessitat de comprensió i de reflexió per part de l'alumne que pregunta.
- **Establiment de l'encert i l'error:** donar temps perquè l'alumnat arribi a establir l'encert o l'error en una argumentació, en un càlcul, en una estratègia; no precipitar-nos a donar la raó i tenir una mica de paciència. El procés d'assaig-millora donarà resultats més bons si establir encerts i errors és un pas més en la feina habitual de l'alumnat.
- **Treball real en equip:** seguint sempre la pauta de dedicar uns minuts al treball individual (en els quals es forma l'opinió personal que val la pena després compartir amb el petit grup), seguit del treball en petit grup (en el qual es comparteix la visió personal i es compara, per arribar al consens).

- Finalment, **treball en gran grup**, on hi ha el debat d'aspectes consensuats en petit grup o es constata l'aportació de moltes persones –no solament d'un professor/a, jutge o àrbitre– per aconseguir arribar a la veritat, i també on es practiquen hàbits socials imprescindibles per afrontar la vida real.

La classe magistral ha de ser utilitzada quan el coneixement que volem ensenyar ho demani. No tot serveix per al treball d'equips, com no tot serveix per a la classe magistral. Hi ha continguts més adequats per a cada metodologia. La clau resideix en l'equilibri entre les diferents metodologies, de manera que es cobreixi el desenvolupament de les competències bàsiques. Aquest és el criteri sobre la utilitat de cada metodologia, i no hem de perdre'ns en discussions sobre quina d'elles és millor. Fixem-nos en què aprèn l'alumnat i com ho aprèn, i tindrem un bon criteri de qualitat per triar-les.

La gestió rica de l'activitat aconseguirà activitat rica i aprenentatge competencial significatiu, usant els continguts de tota mena com a vehicle per aconseguir-ho. No hi ha, doncs, cap contradicció entre “treballar per continguts” i “treballar per competències”. Només podem desenvolupar competències durant l'aprenentatge dels continguts.

### Exemples de treball amb activitats riques

En els diferents assessoraments que he realitzat han anat sorgint enriquiments diversos, que han estat valorats positivament pels seus protagonistes. En els exemples següents destaco alguna característica concreta que m'ha cridat l'atenció, com pot ser la manera de gestionar una pregunta d'infants de 5 anys, o propostes d'enriquiment modestes però que signifiquen per a qui les porta a l'aula un primer pas en aquest camí de millora didàctica.

1. A **Infantil** han treballat les formes geomètriques senzilles (quadrat, rectangle, triangle, cercle). Ara treballen l'*Arlequí de Picasso*:

- A1: “Senyu, això no són ni quadrats, ni triangles, ni cercles... Què són?”
- Mestre: “Què creieu que són? Què hi veieu?”
- A2 (callat tota l'estona): “Hi ha 2 triangles enganxats”
- Mestre: “Vine, i explica-ho a tota la classe”

L'A2 mostra una gran capacitat d'anàlisi visual, i la mestra n'hauria de prendre bona nota, és una observació important de cara a l'avaluació.

2. A **Primària** cada curs la professora treballa els graus, minuts i segons, de forma mecànica; també els climes en funció de la latitud...

Ara proposa un enriquiment:

“Una alta executiva d'una empresa multinacional treballa a Barcelona i ha de viatjar a Copenhagen i Ciutat del Cap.

- Canviarà l'hora?
- M'han dit que a Ciutat del Cap fa el mateix temps que a Barcelona. És possible? Per què? Tindrà relació amb la latitud?
- I a Copenhagen?”

Busquen les longituds i latituds amb el Google Earth i treballen unitats d'angle. La mestra observa: hi ha un interès enorme a la classe, tenen ganes de seguir a casa, s'ho passen bé (ella també), s'ajuden entre ells, són protagonistes de l'activitat.

3. A **tercer de Primària** la mestra treballa cada curs els canvis d'unitats de longitud mecànicament. El resultat no la satisfà en absolut, i ara vol provar amb un enriquiment:

“L'arquitecte de l'escola, que té l'encàrrec de fer els plànols del nou edifici, ens demana les mides del que hi ha a la classe: taules, porta, finestres, taula del mestre, cadires, etc. Com ho fem?”

- Tenim 3 cordes de diferent mida, però comencen mesurant amb els seus pams.

- Una alumna NEE dóna 5,5 pams, però la Júlia afirma que són 6,5 pams. Discussió sobre qui té raó: propostes de com saber qui l'encerta i qui s'equivoca.
- Debat entre iguals. Conclusió del debat: fem-ho amb les cordes!
- Però l'arquitecte no sabrà com són de llargues les cordes...
- S'adonen que cal una unitat estàndard.

4. A **primer d'ESO** treballen espai i forma: habitualment, el professor segueix la tradicional lliçó de geometria del llibre.

Proposa un enriquiment:

- Estudiarem primer les formes de diferents objectes, i les classificarem.
- Després, esbrinarem la funció que realitzen els objectes.
- Comprovarem que la funció es relaciona amb la forma.
- Estudiarem la forma des de Matemàtiques i des de Plàstica.
- Una exposició (curs 2008/09) a Cosmocaixa pot completar el tema.

### Començar un camí de millora

La proposta d'enriquiment de tasques competencialment pobres és una possible via d'inici d'un camí de millora de la nostra feina a l'aula que ens ha de portar, en fases posteriors, a intentar anar cobrint els components del currículum de matemàtiques, establerts per Bishop<sup>9</sup> des de la perspectiva cultural. Sobre la base d'aquests principis, Bishop estableix tres components del currículum: el component simbòlic (conceptualitzacions explicatives significatives de la tecnologia de les matemàtiques), el component societal (usos que fa la societat de les explicacions matemàtiques) i el component cultural (metaconcepte de les matemàtiques com a fenomen existent a totes les cultures). Per poder abraçar els tres components del currículum, Bishop proposa tres tipus de tasques riques:

- La **resolució de situacions contextualitzades** a partir de les tasques relacionades amb comptar, localitzar, mesurar, dissenyar, jugar i explicar.
- Els **projectes matemàtics**.
- Les **petites investigacions**.

El pes que cada un d'aquests tipus de tasques ha de tenir en el currículum va canviant a mesura que avança l'escolarització (Bishop segurament en diria "l'enculturació"), i en el seu llibre hi ha propostes concretes interessants. Caldrà anar tendint a cobrir tots tres tipus de tasques, i l'enriquiment de tasques competencialment pobres pot ser un bon començament.

### I després...

Per a un altre article queden aspectes molt interessants que van lligats al que aquí presento, com la programació del treball competencial o l'avaluació de competències. Està clar que aquesta referència final als components del currículum ens enfoca cap a la necessitat de programar adequadament tot el treball de les competències matemàtiques (i de les altres set competències bàsiques) a l'aula, i que cal avaluar tot el procés i el punt final. Però no hem de posar el carro davant dels bous: no podem programar el treball competencial ni avaluar el desenvolupament en competències del nostre alumnat si no és aquest el nostre objectiu, és a dir, si no treballem per competències.

### Bibliografia:

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Grup Vilatzara (2001). Proyectos en la ESO. Una actividad rica. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 27, 21-36.

Grup Vilatzara (2005). Àlgebra a l'ESO per a tothom. Reinventant a partir del context. *BIAIX*, 24, 42-47.

Grup Vilatzara (2006). *¿Es posible viajar con las matemáticas? Viaje y Matemáticas*. Badajoz: ICE-UAB/FESPM.

Sol, M., Giménez, J., Rosich, N. (2007). Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 46, 43-59.

Vilella, X. (2006). *Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural*. Barcelona: ICE-UB/Horsori Editorial.

Vilella, X. (2009). El diàlego en el aula de matemàtiques com a comunitat de pràctiques. A N. Planas i A. Alsinà (Coords.): *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

## Notes

- 1 Manel Sol, membre del Grup Vilatzara i del Departament de Matemàtiques del mateix centre, ha estudiat a fons els projectes matemàtics en la seva tesi doctoral, presentada la passada primavera.
- 2 El Grup Vilatzara és un seminari d'innovació i recerca sobre educació matemàtica de l'ICEUAB en el qual treballem des de fa 13 anys. A la bibliografia podreu trobar algunes de les seves produccions.
- 3 A la bibliografia es cita un article del Grup Vilatzara publicat a la revista *UNO* sobre projectes matemàtics.
- 4 En aquest centre vaig trobar un claustre i una direcció molt sensibles i ben disposats a l'anàlisi de la seva pròpia pràctica i a la millora, que és d'agrair.
- 5 N'hi ha algunes honroses excepcions, però aquí no donaré noms de les unes ni de les altres: ho deixo per a lectors i lectores, en la confiança que seran competents en aquesta anàlisi.
- 6 Zona de Desenvolupament Proper: el terme, de Vigostky, està molt difós i no crec necessari definir-lo aquí.
- 7 Aquesta tasca es treballa en el primer curs de l'ESO, habitualment durant el 2n trimestre.
- 8 Prenc com a referència els nivells PISA: reproductiu, connectiu, reflexiu.
- 9 En el llibre *Enculturación matemática...*, citat a la bibliografia, capítol 5, pp. 123-158, hi trobareu àmpliament explicada la proposta d'Alan J. Bishop.

