REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

Representa la següent funció: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$

1. Estudiem el seu domini: El seu domini és: R-{-4}
2. Punts de tall amb els eixos: P(0, 0).
2. Asímptotes:

Asímptotes verticals: La funció té una asímptota vertical en el punt que anul·la de denominador, x = -4. Calculem els límits laterals per comprovar-ho:

$$\lim_{x\to -4+} f(x)=+\infty \text{ i } \lim_{x\to -4-} f(x)=-\infty$$

Comportament a l'infinit: El grau del numerador és una unitat superior al del denominador. Té una asímptota obliqua *f(x) = ax + b*

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2/x^2}{x^2/x^2+4\,x/x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+4}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x+4)}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-4x}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+4}=-4$$

Monotonia. Extrems relatius.

$$f(x)=\frac{x^2}{x+4} \to f'(x)=\frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2}=\frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-8 \end{cases}$$

Estudiem el signe de la primera derivada en els intèrvals
$(-\infty,-8), (-8,-4), (-4,0), (0,+\infty)$

$f'(-10)=5/9>0 \to$ funció creixent en $(-\infty,-8)$
$f'(-5)=-15<0 \to$ funció decreixent en $(-8,-4)$
$f'(-2)=-2<0 \to$ funció decreixent en $(-4,0)$
$f'(4)=9/25>0 \to$ funció creixent en $(0,+\infty)$

Per tant, f(x) té un màxim en x=-8 i un mínim en x=0

Corbatura. Punts d'inflexió.

$$f'(x)=\frac{x(x+8)}{(x+4)^2}\rightarrow f''(x)=\frac{2(x+4)(x+4)^2-x(x+8)\cdot 2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{32}{(x+4)^3}$$

$$x(x+8)=x^2+8x\rightarrow 2x+8=2(x+4)$$

$$(x+4)^2\rightarrow 2(x+4)$$

La segona derivada no s'anul·la mai, per tant la funció no té punts d'inflexió.

Estudiem el signe de la segona derivada en els intèrvals $(-\infty,-4),(-4,+\infty)$

$f''(-5)=-32<0\rightarrow$ funció cònvexa $\cap$ en $(-\infty,-4)$

$f''(1)=32/125>0\rightarrow$ funció còncava $\cup$ en $(-4,+\infty)$

Representació gràfica.