9 Figures planes. Àrees

El regal

Mentre es treia de sobre la pols que l'empedrat camí li havia dipositat damunt les robes i les sandàlies, Apol·loni de Perge mirava amb admiració el temple d'Artemisa, una de les set meravelles construïdes al món.

Després d'aquest parc agençament, va girar la vista cap als arbres i, sota una figuera, va veure Eudem, l'amic amb qui havia quedat, que descansava.

–La pujada és cansada, però paga la pena. El temple és el més semblant a l'Olimp dels déus que es pot veure a la Terra –va dir Apol·loni, mentre s'asseia al seu costat.

–No ho discuteixo, Apol·loni –va contestar Eudem–. Però hauries de fer ofrenes en honor d'Atena, que és la deessa de la saviesa, i no d'Artemisa, deessa de la cacera.

–Quan visito un amic sempre porto algun regal, i si vaig a la casa d'una deessa, per què no ho haig de fer? –va raonar Apol·loni.

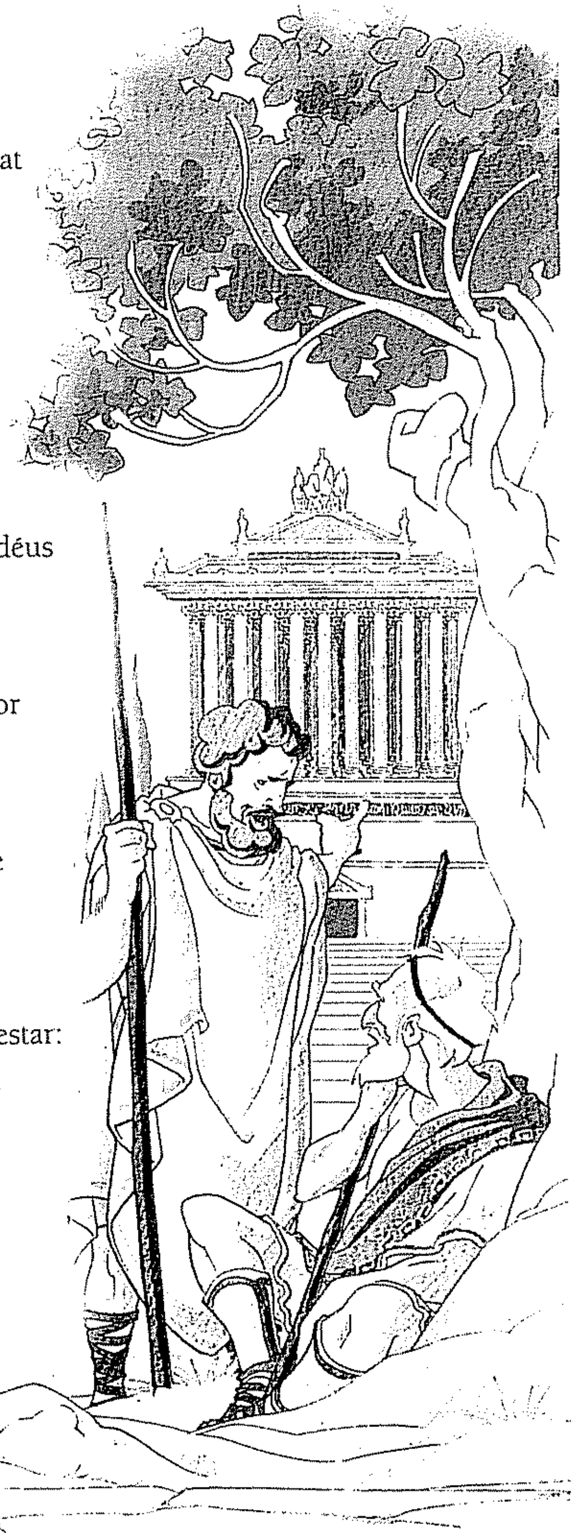
Eudem li va preguntar:

–Llavors a mi, quin regal m'has portat?

Apol·loni es va arronsar d'espatlles i va contestar:

–No en tens prou amb l'abraçada d'un amic! A més, com que sé que t'agraden, et porto una endevinalla geomètrica: Com es pot trobar una circumferència tangent a tres circumferències més donades?

Si dues circumferències tangents es tallen en un punt, en quants punts es poden tallar dues circumferències?



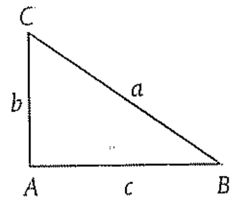
LA DE TREBALL

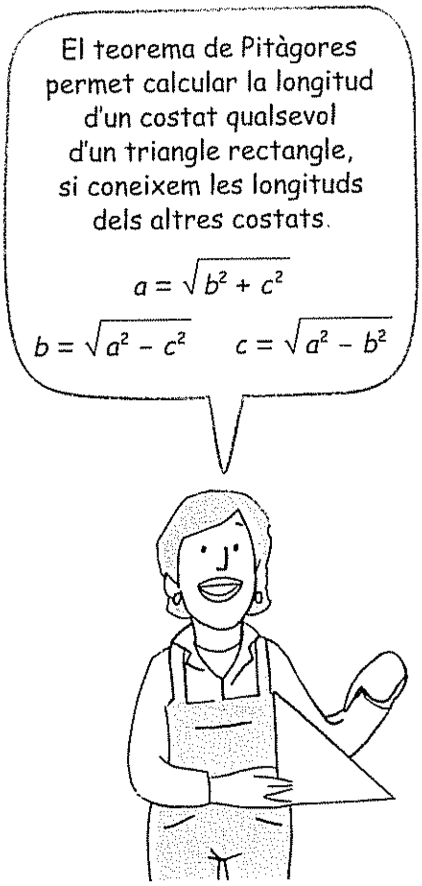
En aquesta unitat aprendràs a...

- Conèixer i aplicar el teorema de Pitàgores.
- Calcular l'àrea de triangles, paral·lelograms, trapezis i polígons regulars.
- Trobar la longitud d'una circumferència i d'un arc de circumferència.
- Reconèixer i calcular l'àrea de figures circulars.

1 Teorema de Pitàgores

Un triangle rectangle té un angle recte (90°). Els costats que formen l'angle recte els anomenem **catets**, b i c, i el costat més gran, **hipotenusa**, a.





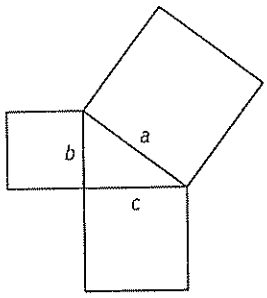
Teorema de Pitàgores

En un triangle rectangle, el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels catets.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

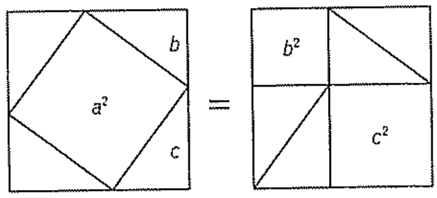
EXEMPLES

1



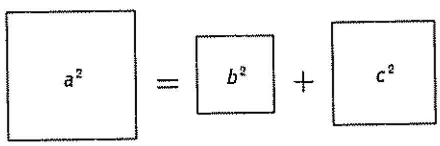
Comprovem el teorema de Pitàgores gràficament: si utilitzem els costats d'un triangle rectangle, podem construir tres quadrats que tenen els costats iguals que els costats del triangle rectangle.

Al quadrat de costat a hi afegim quatre triangles rectangles iguals fins que formem un altre quadrat.



Als quadrats de costats b i c hi afegim quatre triangles rectangles fins que formem un quadrat.

Com que els quatre triangles rectangles de cada membre són idèntics, quan els eliminem la igualtat es manté.



2 Troba la hipotenusa d'un triangle rectangle amb catets de 6 cm i 8 cm.

Hi apliquem el teorema de Pitàgores i substituïm:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow a^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow$$
$$\rightarrow a = \sqrt{100} = 10 \rightarrow \text{La hipotenusa } a \text{ fa 10 cm.}$$

EXERCICIS

PRACTICA

1 Troba la hipotenusa d'un triangle rectangle amb aquests catets:

a) 15 cm i 8 cm b) 12 cm i 35 cm

2 En un triangle rectangle, els catets fan 5 cm i 12 cm. Quina mida té la hipotenusa?

APLICA

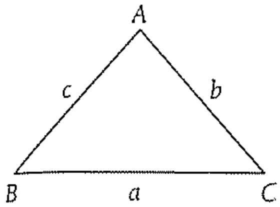
3 Calcula la diagonal d'un rectangle de 16 m de longitud i 12 m d'amplada.

REFLEXIONA

4 Es compleix el teorema de Pitàgores en un triangle que no sigui rectangle?

2 Aplicacions del teorema de Pitàgores

2.1 Determinació de si un triangle és rectangle



En un triangle en què a és el costat més gran:

- Si $a^2 = b^2 + c^2$ $\rightarrow$ El triangle és rectangle.
- Si $a^2 < b^2 + c^2$ $\rightarrow$ El triangle és acutangle.
- Si $a^2 > b^2 + c^2$ $\rightarrow$ El triangle és obtusangle.

Només compleixen el teorema de Pitàgores els triangles rectangles.

EXEMPLE

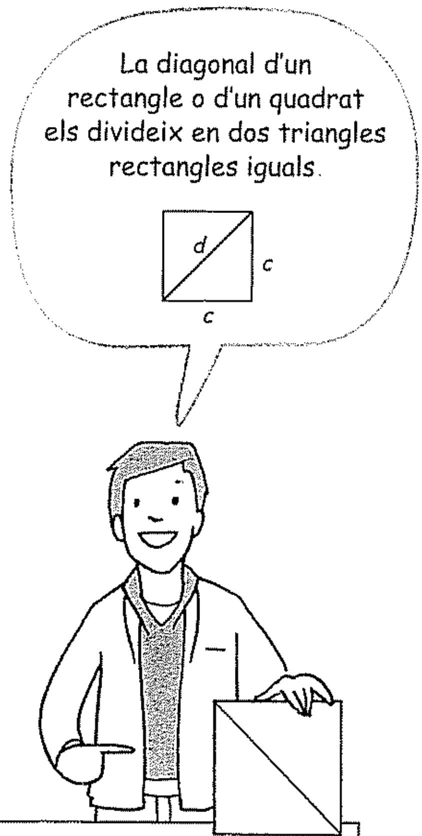
3 Determina si un triangle de costats 3 cm, 4 cm i 5 cm és rectangle.

Prenem el costat més gran, que anomenem a, com a hipotenusa, i els altres dos costats, b i c, com a catets.

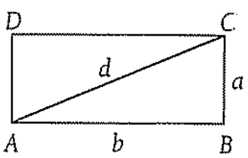
$a^2 \rightarrow 5^2 = 25$ $\quad b^2 \rightarrow 3^2 = 9$ $\quad c^2 \rightarrow 4^2 = 16$

Comprovem si es compleix el teorema de Pitàgores:

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = 9 + 16 \rightarrow$ El triangle és rectangle



2.2 Càlcul de la diagonal d'un rectangle

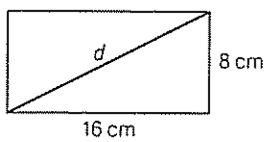


El triangle $\widehat{ABC}$ és rectangle, amb hipotenusa la diagonal, d, i catets, els costats del rectangle.

$$d^2 = a^2 + b^2 \rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

EXEMPLE

4 Calcula la diagonal d'aquest rectangle:



$d^2 = 16^2 + 8^2 \rightarrow d = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17{,}89$

La diagonal del rectangle fa 17,89 cm.

EXERCICIS

PRACTICA

5 Indica si els triangles amb aquestes mides són rectangles, acutangles o obtusangles:

a) 10 cm, 11 cm i 20 cm
b) 4 cm, 5 cm i 6 cm
c) 48 cm, 55 cm i 73 cm

6 Sobre un camp rectangular, de 16 m de longitud i 12 m d'amplada, tracem una diagonal. Calcula'n la longitud.

APLICA

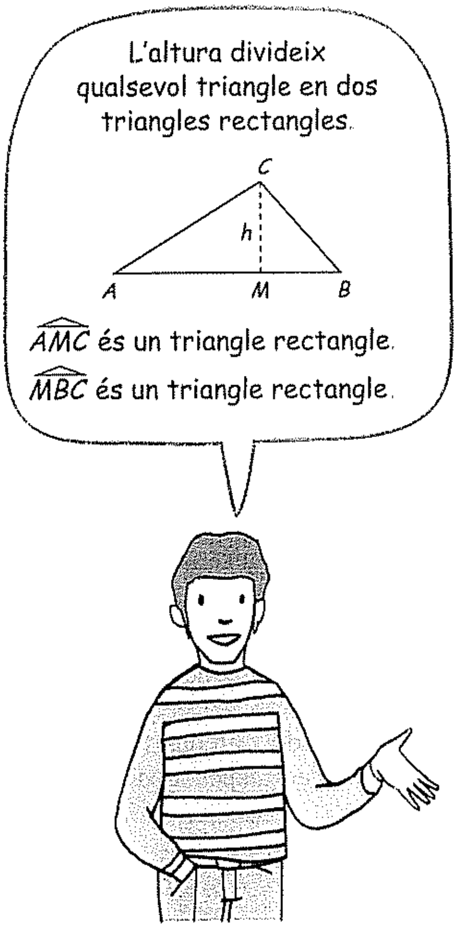
7 Determina la llargada d'un rectangle de 3 cm d'amplada i 22 cm de diagonal.

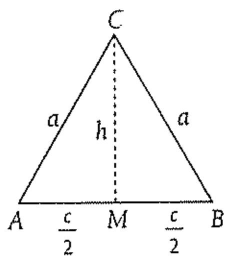
REFLEXIONA

8 Calcula quant fa el costat d'un rombe de diagonals 12 cm i 18 cm, respectivament.

9 Calcula el costat d'un quadrat si la diagonal és de 18 cm.

2.3 Càlcul de l'altura d'un triangle isòsceles





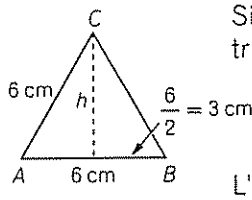
En un triangle isòsceles, l'altura, sobre el costat desigual, el talla pel punt mitjà.

Els triangles $\widehat{AMC}$ i $\widehat{MBC}$ són rectangles. Així doncs:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

EXEMPLE

5 Calcula l'altura d'aquest triangle equilàter de 6 cm de costat.

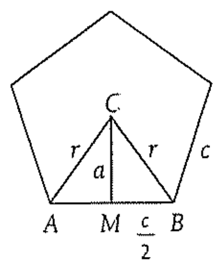


Si el triangle és equilàter, compleix les condicions del triangle isòsceles.

$$6^2 = h^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$$

L'altura del triangle fa 5,2 cm

2.4 Càlcul de l'apotema d'un polígon regular

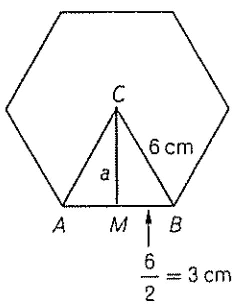


El triangle $\widehat{MBC}$ és rectangle, la seva hipotenusa és el radi del polígon regular i els catets són l'apotema i la meitat del costat. Així doncs, es verifica que:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

EXEMPLE

6 Calcula l'apotema d'un hexàgon regular de 6 cm de costat.



L'hexàgon regular és l'únic polígon regular que té la propietat que la longitud del seu costat coincideix amb el seu radi.

$$6^2 = a^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2$$

L'apotema de l'hexàgon regular fa 5,2 cm.

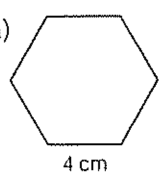
EXERCICIS

PRACTICA

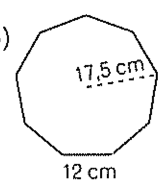
10 Calcula l'altura d'un triangle equilàter de 7 cm de costat.

11 Troba l'apotema:

a)



b)



APLICA

12 Determina l'altura d'un triangle isòsceles que té els costats iguals de 8 cm i la base de 6 cm.

REFLEXIONA

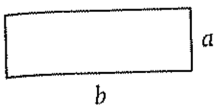
13 Troba la mida del costat d'un triangle equilàter de 12 cm d'altura.

14 Calcula el costat d'un hexàgon regular de 10 cm d'apotema.

3 Àrees de polígons

3.1 Àrea dels paral·lelograms

Àrea del rectangle



L'**àrea d'un rectangle** de base b i altura a és:

$$A = b \cdot a$$

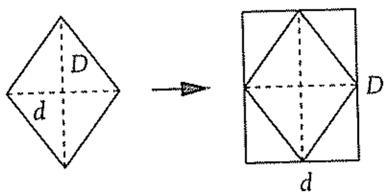
Àrea del quadrat

Un quadrat té tots els costats iguals.

L'**àrea d'un quadrat** de costat c és:

$$A = c \cdot c = c^2$$

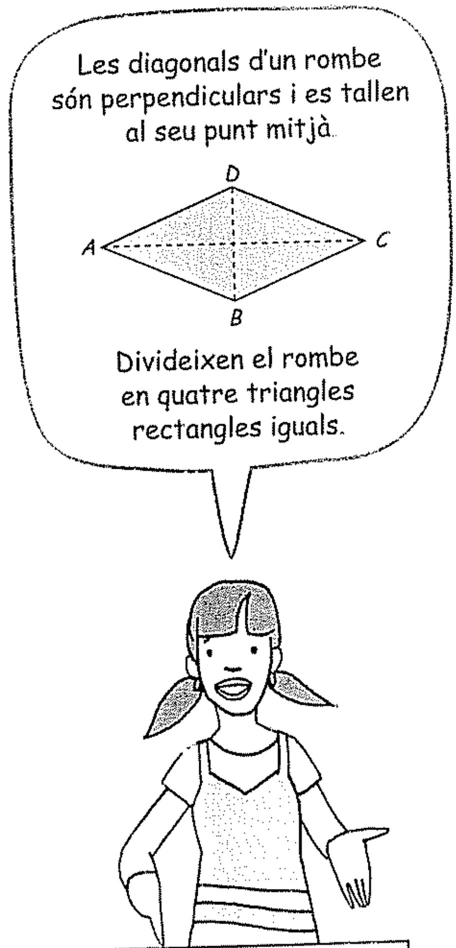
Àrea del rombe



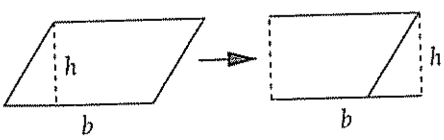
L'àrea d'un rombe amb diagonal menor d i diagonal major D és la meitat de l'àrea d'un rectangle de base d i altura D.

L'**àrea d'un rombe** de diagonal menor d i diagonal major D és:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



Àrea del romboide



L'àrea d'un romboide de base b i altura h és igual a l'àrea d'un rectangle de base b i altura h.

L'**àrea d'un romboide** de base b i altura h és:

$$A = b \cdot h$$

EXERCICIS

PRACTICA

15 Troba l'àrea dels polígons següents:

a) Un rectangle de 5,4 cm d'altura i de 9 cm d'amplada.

b) Un rombe de 5 dm de diagonal major i de 3 cm de diagonal menor.

c) Un romboide de 150 mm de base i de 65 mm d'altura.

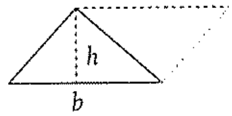
APLICA

16 Calcula l'àrea d'un quadrat de 0,06 m de diagonal.

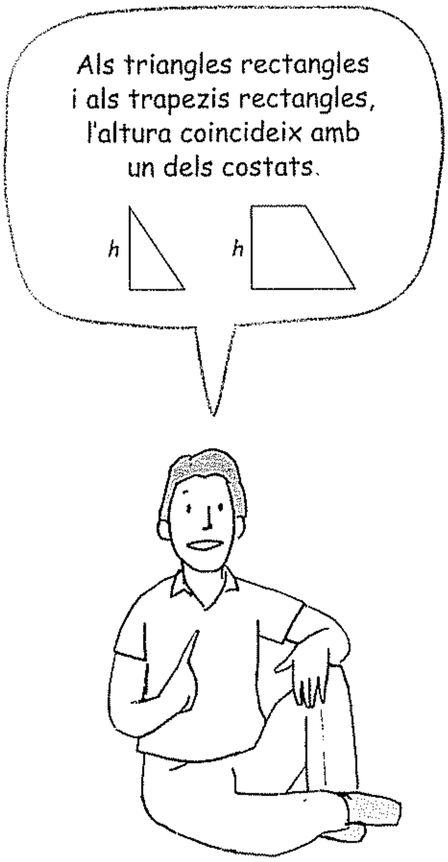
REFLEXIONA

17 Determina l'àrea d'un rombe de 9 cm de costat i amb la diagonal menor de 5 cm.

3.2 Àrea del triangle



L'àrea d'un triangle de base b i altura h és la meitat de l'àrea d'un romboide de base b i altura h



L'**àrea d'un triangle** de base b i altura h és:

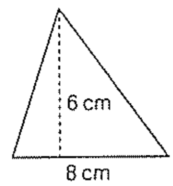
$$A = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

EXEMPLE

7 Calcula l'àrea d'aquest triangle:

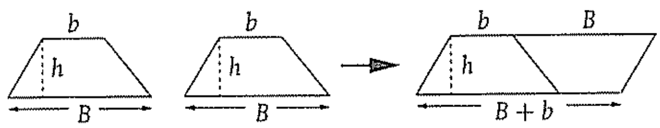
$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

L'àrea del triangle és de 24 cm^2.



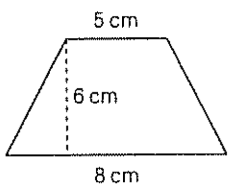
3.3 Àrea del trapezi

Si unim dos trapezis iguals de base major B, base menor b i altura h, obtenim un romboide de base $(B + b)$ i altura h.



L'**àrea d'un trapezi** de base major B, base menor b i altura h és:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



EXEMPLE

8 Determina l'àrea del trapezi que hi ha a l'esquerra:

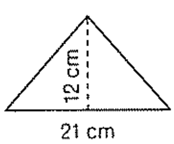
$$A = \frac{(8 + 5) \cdot 6}{2} = 39 \rightarrow \text{L'àrea del trapezi és de 39 cm}^2.$$

EXERCICIS

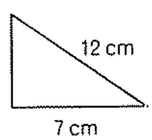
PRACTICA

18 Calcula l'àrea d'aquests polígons:

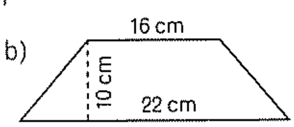
a)



c)



b)

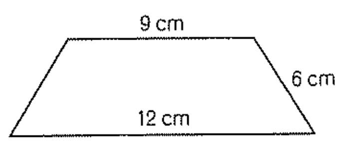


APLICA

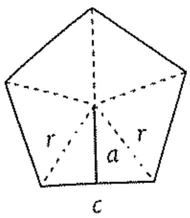
19 Determina l'àrea d'un triangle isòsceles que té els costats iguals de 14 cm i la base de 22 cm.

REFLEXIONA

20 Troba l'àrea d'aquest trapezi:



3.4 Àrea d'un polígon regular



L'àrea d'un **polígon regular** d'apotema a és:

$$A = \frac{\text{Perímetre} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

3.5 Àrea d'una figura plana

Podem calcular l'àrea d'una figura descomponent-la en altres figures amb àrees que sabem calcular

EXEMPLE

9 Calcula l'àrea d'aquesta sala de conferències:

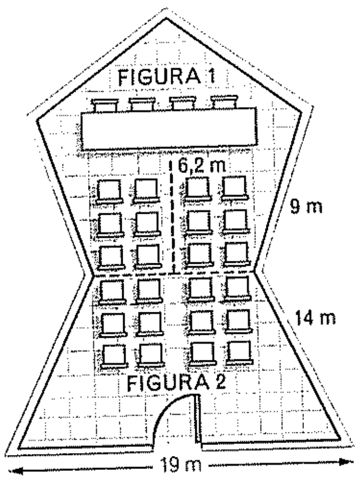


Figura 1

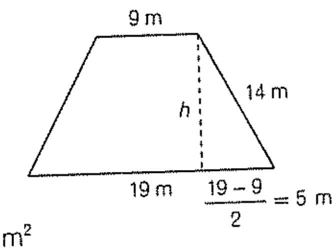
És un pentàgon regular de 9 m de costat i 6,2 m d'apotema

$$A_1 = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 9) \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5 \text{ m}^2$$

Figura 2

És un trapezi isòsceles de 19 m de base major i de 9 m de base menor

Calculem l'altura del trapezi

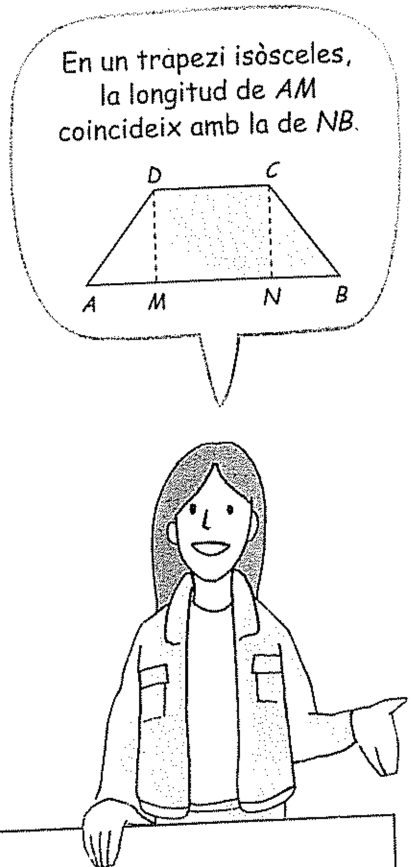


$$14^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = \sqrt{14^2 - 5^2} = 13{,}08 \text{ m}$$

$$A_2 = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(19+9) \cdot 13{,}08}{2} = 183{,}12 \text{ m}^2$$

L'àrea total de la figura serà la suma de l'àrea de totes dues figures:

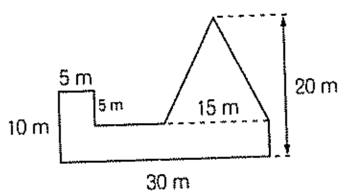
$$A_{\text{Total}} = A_1 + A_2 = 139{,}5 + 183{,}12 = 322{,}62 \text{ m}^2$$



EXERCICIS

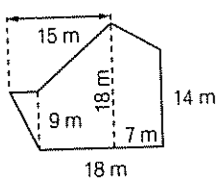
PRACTICA

21 Troba l'àrea d'aquesta figura:



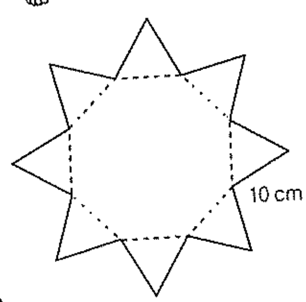
APLICA

22 Calcula l'àrea d'aquesta figura:

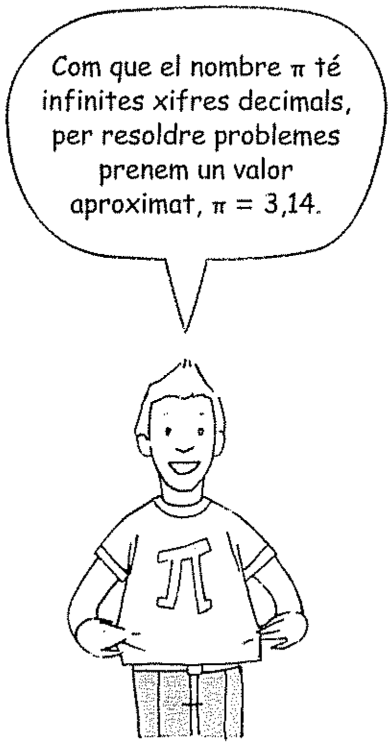


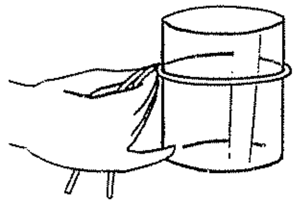
REFLEXIONA

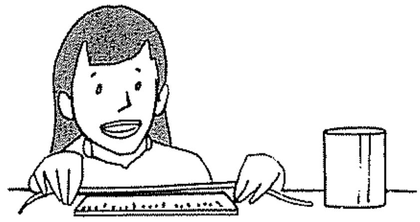
23 Aquesta estrella de 8 puntes s'ha construït afegint a un octàgon regular, de 10 cm de costat, 8 triangles equilàters que tenen els costats iguals que els de l'octàgon. Si l'apotema de l'octàgon és de 12,07 cm, troba l'àrea de l'estrella.



4 Longitud d'una circumferència





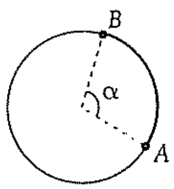


Quan dividim la longitud d'una circumferència entre el diàmetre obtenim sempre el mateix nombre decimal. Aquest nombre el designem amb la lletra grega π, que té les xifres decimals il·limitades. El seu valor és $\pi = 3{,}141592$...

La **longitud d'una circumferència** de radi r és:

$$L = 2\pi r$$

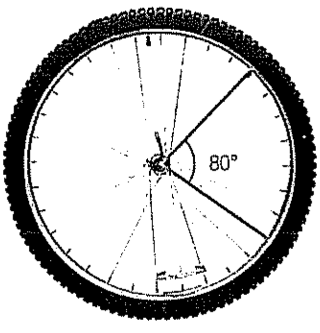
Longitud d'un arc



En una circumferència de radi r, la **longitud d'un arc** de α graus és:

$$L = \frac{2\pi \cdot r \cdot \alpha}{360}$$

EXEMPLE



10 Si la longitud d'una roda de bicicleta és de 216 cm, quina serà la longitud de la part continguda entre dos radis que formen un angle de 80°?

Si considerem que una circumferència completa fa 360°, podem plantejar una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 360° \xrightarrow{\text{mesuren}} 216 \text{ cm} \\ 80° \xrightarrow{\text{mesuraran}} x \text{ cm} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{360}{80} = \frac{216}{x} \rightarrow x = \frac{216 \cdot 80}{360} = 48$$

La longitud de la part de circumferència continguda entre dos radis que formen un angle de 80° (arc de la circumferència de 80°) és de 48 cm

EXERCICIS

PRACTICA

24 Troba la longitud d'una circumferència de:

a) 2,3 cm de radi.
b) 16 cm de diàmetre.

APLICA

25 La longitud d'una circumferència és de 49 cm. Calcula'n el radi.

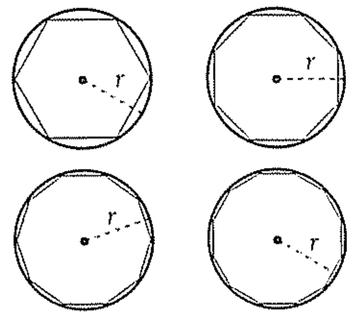
26 Quina longitud d'arc té un angle de 50° en una circumferència de 7,8 cm de radi?

REFLEXIONA

27 En una circumferència, a un angle de 30° correspon un arc de 2 cm. Determina el radi i la longitud de la circumferència.

5 Àrea de figures circulars

5.1 Àrea del cercle

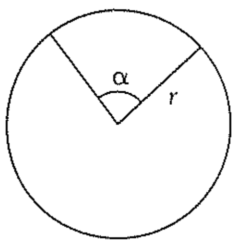


Un cercle podria ser un polígon regular de molts costats, en el qual el perímetre seria la longitud de la circumferència, i l'apotema, el radi. Així doncs:

$$\text{Àrea del cercle} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\text{Longitud} \cdot \text{Radi}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

L'àrea **d'un cercle** de radi r és: $A = \pi r^2$.

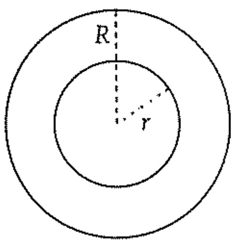
5.2 Àrea del sector circular



Un **sector circular** és la part del cercle continguda entre dos radis i l'arc que defineixen.

L'àrea **d'un sector circular** de radi r i amplitud α és: $A = \dfrac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$

5.3 Àrea de la corona circular



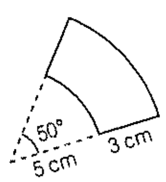
Una **corona circular** és la part continguda entre dues circumferències que tenen el mateix centre. L'àrea l'obtenim restant l'àrea del cercle major menys la del menor.

L'àrea **d'una corona circular** de radis R i r és:

$$A = (\pi R^2) - (\pi r^2) = \pi(R^2 - r^2)$$

EXEMPLE

11 Determina l'àrea de la regió acolorida:



Restem els sectors circulars dels dos cercles:

$A_1 = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 50}{360} = 10{,}9\ \text{cm}^2$ $\qquad A_2 = \dfrac{\pi \cdot 8^2 \cdot 50}{360} = 27{,}91\ \text{cm}^2$

$A = A_2 - A_1 = 27{,}91 - 10{,}9 = 17{,}01\ \text{cm}^2$

EXERCICIS

PRACTICA

28 Determina l'àrea d'un cercle de 18 cm de radi.

29 Troba l'àrea d'un cercle de 25 cm de diàmetre.

30 Calcula l'àrea de la corona circular continguda entre dues circumferències de radi 100 mm i 7 cm.

APLICA

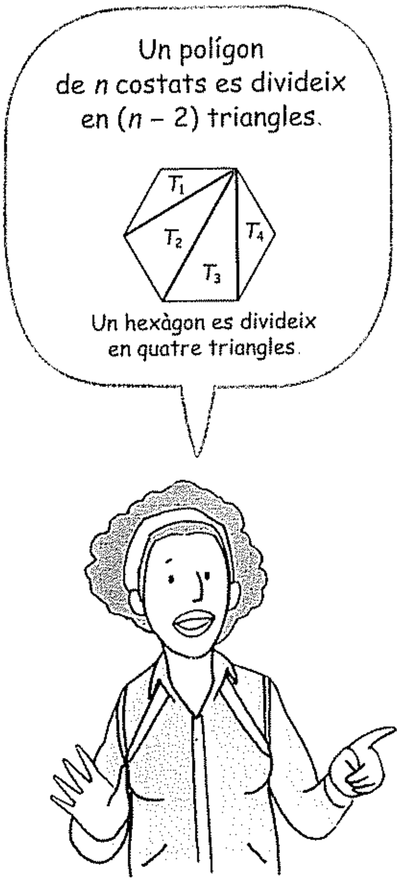
31 Hem dividit un pastís de 14 cm de radi en 4 parts iguals. Calcula l'àrea de cada part.

REFLEXIONA

32 Troba l'àrea d'un cercle inscrit en un quadrat de $\sqrt{50}$ cm de diagonal.

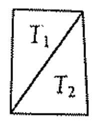
6 Angles en els polígons

6.1 Suma dels angles d'un polígon

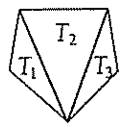


La suma dels angles d'un triangle és de 180°.

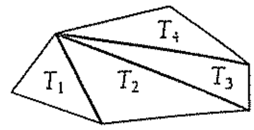
Per calcular la suma dels angles interiors d'un polígon, en dibuixem les diagonals i, així, quedarà dividit en triangles



Suma $= 2 \cdot 180° = 360°$



Suma $= 3 \cdot 180° = 540°$

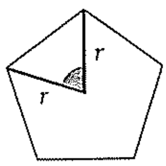


Suma $= 4 \cdot 180° = 720°$

Si un polígon té n costats, la **suma dels seus angles interiors** és $180 \cdot (n - 2)$.

Cada **angle interior** d'un polígon regular fa $\dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$.

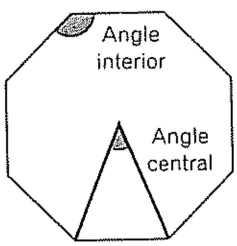
6.2 Angle central d'un polígon regular



L'**angle central** d'un polígon regular és el que formen dos radis consecutius.

L'amplitud de l'angle central d'un polígon regular de n costats és: $\dfrac{360}{n}$.

EXEMPLE



12 Troba la mida d'un angle interior d'un octàgon regular. Calcula també la suma dels angles interiors i la mida de l'angle central.

La suma dels angles interiors d'un octàgon qualsevol és:

$$180 \cdot (n - 2) = 180 \cdot (8 - 2) = 1\,080°$$

Cada angle interior fa: $\dfrac{180 \cdot (n-2)}{n} = \dfrac{1.080}{8} = 135°$

La mida de l'angle central és: $\dfrac{360}{n} = \dfrac{360}{8} = 45°$

EXERCICIS

PRACTICA

33 Calcula la suma dels angles interiors d'un triangle equilàter, d'un quadrat i d'un pentàgon regular.

34 Troba, en un enneàgon regular: la suma dels angles interiors, un angle interior i la mida de l'angle central.

APLICA

35 Calcula el valor de l'angle central i de l'angle interior d'un dodecàgon regular.

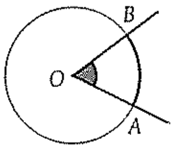
REFLEXIONA

36 Per què en un polígon irregular no podem aplicar la fórmula per trobar l'angle central?

7 Angles en la circumferència

Angle central

És l'angle que té el vèrtex en el centre de la circumferència

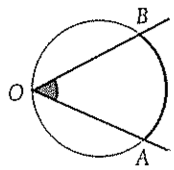


La seva mida és igual que la del seu arc

$$\widehat{AB}$$

Angle inscrit

És el que té el vèrtex en la circumferència i els costats són dues rectes secants

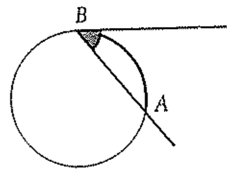


La seva mida és igual a la meitat del seu arc

$$\frac{\widehat{AB}}{2}$$

Angle semiinscrit

És el que té el vèrtex en la circumferència, un dels costats és tangent i l'altre és secant

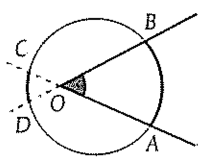


La seva mida és igual a la meitat del seu arc.

$$\frac{\widehat{AB}}{2}$$

Angle interior

És el que té el vèrtex en un punt interior de la circumferència

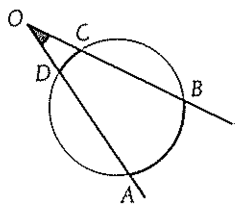


La seva mida és igual a la semisuma dels dos arcs que abasta

$$\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{2}$$

Angle exterior

És el que té el vèrtex en un punt exterior i els costats són secants

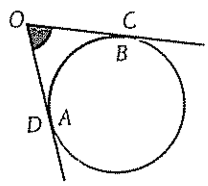


La seva mida és la semidiferència dels dos arcs que abasta

$$\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}$$

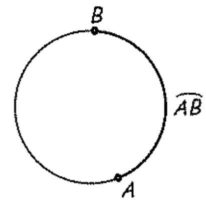
Angle circumscrit

És el que té el vèrtex en un punt exterior i els costats són tangents

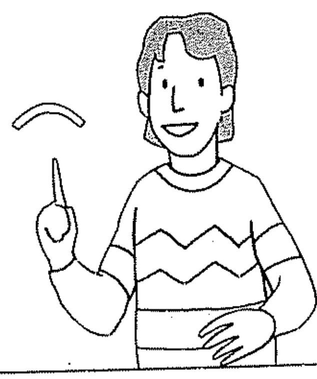


La seva mida és la semidiferència dels dos arcs que abasta

$$\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}$$



Per anomenar un arc prenem els dos extrems i hi afegim el símbol ⌒.



EXERCICIS

PRACTICA

37 Troba l'angle inscrit en una circumferència que abasta un arc de:

a) 40° b) 104° c) 82° d) 148°

38 Calcula l'angle interior d'una circumferència que abasta dos arcs de:

a) 90° i 30° c) 60° i 120°
b) 48° i 72° d) 110° i 30°

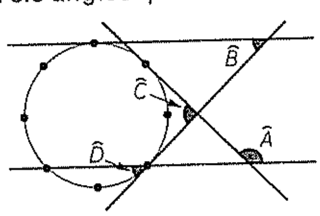
39 Dibuixa una circumferència de 3 cm de radi i marca-hi un diàmetre *AB*. Assenyala un punt *P* de la circumferència i calcula $\widehat{APB}$.

APLICA

40 Representa una circumferència de 3 cm de radi i dibuixa-hi dos angles exteriors. Determina'n la mida amb l'ajuda d'un transportador.

REFLEXIONA

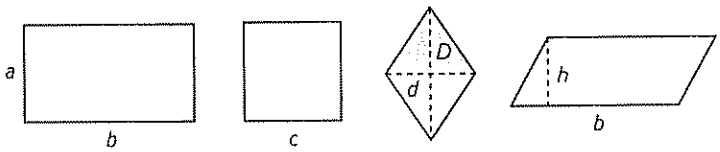
41 Calcula els angles que estan assenyalats:



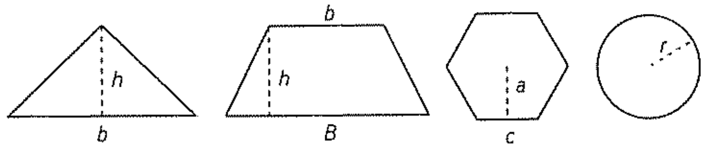
L'essencial

COMPRÈN AQUESTES PARAULES

Àrees

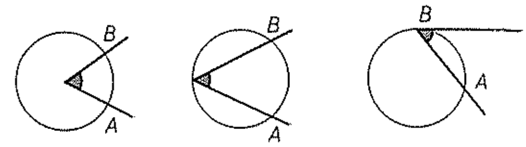


$A = b \cdot a$ $\quad A = c^2$ $\quad A = \dfrac{D \cdot d}{2}$ $\quad A = b \cdot h$

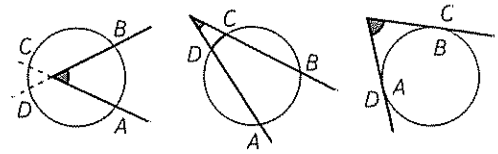


$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ $\quad A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ $\quad A = \dfrac{P \cdot a}{2}$ $\quad A = \pi r^2$

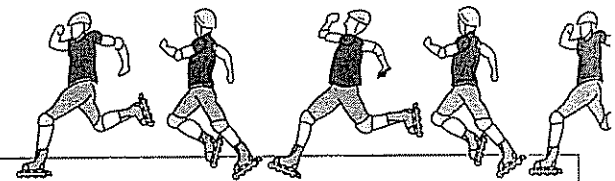
Angles en la circumferència



Angle central — Angle inscrit — Angle semiinscrit



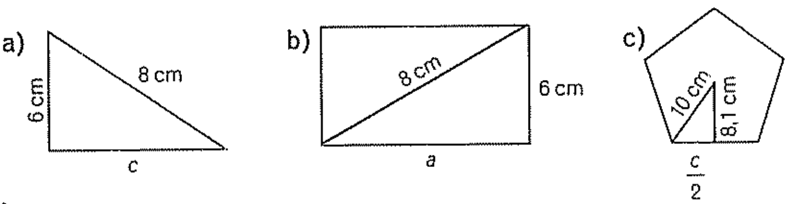
Angle interior — Angle exterior — Angle circumscrit



FES-HO AIXÍ

1. ÚS DEL TEOREMA DE PITÀGORES PER CALCULAR EL COSTAT D'UN POLÍGON

Calcula el costat d'aquests polígons:



PRIMER. Identifiquem el triangle rectangle i les seves mides.

SEGON. Hi apliquem el teorema de Pitàgores.

a) $8^2 = 6^2 + c^2$
$c^2 = 8^2 - 6^2$
$c = \sqrt{28} = 5{,}29$ cm

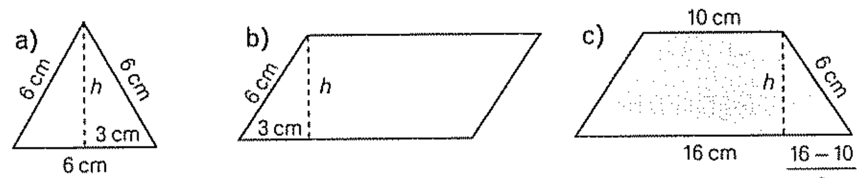
b) $8^2 = 6^2 + a^2$
$a^2 = 8^2 - 6^2$
$a = \sqrt{28} = 5{,}29$ cm

c) $10^2 = (8{,}1)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = 10^2 - (8{,}1)^2$

$\dfrac{c}{2} = \sqrt{34{,}39} = 5{,}86 \rightarrow l = 11{,}72$ cm

2. ÚS DEL TEOREMA DE PITÀGORES PER CALCULAR L'ALTURA D'UN POLÍGON

Determina l'altura d'aquests polígons:



$\dfrac{16 - 10}{2} = 3$ cm

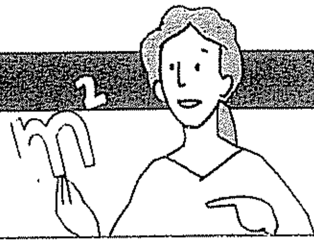
PRIMER. Identifiquem el triangle rectangle i les seves mides.

SEGON. Hi apliquem el teorema de Pitàgores.

a) $6^2 = h^2 + 3^2$
$h^2 = 6^2 - 3^2$
$h = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

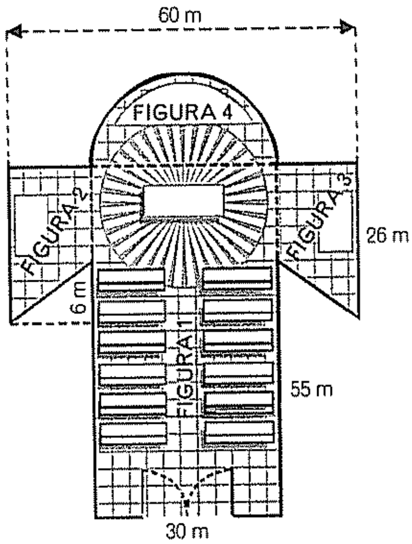
b) $6^2 = h^2 + 3^2$
$h^2 = 6^2 - 3^2$
$h = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm

c) $6^2 = h^2 + 3^2$
$h^2 = 6^2 - 3^2$
$h = \sqrt{27} = 5{,}2$ cm



3. CÀLCUL DE L'ÀREA D'UNA FIGURA PLANA

Troba l'àrea de la planta d'aquest temple:



PRIMER. Descomponem la figura en altres figures de les quals sabem calcular l'àrea.

FIGURA 1 ⟶ Rectangle de 55 m de llargada i 30 m d'amplada.

FIGURES 2 i 3 ⟶ Trapezi rectangle de base major 26 m, base menor: $26 - 6 = 20$ m i altura: $\frac{60-30}{2} = 15$ m.

FIGURA 4 ⟶ Cercle de radi: $\frac{30}{2} = 15$ m.

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{Figura 1}} + 2A_{\text{Figura 2}} + \frac{A_{\text{Figura 4}}}{2}$$

SEGON. Calculem cadascuna de les àrees.

$$A_{\text{Figura 1}} = 30 \cdot 55 = 1.650 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Figura 2}} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(26+20)\cdot 15}{2} = 345 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Figura 4}} = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 706{,}5 \text{ m}^2$$

TERCER. Operem per obtenir l'àrea total.

$$A_{\text{Total}} = A_{\text{Figura 1}} + 2A_{\text{Figura 2}} + \frac{A_{\text{Figura 4}}}{2} = 1.650 + 2 \cdot 345 + \frac{706{,}5}{2} = 2.693{,}25 \text{ m}^2$$

I ARA... PRACTICA

Ús del teorema de Pitàgores per calcular el costat d'un polígon

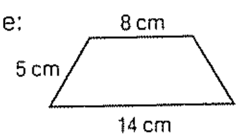
1. La hipotenusa d'un triangle rectangle fa 25 cm, i un dels catets, 15 cm. La longitud de l'altre catet és de:
a) 18 cm b) 20 cm c) 24 cm d) 21 cm

2. El costat d'un quadrat de 6 cm de diagonal és de:
a) 2 cm b) 3,42 cm c) 4,24 cm d) 5 cm

Ús del teorema de Pitàgores per calcular l'altura d'un polígon

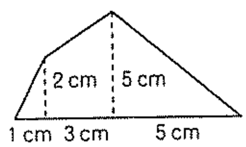
3. L'àrea d'un triangle equilàter de 4 cm de costat és de:
a) 6,92 cm² b) 13,84 cm² c) 15,84 cm²

4. L'àrea d'aquesta figura és de:
a) 40 cm² c) 48 cm²
b) 44 cm² d) 52 cm²



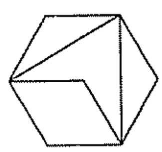
Càlcul de l'àrea d'una figura plana

5. L'àrea de la figura seguent és de:



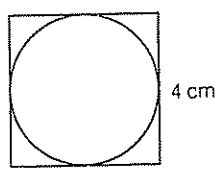
a) 18 m²
b) 19,5 m²
c) 24 m²

6. Si l'àrea total d'aquest hexàgon regular és de 12 cm², l'àrea de la zona acolorida és de:



a) 2 cm² c) 6 cm²
b) 4 cm² d) 8 cm²

7. L'àrea de la zona acolorida és de:
a) 7,72 cm² c) 5,44 cm²
b) 9,72 cm² d) 3,44 cm²



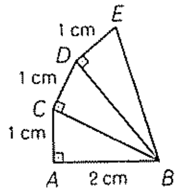
Activitats

TEOREMA DE PITÀGORES

42. ◉ Calcula la hipotenusa dels triangles rectangles amb aquests catets:

a) 10 cm i 8 cm
b) 7,2 cm i 11,6 cm
c) 4 cm i 9 cm
d) $\sqrt{5}$ cm i $\sqrt{8}$ cm

43. ◉ Troba la longitud de $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{BE}$.



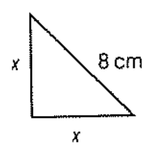
44. ◉◉ Contesta aquestes qüestions i, en cas que siguin certes, posa'n un exemple:

a) Hi pot haver un triangle rectangle equilàter?
b) I un triangle rectangle isòsceles?

FES-HO AIXÍ

COM CALCULEM LA MIDA DELS CATETS D'UN TRIANGLE RECTANGLE ISÒSCELES?

45. Calcula la mida dels catets d'un triangle rectangle isòsceles de 8 cm d'hipotenusa.



PRIMER. Hi apliquem el teorema de Pitàgores, ja que la mida dels catets és la mateixa, x.

$$8^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 8^2 = 2x^2$$

SEGON. Trobem el valor de x.

$$8^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{8^2}{2} = 32 \rightarrow x = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

Els catets fan 5,66 cm.

46. ◉ Troba la mida dels catets en un triangle rectangle isòsceles de 9 cm d'hipotenusa.

47. ◉◉ Els costats del triangle rectangle $\widehat{ABC}$ són $\overline{AB} = 8$ cm i $\overline{AC} = 13$ cm. Calcula $\overline{BC}$ si:

a) L'angle recte és al vèrtex A
b) L'angle recte és al vèrtex B
c) L'angle recte és al vèrtex C

APLICACIONS DEL TEOREMA DE PITÀGORES

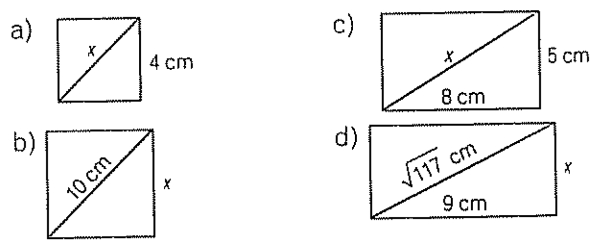
48. ◉ Determina si els triangles següents són rectangles. En cas afirmatiu, indica' la mida de la hipotenusa i dels catets.

a) Triangle de costats 5 cm, 12 cm i 13 cm.
b) Triangle de costats 6 cm, 8 cm i 12 cm.
c) Triangle de costats 5 cm, 6 cm i $\sqrt{61}$ cm.
d) Triangle de costats 7 cm, 24 cm i 25 cm.

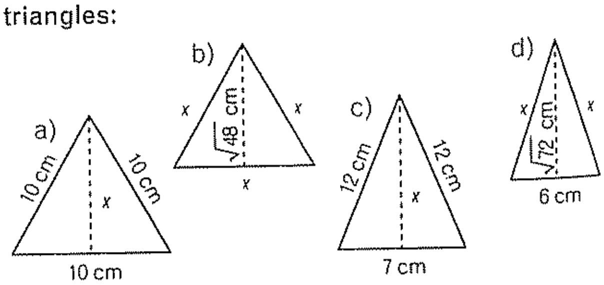
49. ◉ Classifica en acutangles o obtusangles els triangles de costats:

$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CA}$
4	8	6
3	8	7
5	10	8
5	10	9

50. ◉ Calcula la longitud de x en aquestes figures:

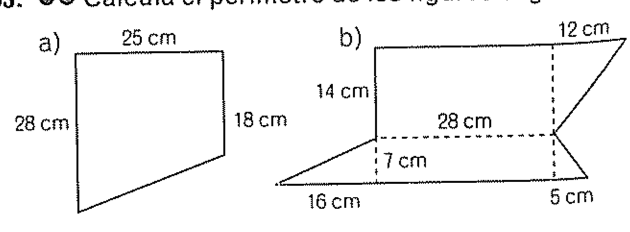


51. ◉◉ Determina la longitud de x en aquests triangles:



52. ◉◉ Troba l'altura d'un triangle equilàter de 48 cm de perímetre.

53. ◉◉ Calcula el perímetre de les figures següents:



54. ● Troba l'apotema d'un hexàgon regular de costat:

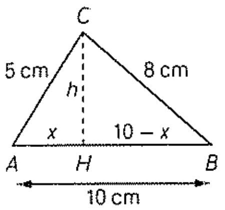
a) 10 cm b) 16 cm c) 7 cm

FES-HO AIXÍ

COM CALCULEM L'ALTURA D'UN TRIANGLE QUALSEVOL SI EN CONEIXEM ELS COSTATS?

55. Calcula l'altura d'un triangle de costats 5 cm, 8 cm i 10 cm.

PRIMER Dibuixem el triangle i n'anomenem tots els elements



L'altura divideix la base del triangle en dues parts:
AH, de longitud *x*.
HB, de longitud 10 − *x*.

SEGON. Apliquem el teorema de Pitàgores als dos triangles rectangles que en resulten

A $\widehat{AHC}$:

$$5^2 = x^2 + h^2 \longrightarrow h^2 = 5^2 - x^2$$

A $\widehat{HBC}$:

$$8^2 = (10 - x)^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

TERCER. Igualem totes dues expressions

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = 5^2 - x^2 \\ h^2 = 8^2 - (10 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$$

$$25 - x^2 = 64 - (100 + x^2 - 20x)$$
$$25 - x^2 = 64 - 100 - x^2 + 20x$$
$$20x = 61 \rightarrow x = 3{,}05 \text{ cm}$$

QUART. Calculem el valor de *h*.

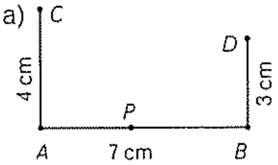
$$h^2 = 5^2 - x^2 \rightarrow h = \sqrt{5^2 - (3{,}05)^2} = 3{,}96 \text{ cm}$$

56. ●● Calcula l'altura d'un triangle de costats:

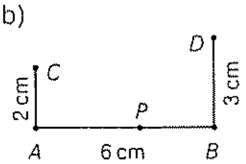
a) $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm i $\overline{CA} = 9$ cm
b) $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm i $\overline{CA} = 14$ cm
c) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 11$ cm i $\overline{CA} = 15$ cm

57. ●●● Troba la distància del punt *P* al punt *A*, perquè es verifiqui que: $\overline{CP} = \overline{DP}$.

a)



b)



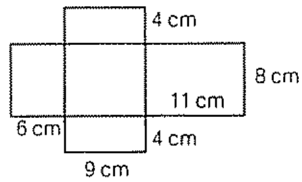
ÀREA DE POLÍGONS

58. ● Calcula l'àrea d'un rectangle de 10 cm base i de $\sqrt{116}$ cm de diagonal.

59. ● Determina l'àrea d'un rectangle de 7 cm de base i de 24 cm de perímetre.

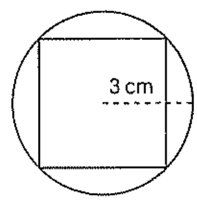
60. ● Troba l'àrea d'un quadrat que fa 22,4 cm de perímetre.

61. ●● Calcula l'àrea de la zona acolorida:



62. ●● Troba el costat d'un quadrat si saps que l'àrea és de 84,64 cm^2.

63. ●● Determina l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de 3 cm de radi.



64. ●● Si *a* és el costat d'un quadrat, indica si les afirmacions següents són verdaderes o falses, i raona les respostes.

a) La diagonal fa $\sqrt{2}a^2$
b) El perímetre és $4a^2$
c) L'àrea és a^4.
d) El quadrat de la diagonal és $2a^2$.

65. ●● Determina la mida de la diagonal d'un quadrat de 12,25 cm^2.

66. ●●● Troba un rectangle que tingui la mateixa àrea que un quadrat de 4 cm de costat. Raona quants rectangles compleixen aquesta condició.

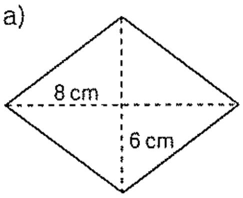
67. ● Calcula l'àrea d'un rombe que té aquestes diagonals:

a) 4 cm i 12 cm b) 3 cm i 9 cm

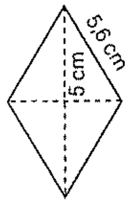
68. ●● Calcula la mida d'una de les diagonals d'un rombe de 30,1 cm^2 d'àrea, si saps que l'altra diagonal fa 7 cm.

69. ◉◉ Troba el perímetre i l'àrea d'aquests rombes:

a)

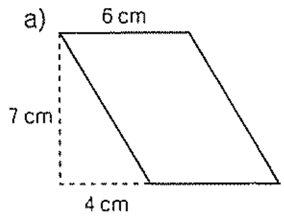


b)

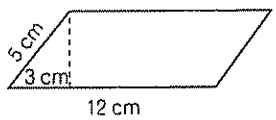


70. ◉◉ Calcula l'àrea i el perímetre d'aquestes figures:

a)

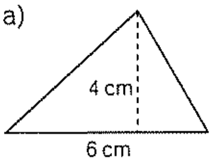


b)

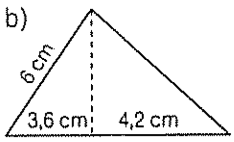


71. ◉ Troba l'àrea dels triangles següents:

a)



b)



72. ◉ Determina l'àrea d'un triangle equilàter amb aquest perímetre:

a) 36 cm b) 6 dm c) 0,153 m

73. ◉ Troba l'àrea d'un triangle isòsceles de 7 cm els costats iguals i 9 cm el costat desigual.

74. ◉◉ Calcula l'àrea d'un triangle isòsceles que té els costats iguals de 10 cm i el costat desigual fa quatre unitats més que els costats iguals.

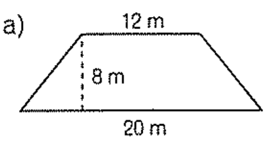
75. ◉◉ Calcula l'altura i la base d'un triangle rectangle isòsceles si l'àrea fa:

a) 200 cm^2 c) 450 dm^2

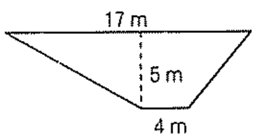
b) 120,125 m^2 d) 317,52 mm^2

76. ◉◉ Troba l'àrea dels trapezis següents:

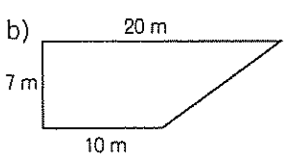
a)



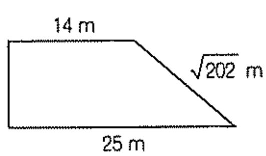
d)



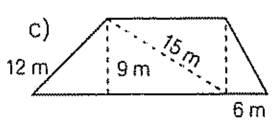
b)



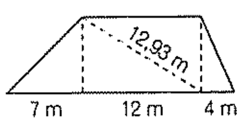
e)



c)



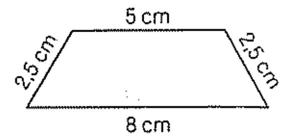
f)



FES-HO AIXÍ

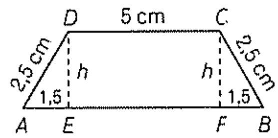
COM CALCULEM L'ÀREA D'UN TRAPEZI ISÒSCELES SI EN DESCONEIXEM L'ALTURA?

77. Calcula l'àrea d'aquest trapezi isòsceles:



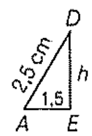
PRIMER. Calculem la base del triangle rectangle que determina l'altura.

Com que és un trapezi isòsceles, les altures configuren dos triangles rectangles iguals, les bases dels quals fan la meitat de la diferència de les bases del trapezi.



$$\overline{AE} = \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{8-5}{2} = 1{,}5\text{ cm}$$

SEGON. Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle que determina l'altura.



$(1{,}5)^2 + h^2 = (2{,}5)^2$

$h^2 = (2{,}5)^2 - (1{,}5)^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$

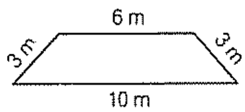
$h = \sqrt{4} = 2\text{ cm}$

TERCER. Calculem l'àrea del trapezi.

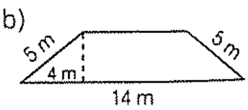
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(8+5)\cdot 2}{2} = 13\text{ cm}^2$$

78. ◉◉ Troba l'àrea d'aquests trapezis isòsceles:

a)

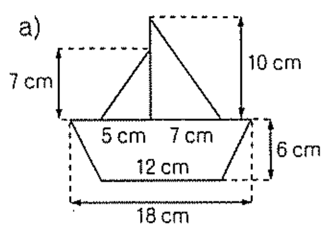


b)

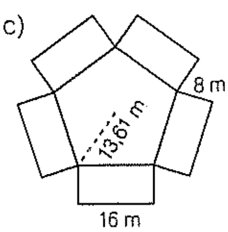


79. ◉◉ Calcula l'àrea de les figures següents:

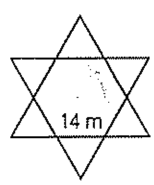
a)



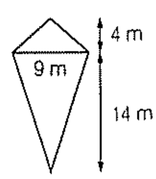
c)



b)



d)

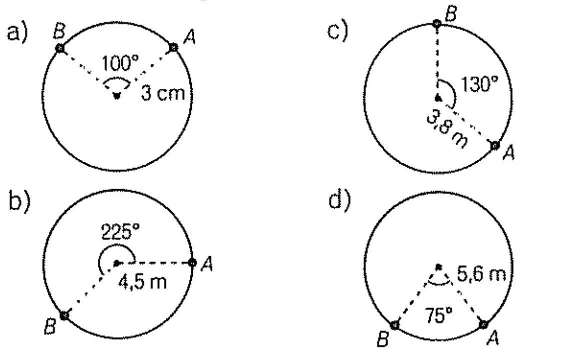


LONGITUD DE LA CIRCUMFERÈNCIA

80. ◉ Completa la taula següent amb les dades que hi falten:

Radi	Diàmetre	Longitud de la circumferència
2 cm		
	7 cm	
		29,516 cm
	10 cm	
6,3 cm		
		48,984 cm

81. ◉ Calcula la longitud de l'arc marcat en vermell:



82. ◉◉ Quin és el diàmetre d'una circumferència de 50,24 cm de longitud?

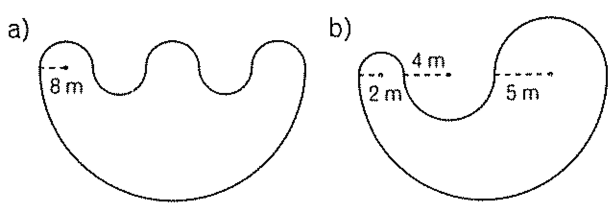
83. ◉◉ Troba el diàmetre d'una circumferència si saps que la longitud d'un arc de 50° és de 5,23 cm.

84. ◉◉ Quina és la longitud d'una circumferència amb un arc de 110° que té 57,57 cm de longitud?

85. ◉◉ Completa la taula:

Longitud d'arc de 60°	Longitud d'arc de 85°	Longitud d'arc de 190°	Longitud de la circumferència
9,42 cm			
	17,79 cm		
		13,26 cm	

86. ◉◉ Determina el perímetre d'aquestes figures:



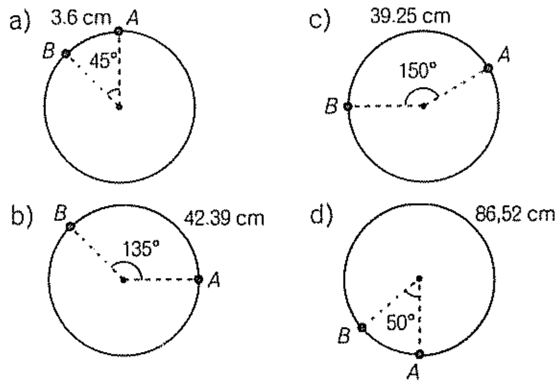
ÀREA DE FIGURES CIRCULARS

87. ◉ Calcula l'àrea d'un cercle de:

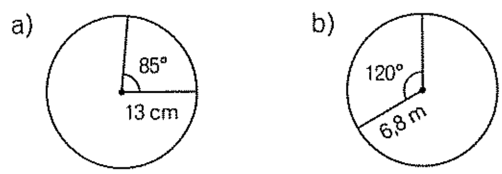
a) 6 cm de radi
b) 6 cm de diàmetre
c) 7,2 cm de radi

88. ◉ Troba l'àrea d'un cercle delimitat per una circumferència de 321,4 cm.

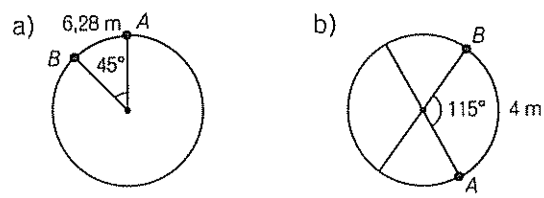
89. ◉◉ Calcula l'àrea dels cercles amb aquestes longituds d'arc:



90. ◉ Troba l'àrea d'aquests sectors circulars:

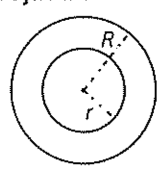


91. ◉◉ Determina l'àrea dels sectors acolorits:

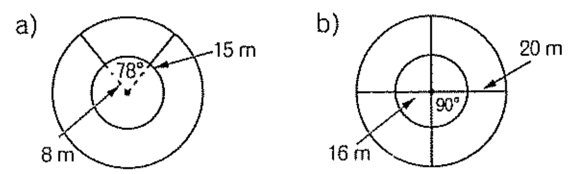


92. ◉◉ Troba l'àrea de la zona ombrejada si:

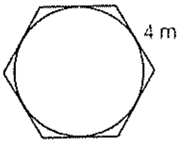
a) $R = 10$ m i $r = 6$ m
b) $R = 12{,}6$ cm i $r = 5$ cm
c) $R = 3r$ i $r = 2{,}4$ cm
d) $R + r = 31$ m i $R - r = 5$ m

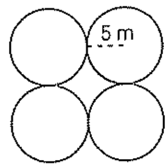


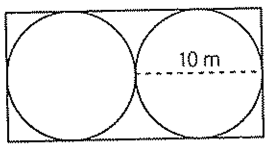
93. ◉◉ Calcula l'àrea acolorida d'aquestes figures:

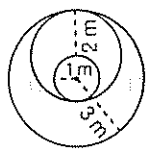


94. ●●● Determina l'àrea de la zona acolorida:

a) 

c) 

b) 

d) 

ANGLES EN POLÍGONS I CIRCUMFERÈNCIES

95. ● Considera que els polígons són regulars i completa la taula:

Nre. de costats	3	4	5	6	7
Suma d'angles		360°			
Angle interior		$\frac{360°}{4} = 90°$			

a) Quin és el polígon amb l'angle més petit?

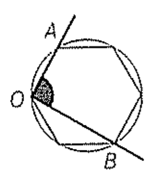
b) I el que té l'angle més gran?

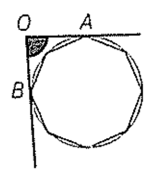
96. ●● Calcula la suma dels angles d'un polígon de 3, 4, 5 i 6 costats.

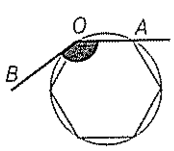
a) Quina diferència hi ha entre la suma de cada polígon i la del polígon amb un costat menys?

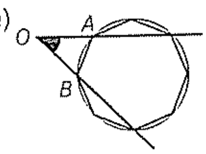
b) Si la suma dels angles d'un polígon de 15 costats és de 2 340°, quina serà la suma d'un de 16 costats?

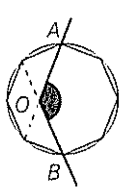
97. ● Calcula el valor dels angles marcats:

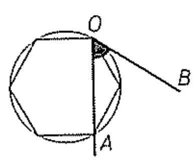
a) 

d) 

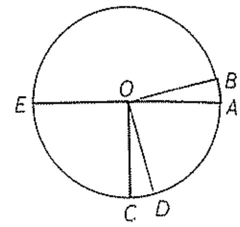
b) 

e) 

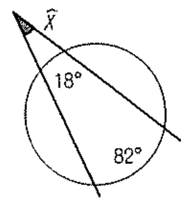
c) 

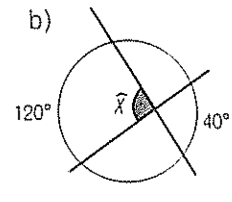
f) 

98. ●● Si l'arc $\widehat{AB} = 15° 20'$, calcula el valor dels arcs $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{AD}$ i $\widehat{BE}$.



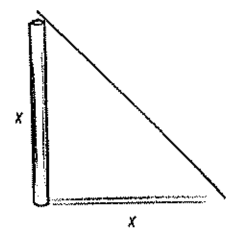
99. ●● Calcula el valor l'angle $\widehat{X}$.

a) 

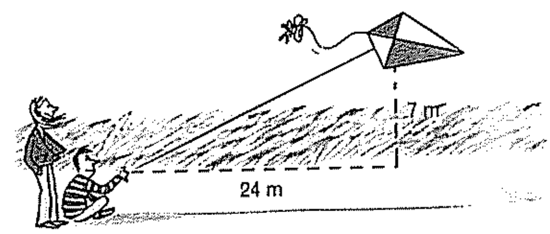
b) 

PROBLEMES D'ÀREES

100. ●● L'ombra que produeix una barreta vertical en un instant determinat és igual a la seva longitud. Quin triangle determinen la barreta i la seva ombra? Quina és la inclinació dels raigs solars?

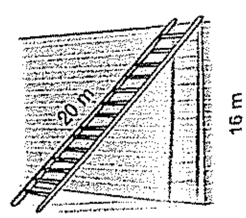


101. ●● Calcula la longitud del cable de l'estel.



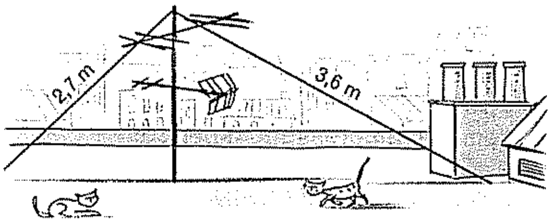
102. ●● Quina és la longitud màxima que en Joan pot nedar en una piscina que fa 17 m de llargada i 10 m d'amplada si tan sols ho pot fer en línia recta?

103. ●● Sobre una paret vertical de 16 m d'altura col·loquen inclinada una escala de 20 m de longitud. A quina distància de la paret es troba la base de l'escala?



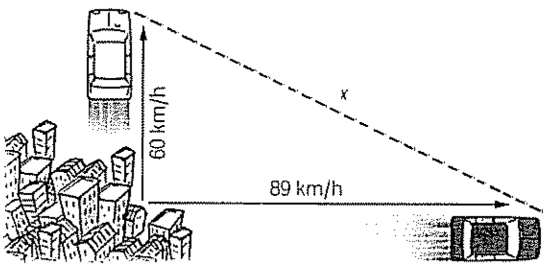
104. ●● Una escala fa 2,5 m de longitud i, si la recolzem a la paret, la base queda a 0,7 m de l'escala. A quina altura de la paret arriba l'escala?

105. ◉◉ Una antena està agafada al terra per dos cables de 2,7 m i 3,6 m que formen un angle recte. Quina és la distància que separa els dos punts d'unió dels cables amb el terra?



106. ◉◉ L'Anna té un jardí rectangular, de 500 m de llargada i 300 m d'amplada, i hi vol fer una piscina de forma circular de 100 m de radi. Quant terreny li queda per plantar-hi gespa?

107. ◉◉◉ Dos cotxes surten d'una ciutat alhora i en direccions perpendiculars. El primer va a 60 km/h, i el segon a 89 km/h. Quina distància els separa després d'1 hora i quart?

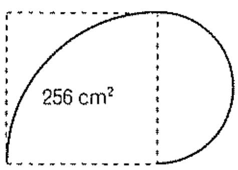


108. ◉◉◉ Dos avions s'enlairen d'un aeroport al mateix temps i amb direccions perpendiculars. El primer va a una velocitat de 600 km/h, i el segon, de 800 km/h.

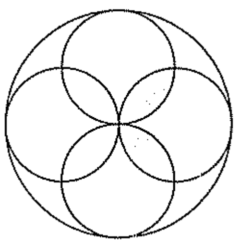
a) Quina distància els separa al cap de 2 hores?

b) Si l'abast de la seva ràdio és de 500 km, es podran posar en contacte després de mitja hora?

109. ◉◉◉ Un dels guarniments de metall d'una reixa té aquesta forma. Calcula la longitud del guarniment si saps que l'àrea del quadrat és de 256 cm².



110. ◉◉◉ Si saps que s'han fet servir 400 cm² de cristall verd, calcula quants cm² de cristall blau calen per construir aquest vitrall.



INVESTIGA

111. ◉◉◉ Si dos polígons tenen la mateixa àrea, poden tenir perímetres diferents?

112. ◉◉◉ La fórmula per calcular l'àrea d'un polígon regular és: $A = \dfrac{\text{Perímetre} \cdot \text{Apotema}}{2}$.

Comprova que, aplicant aquesta fórmula al triangle equilàter i al quadrat, obtenim les fórmules de l'àrea d'un triangle: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ i d'un quadrat: $A = c^2$.

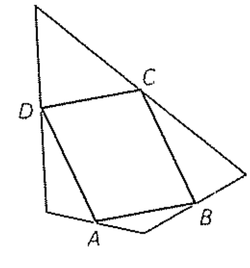
113. ◉◉◉ PITÀGORES I ELS BABILONIS. Pitàgores va viatjar probablement a Egipte i a Babilònia, i se suposa que allí ja coneixien la relació entre els costats dels triangles rectangles. L'any 1920, a la ciutat de Larsa, es va trobar una tauleta que va anar a parar a les mans de l'editor americà George Arthur Plimpton. Quan va morir, es va donar a la Universitat de Columbia, on se li va atorgar el número 322 del catàleg, per això rep el nom de Plimpton 322. En aquesta tauleta i en nombres en base 60 (no decimal) apareixen diferents columnes amb els nombres p i q que generen les ternes pitagòriques. Donats dos nombres enters qualssevol p i q, la terna formada pels nombres $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ i $c = p^2 + q^2$ ens donen una terna pitagòrica. Per exemple, si $p = 1$ i $q = 2$, llavors obtenim la terna $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$, que és la primera terna pitagòrica: $3^2 + 4^2 = 5^2$

Esbrina els valors de les ternes formades per altres nombres trobats a la tauleta:

a) $p = 12$ i $q = 5$ b) $p = 9$ i $q = 5$ c) $p = 15$ i $q = 8$

Comprova que són ternes pitagòriques.

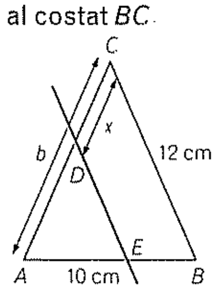
114. ◉◉◉ En un quadrilàter qualsevol, assenyala els punts mitjans dels costats i uneix-los de dos en dos. Quina figura es forma? Investiga si es compleix sempre.



115. ◉◉◉ La recta DE és paral·lela al costat BC.

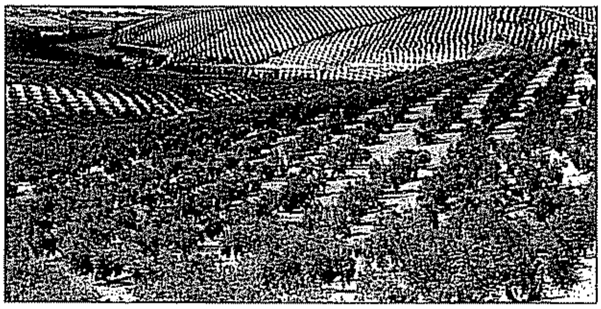
a) Troba les mides dels segments BE i DE en funció de b i x

b) Determina b i x perquè $\overline{DE} = \overline{BE} + \overline{CD}$ i $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \dfrac{5}{11}$

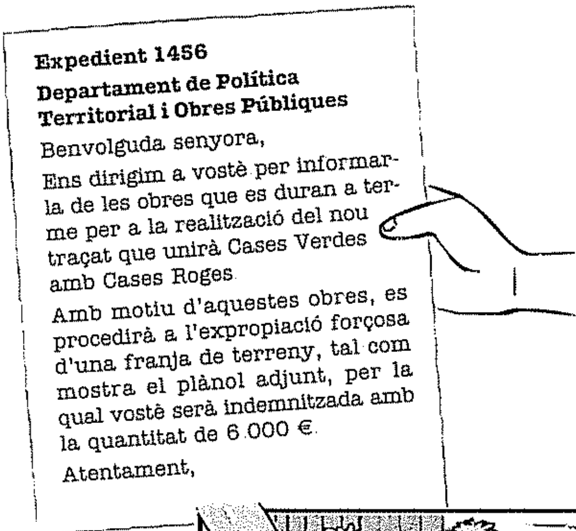


A la vida quotidiana

116. ●●● Estan dissenyant un nou traçat per a la carretera que uneix Cases Verdes amb Cases Roges, però aquest traçat passarà pels oliverars, amb la qual cosa moltes famílies quedaran afectades.



La família de la Sara, igual que altres famílies del poble, ja han rebut la notificació.



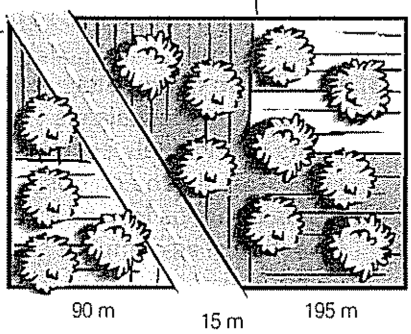
Expedient 1456
Departament de Política Territorial i Obres Públiques

Benvolguda senyora,

Ens dirigim a vostè per informar-la de les obres que es duran a terme per a la realització del nou traçat que unirà Cases Verdes amb Cases Roges.

Amb motiu d'aquestes obres, es procedirà a l'expropiació forçosa d'una franja de terreny, tal com mostra el plànol adjunt, per la qual vostè serà indemnitzada amb la quantitat de 6.000 €.

Atentament,

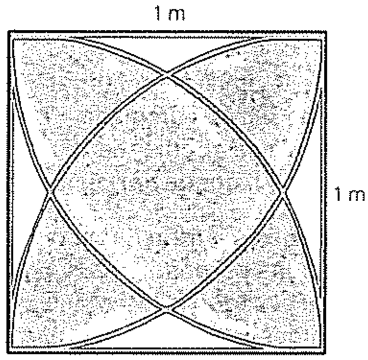


Segons les escriptures, el terreny té una superfície de 6 hectàrees, i l'advocat que han consultat els ha dit que mitjançant una reclamació poden rebre fins a 20 € per cada metre quadrat expropiat.

Quant els en paguen per cada metre quadrat expropiat? Quant en podrien obtenir si reclamessin judicialment?

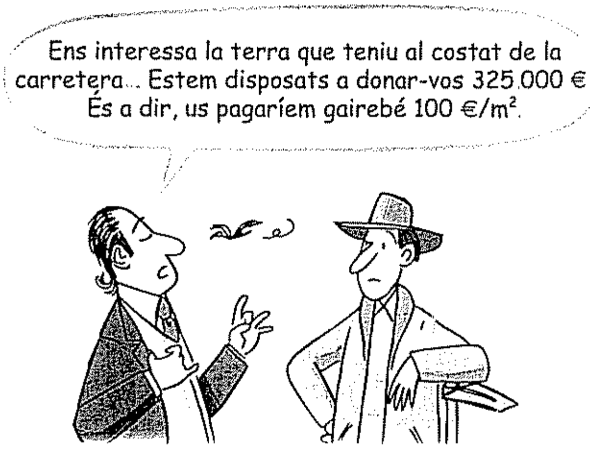
117. ●●● L'Antoni és un artesà especialitzat en la fabricació de vitralls. La feina que fa és complicada perquè els vitralls solen tenir formes geomètriques, i cal prendre les mides amb precisió perquè no hi hagi errors a l'hora d'unir les peces.

En l'últim encàrrec que ha rebut, li han demanat un pressupost per a 25 vitralls d'aquesta forma:



Si el cristall de colors costa 5,25 €/m² i el blanc 3,20 €/m², quin serà el pressupost per fabricar 25 vitralls?

118. ●●● L'ajuntament ha declarat urbanitzable un dels terrenys en què en Josep ha sembrat cereals. Abans d'assabentar-se de la notícia, ja havia rebut un oferta d'una empresa constructora.



En Josep ha buscat els plànols del terreny per comprovar si és veritat el que li diuen.

És veritat el que afirma el constructor? Li pagarien 100 €/m²?