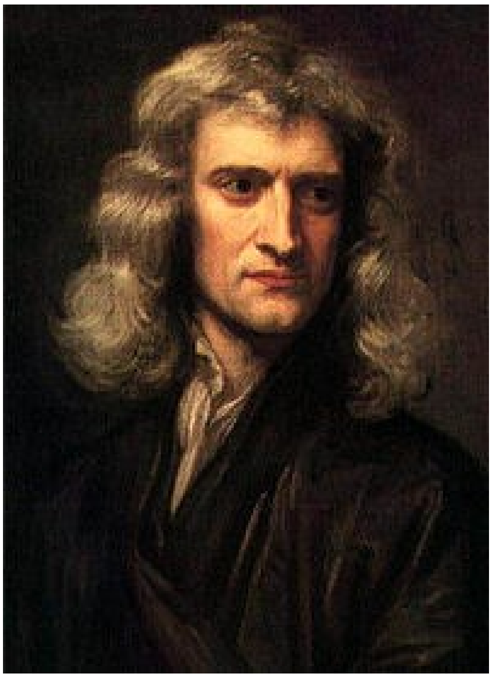
ANÀLISI

Sir Isaac Newton (left) and Gottfried Wilhelm von Leibniz (right)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Leibniz creia que gran part del procés de raonament humà es pot reduir a una espècie de càlcul, i que aquests càlculs podrien resoldre moltes diferències d'opinió:

"L'única manera de rectificar els nostres raonaments és que siguin tan tangibles com els dels matemàtics, de manera que puguem trobar el nostre error d'un cop d'ull, i quan hi ha conflictes entre les persones, podem simplement dir: Anem a calcular, sense més preàmbuls, a veure qui té raó."



Isaac Newton (1643 - 1727)

Newton va escriure sobre la seva vida:

"No sé com em deu veure el món, però al meu entendre, em sembla que he estat només com un nen que juga a la vora del mar, i que es diverteix buscant de tant en tant una pedra més polida i una conquilla més bonica del normal, mentre que el gran oceà de la veritat s'exposava davant meu completament desconegut."

Newton va ser respectat durant tota la seva vida com cap altre científic, i prova d'això van ser els diversos càrrecs amb que se'l va honorar. La gran obra de Newton culminava la revolució científica iniciada per Nicolau Copèrnic (1473-1543) i inaugurava un període de confiança sense límits en la raó, extensible a tots els camps del coneixement.

CONSIDERACIONS GENERALS D'UNA FUNCIÓ

ESTUDI GRÀFIC DE FUNCIONS

FUNCIÓ

Quan s'estudien fenòmens naturals, experiments de laboratori, fenòmens socials físics, etc. acostumen a aparèixer relacions entre conjunts numèrics.

Exemple:

-La distància que recorre un cotxe a velocitat constant està en relació amb el temps.

-L'edat i l'alçada de les persones.

- El pes de la fruita i el preu

-El número de sabates i el pes de les persones.

-El número de butlletes venudes i els diners recollits.

-La mida del costat d'un quadrat i la seva superfície.

-La mida del costat d'un quadrat i el seu perímetre.

Moltes d'aquestes relacions numèriques són funcions. Quines d'aquestes creus que ho són? Posa altres exemples de relacions funcionals.

Funció:

És aquella relació que s'estableix entre dos conjunts numèrics, de manera que a cada valor de x d'un d'ells se li fa correspondre com a màxim un únic valor y de l'altre conjunt numèric.

La seva notació és:

$f: A \rightarrow B$

$x \rightarrow y = f(x)$

El conjunt A s'anomena conjunt origen i "x" variable independent.

El conjunt B s'anomena conjunt imatge i "y" variable dependent.

Si f: Z ➔R la funció s'anomena real de variable entera.

Si F: R➔R la funció s'anomena real de variable real.

Exemple:

$f(x)=3x$

En algunes funcions pot passar que:

- Alguns valors de x no tinguin imatge: $y = 1/x$ x=0 no té imatge.

-Alguns valors de y no tenen origen: $y=x^2 -4$ y = -7 no té antiimatge.

- Alguns valors y tenen més d'una antiimatge: $y=x^2 -4$ y=0 té dos antiimatges x=-2 i x= 2

IMPORTANT

Perquè sigui funció qualsevol x només pot tenir una única imatge.

Una funció pot quedar definida per una d'aquestes tres opcions:

-L'expressió analítica o fórmula: $y = 3x$

-La taula on trobem els valors més representatius de la funció:

x	y=3x
0	1
1	3

-El gràfic de la funció que està format pel conjunt de punts: $\{(x,y)/\ y=f(x)\}$

Normalment partim de l'expressió analítica, construïm la taula i amb ella la gràfica.

Domini d'una funció:

El conjunt de tots els valors de la variable independent x que tenen imatge s'anomena domini.

D= {x de R/ existeix f(x)}

Que cal tenir en compte per determinar el domini d'una funció:

1- La impossibilitat de fer alguna operació:

-Funcions racionals: hem de mirar els valors que anul·len els denominadors

Exemple: Donada la funció $y = \frac{1}{x-3}$, x=3 fa 0 el denominador per tant podem dir que x = 3 no té imatge aleshores diem que el domini d'aquesta funció és:

D= R - {3}

-Funcions irracionals d'índex parell: hem de mirar els valors de la x que fan negatiu el radicand:

Exemple: Donada la funció $y=\sqrt{x-1}$ veiem que els valors menors que 1 no pertanyen al domini perquè fan negatiu el radicand. Per tant podem dir que el domini d'aquesta funció és: D= $[1, \infty)$

-Funcions polinòmiques: el domini són tots els reals.

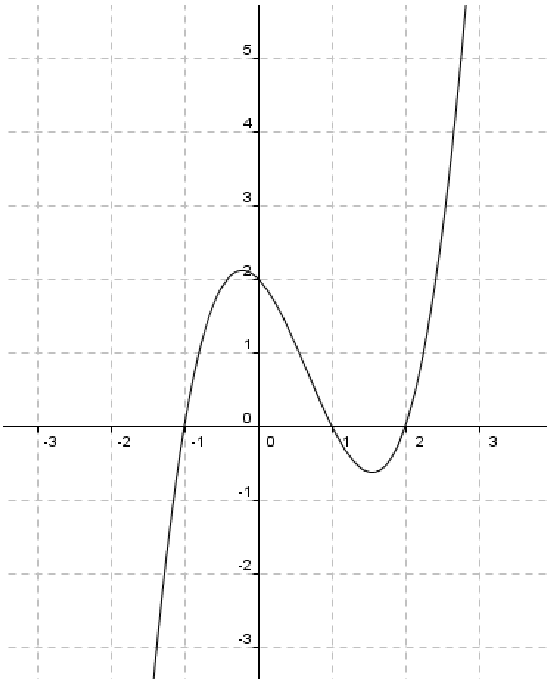
2- El context del qual s'extreu la funció:

-L'àrea d'un quadrat en funció de la longitud del costat és: $A=l^2$ però la funció només està definida per costats positius. D = $(0,\infty)$

3- Les restriccions a les quals està sotmesa la funció:
Exemples:
$y=2x^2$ quan $0 \le x \le 7$

$y = 1/x$ quan $x \in [3,5]$

Exemple gràfic:

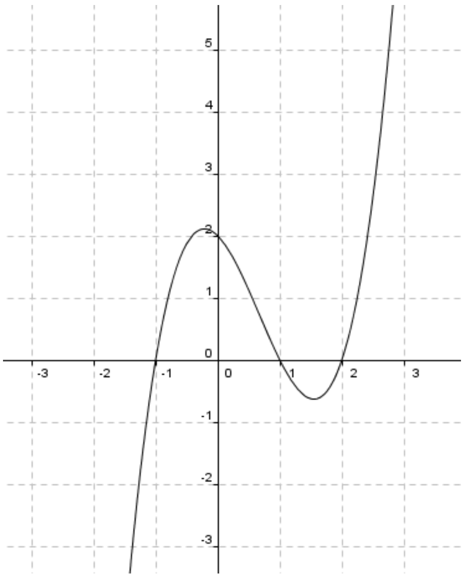


El Domini són tots els reals

Recorregut:

És el conjunt de totes les imatges.

Exemple:



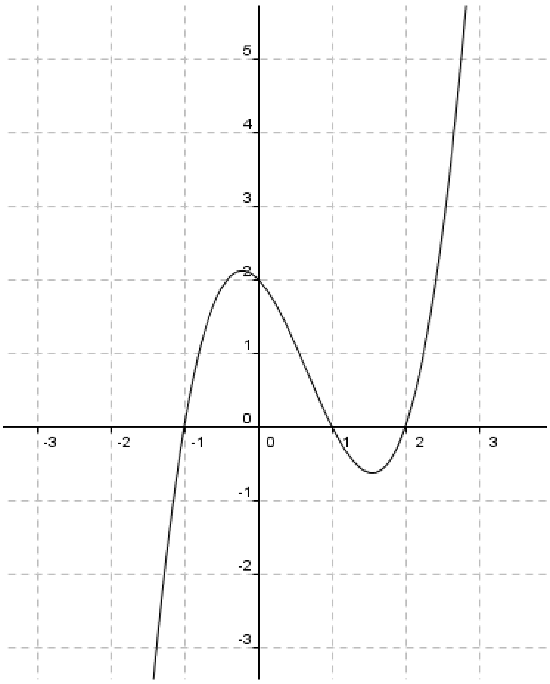
El recorregut són tos els reals.

Punts d'intersecció amb els eixos:

1- Amb l'eix OX . Donem el valor y=0 i trobem els valors de x. Pot haver més d'un valor o pot no haver-ne cap.

2- Amb l'eix OY. Donem el valor x=0 i trobem els valors de y. Com a molt pot haver-hi un punt que talli a l'eix de les OY. Hi ha funcions que no tallen l'eix OY.

Exemple:



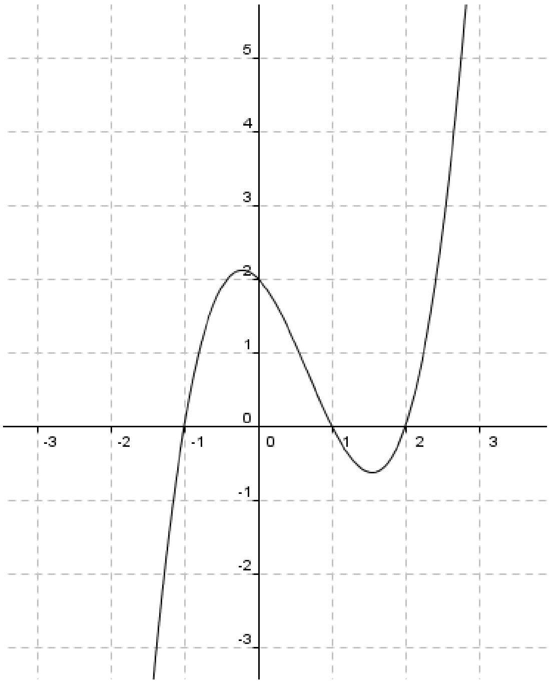
Amb l'eix OX : els punts (-1,0), (1,0) i (2,0)

Amb l'eix OY: el punt (0,2)

Intervals de signe constant:

És el conjunt de tots els valors de la variable x pels quals la funció té el mateix signe o bé és positiva per tots ells o bé és negativa.

Exemple:



Positius: (-1,1) i (2, +∞). Per qualsevol valor x d'aquests intervals f(x) >0

Negatius: (-∞, -1) i (1,2) Per qualsevol valor de x d'aquests intervals f(x)<0

Creixement i decreixement. màxims i mínims:

Una funció és creixent en un punt x=a si per qualsevol x<a i que està molt pròxim a a, acompleix que : f(x)<f(a) i per qualsevol x>a i que està molt pròxim a a, acompleix que f(x)>f(a).

Una funció és creixent en un interval si ho és en tots els seus punts.

Una funció és decreixent en un punt x=a si per qualsevol x<a i que està molt pròxim a a acompleix que : f(x)>f(a) i per qualsevol x>a i que està molt pròxim a a acompleix que f(x)<f(a).

Una funció és decreixent en un interval si ho és en tots els seus punts.

En un punt x= a hi ha un màxim relatiu si la funció és creixent abans i decreixent després.

En un punt x=a hi ha un mínim relatiu si la funció és decreixent abans i creixent després.

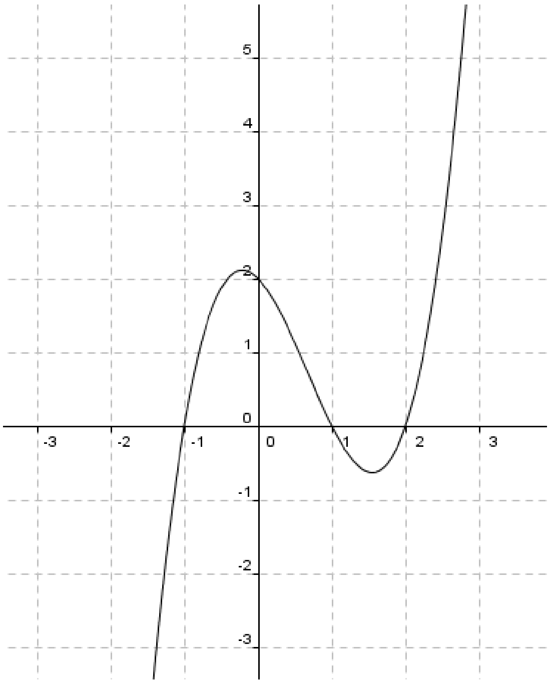
Màxim absolut: És el valor més gran que pren la funció en tot el seu domini.

Mínim absolut: És el valor més petit que pren la funció en tot el seu domini.

De vegades el màxim absolut coincideix amb algun màxim relatiu però altres vegades no. De la mateixa manera de vegades el mínim absolut coincideix amb algun mínim relatiu però no ho fa altres vegades. El màxim absolut i el mínim absolut poden coincidir de vegades amb els extrems del interval que correspon al domini de la funció (el domini és un interval no és tots els nombres reals).

També pot passar que la funció no tingui màxim absolut perquè aquest s'assoliria a l'infinit. De la mateixa manera de vegades pot passar que no tingui mínim absolut perquè aquest s'assoleix al menys infinit.

Exemple:



Màxim relatiu: (-0.22, 2.11)

Mínim relatiu: (1.54, -0.63)

No hi ha màxim absolut

No hi ha mínim absolut

Intervals de creixement: $(-\infty , -0.22) \cup (1.54 , +\infty)$

Intervals de decreixement: (-0.22 , 1.54)

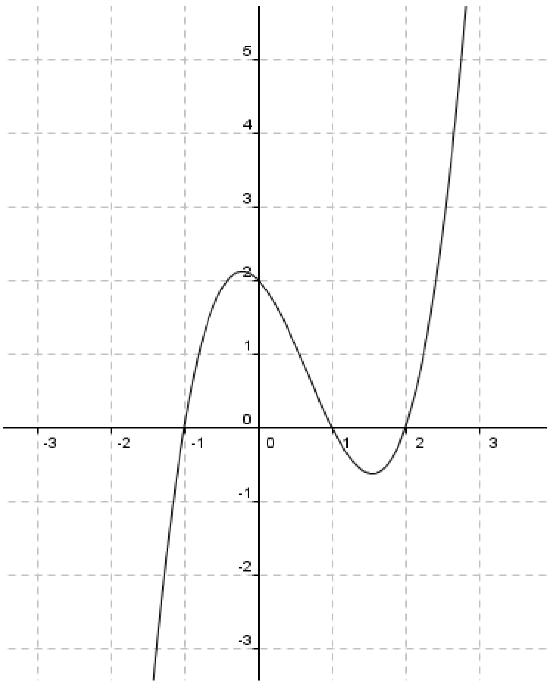
Curvatura. Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió:

Una funció és de curvatura còncava $\cup$ en un interval si la recta tangent a la funció en qualsevol punt de l'interval queda per sota de la gràfica de la funció.

Una funció és de curvatura convexa $\cap$ en un interval si la recta tangent a la funció en qualsevol punt de l'interval queda per sobre de la gràfica de la funció.

El punt on la gràfica canvia de curvatura si és que existeix s'anomena **punt d'inflexió**

Exemple:



Intervals de concavitat: (0.66, +∞)

Intervals de convexitat: (-∞ , 0.66)

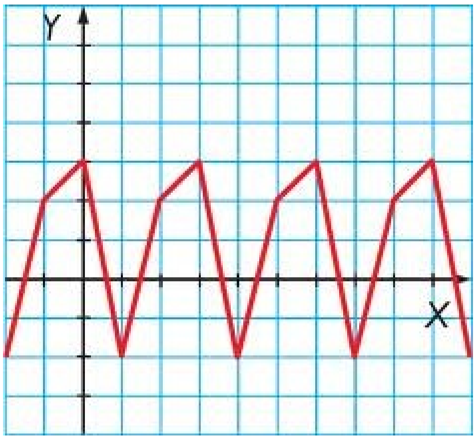
Punt d'inflexió: (0.66, 0.75)

Funcions periòdiques:

Una funció és periòdica de període T si existeix un nombre real positiu T tal que per a qualsevol x del domini de f es verifica:

$f (x +T) = f (x)$.

Si T és un període de la funció, també ho és un múltiple qualsevol de T. El valor mínim de T que compleix la definició anterior s'anomena període fonamental.



Tendència d'una funció:

És el comportament de les imatges de x per una funció f quan x s'acosta a un valor a.

Límit lateral per l'esquerra quan $x \to a$: $x \to a^-$

Aquest límit pot ser:

$\lim f(x)=l$

$x \to a^-$

$\lim f(x)=+\infty$

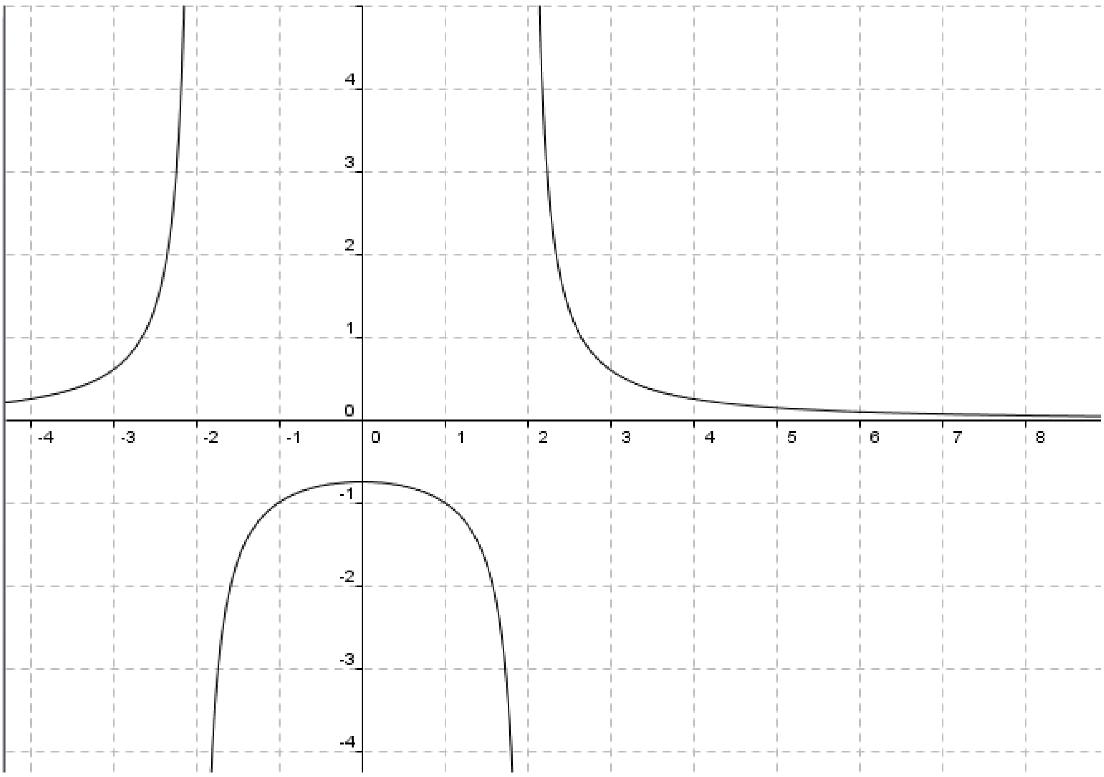
$x \to a^-$

$\lim f(x)=-\infty$

$x \to a^-$

Exemple: Observeu aquesta funció que no és altre que la funció:

$$y = \frac{3}{x^2-4}$$



En aquesta funció tenim que:

lim f(x)=-1

$x \to 1^-$

lim f(x)=+∞

$x \to -2^-$

lim f(x)=-∞

$x \to 2^-$

Límit lateral per la dreta quan $x \to a$: $x \to a^+$

Aquest límit pot ser:

$\lim f(x)=l$

$x \to a^+$

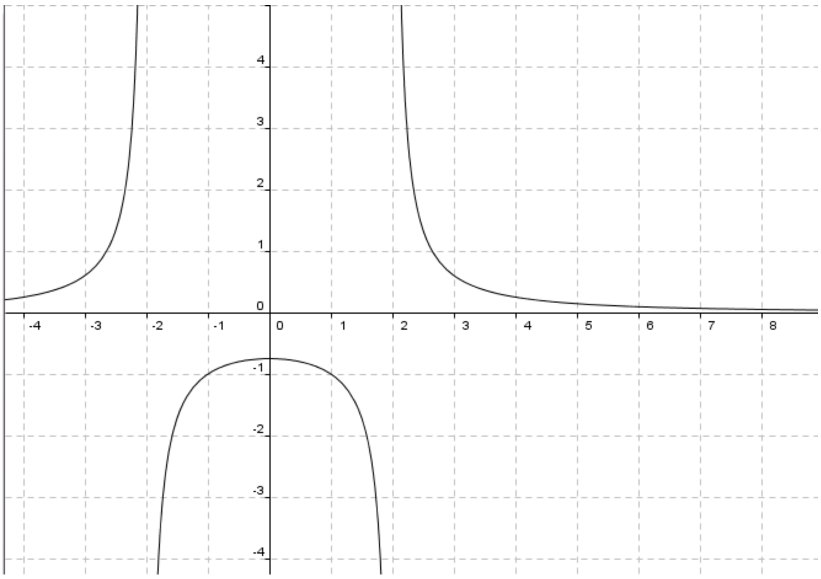
$\lim f(x)=+\infty$

$x \to a^+$

$\lim f(x)=-\infty$

$x \to a^+$

Exemple:



En aquesta funció tenim que:

$\lim f(x)=-1$

$x \to 1^+$

$\lim f(x)=+\infty$

$x \to 2^+$

$\lim f(x)=-\infty$

$x \to -2^+$

* Si $\lim_{x\to a^-} f(x)=l=\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ Diem $\lim_{x\to a} f(x)=l$

*Si $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty=\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ Diem $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

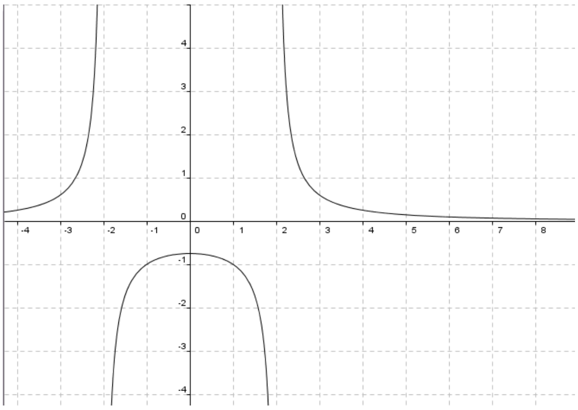
*Si $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty=\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ Diem $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

Límit quan $x\to+\infty$

Aquest límit pot ser:

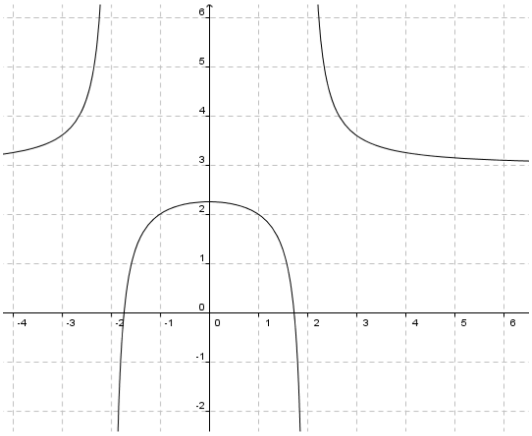
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exemple 1:



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exemple 2:

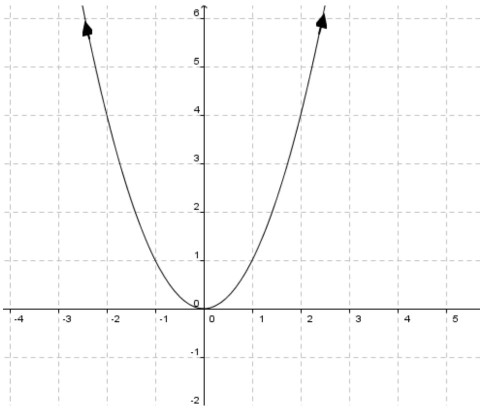


limf(x) = 3

x→+∞

- lim f(x) = +∞
  x→+∞

Exemple:

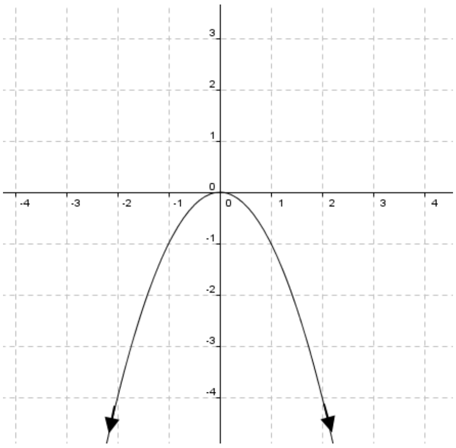


limf(x) = +∞

x→+∞

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple:



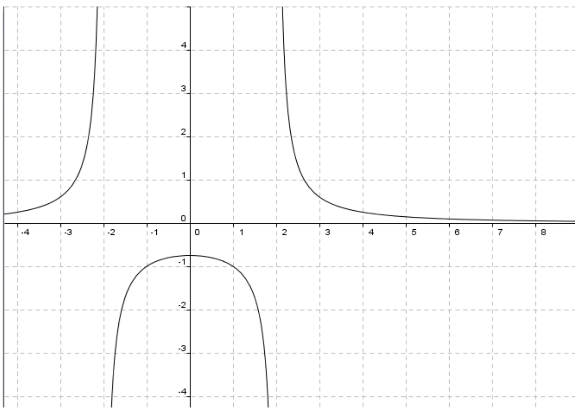
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

límit quan $x \to -\infty$

Aquest límit pot ser:

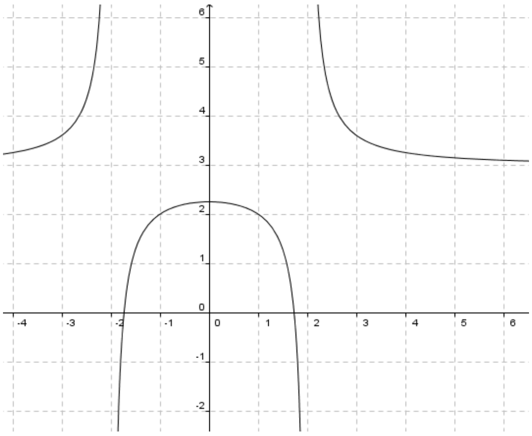
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Exemple:



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Exemple:

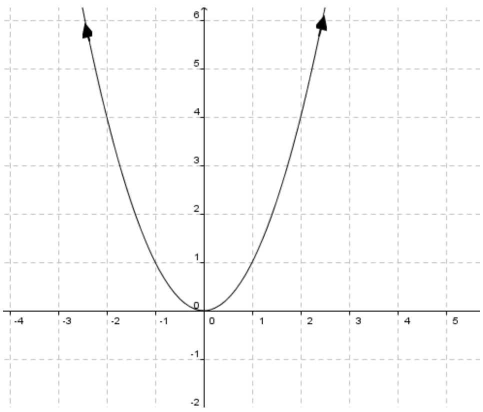


limf(x) = 3

x→-∞

- lim f(x) = +∞
  x→-∞

Exemple:

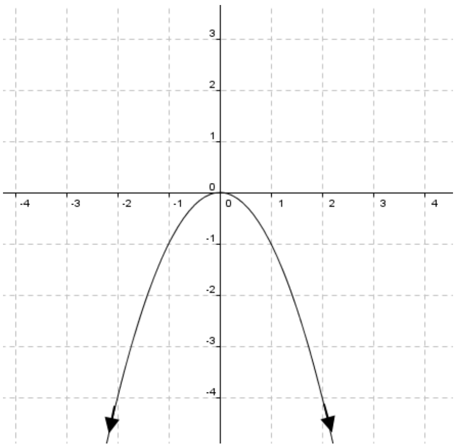


limf(x) = +∞

x→-∞

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple:

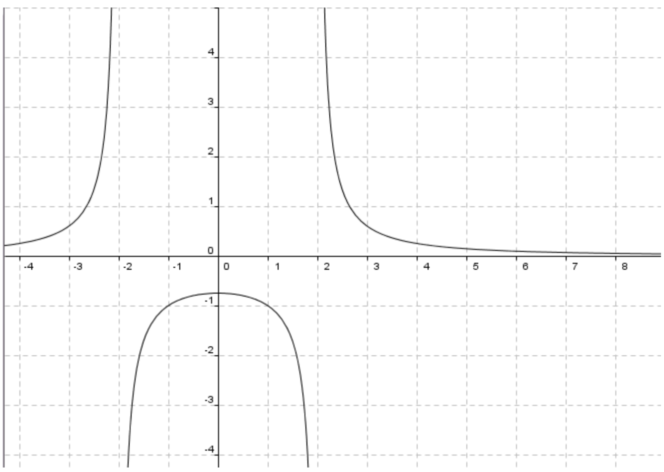


$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Asímptotes d'una funció

Si algun dels límits laterals de f en el punt a és $+\infty$ o $-\infty$ la recta $x=a$ s'anomena **asímptota vertical de f.**

Exemple:

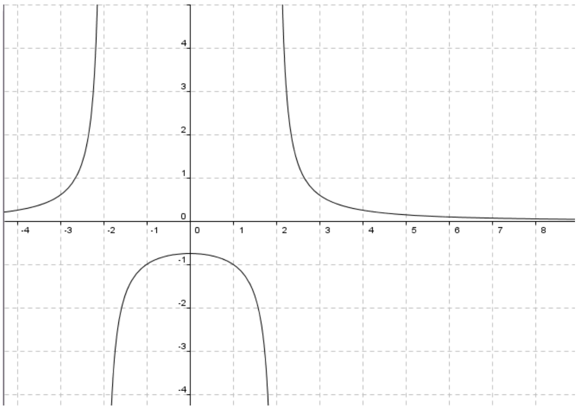


En els punt $x=2$ i $x=-2$ hi ha una asímptota vertical.

Les asímptotes verticals d'aquesta funció són les rectes: $x=2$ i $x=-2$

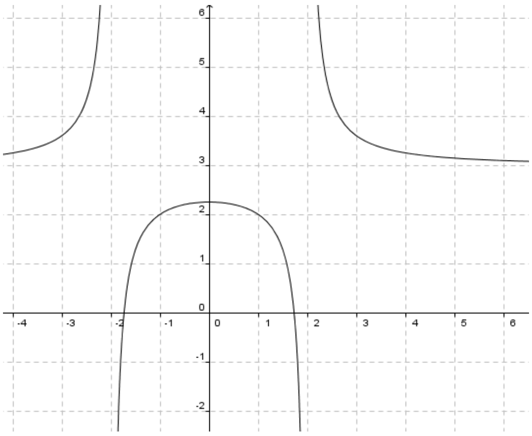
Si algun dels límits en l'infinit de f és l la recta y = l s'anomena **asímptota horitzontal de la funció f.**

Exemple:



La recta y = 0 és una asímptota horitzontal de la funció.

Exemple:



La recta y = 3 és una asímptota horitzontal de la funció.

Continuïtat d'una funció en un punt:

Si la gràfica de f es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper direm que és una funció **continua.**

Si això no passa direm que són funcions **discontínues.**

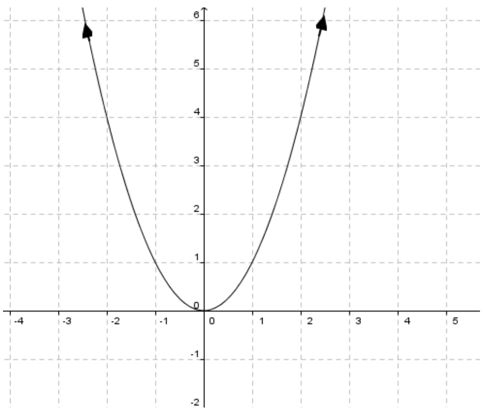
Perquè una funció f sigui contínua en un punt a cal que es compleixi:

1) Existeixi f(a)

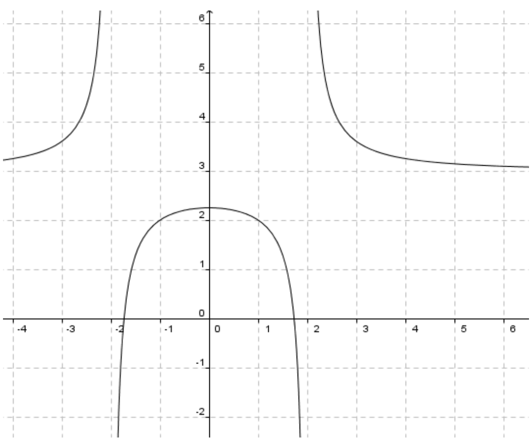
2) Existeixi lim f(x) quan x→a i és finit.

3) El límit coincideix amb f (a).

Exemple funció continua:



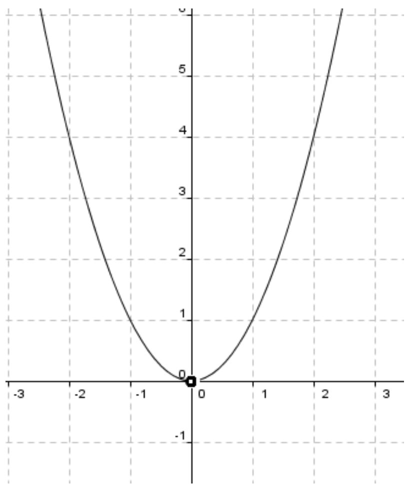
Exemple funció discontinua:



Tipus de discontinuïtats.

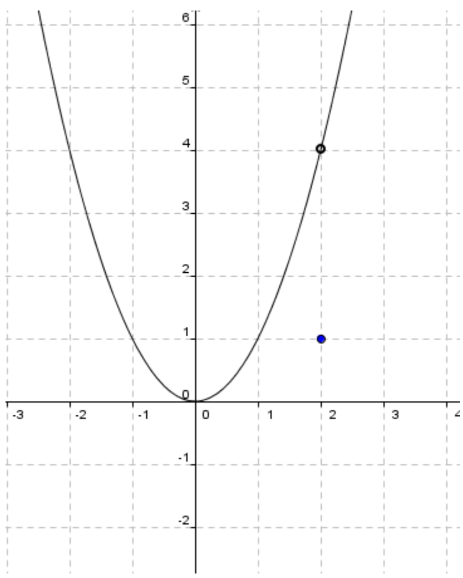
A) Evitable.(Existeix límit finit en un punt a però no existeix f(a) o si existeix no coincideix amb el valor del límit.

Exemple 1:



Aquesta funció té una discontinuïtat evitable en x=0

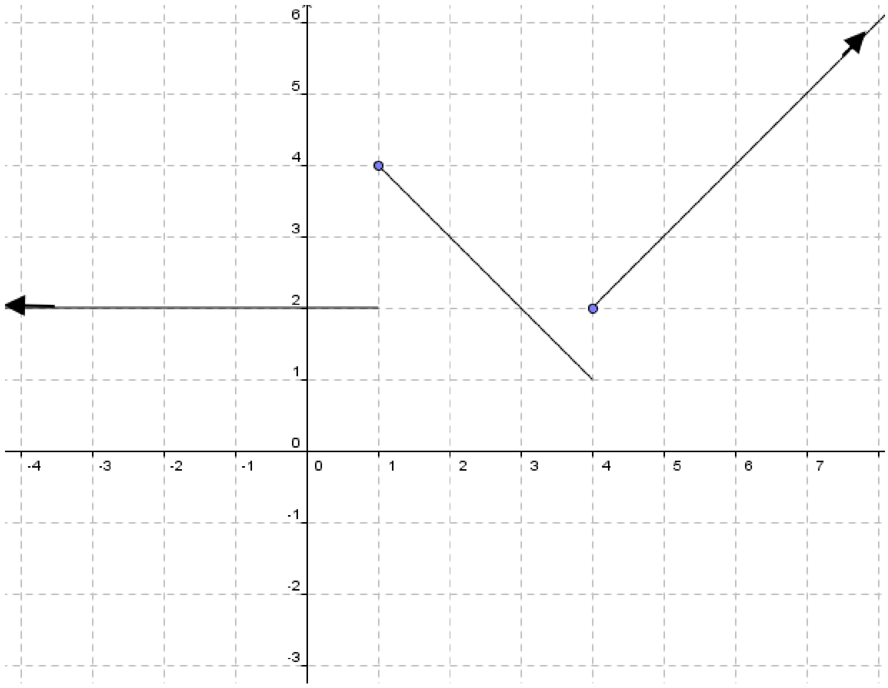
Exemple 2:



Aquesta funció té una discontinuïtat evitable en x=2

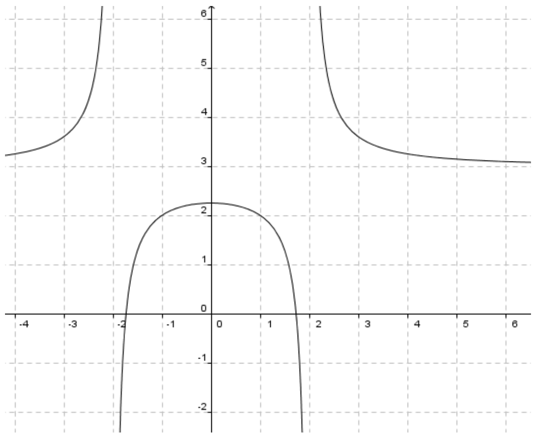
B)De salt o de primera espècie. (Existeixen límits laterals, són finits però diferents.)

Exemple:



Aquesta funció té una discontinuïtat de salt en x=1 i en x=4.

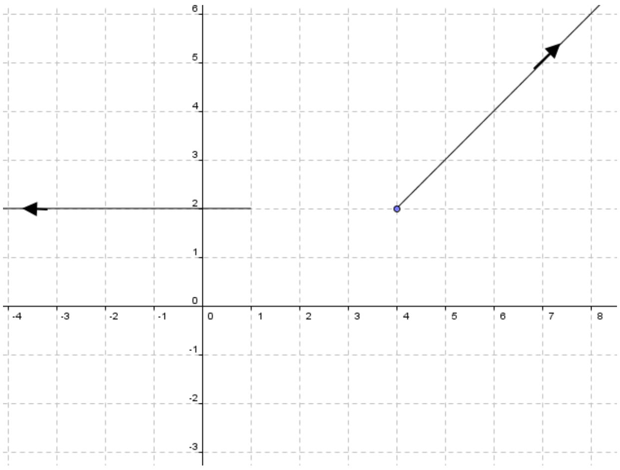
C)Asimptòtica(Els límits laterals són infinits.)



Aquesta funció té una discontinuïtat asimptòtica en x=-2 i en x=2

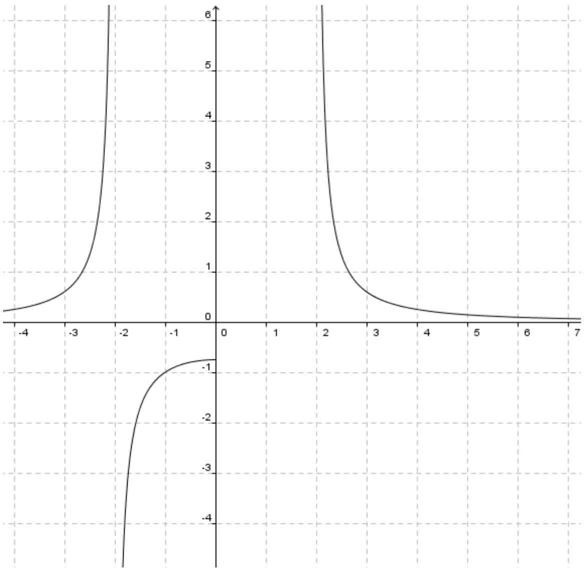
D) de segona espècie. (Un límit és infinit i l'altre finit o algun dels dos no existeix.)

Exemple 1:



Aquesta funció té una discontinuïtat de segona espècie en x=1 i en x=4

Exemple 2:



Aquesta funció té una discontinuïtat de segona espècie en x=0 i en x=2

Operacions amb funcions:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Suma: És la funció que assigna a cada nombre real x la suma de les imatges per la funció f i per la funció g.

Exemple: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$ $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Diferència: És la funció que assigna a cada nombre real x la diferència de les imatges per la funció f i per la funció g.

Exemple: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$ $(f-g)(x) = x^2 - 2x - 1$

$(f.g)(x) = f(x) .g(x)$

Producte: És la funció que assigna a cada nombre real x el producte de les imatges per la funció f i per la funció g.

Exemple: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$ $(f\cdot g)(x) = 2x^3 + x^2$

$(f/g)(x) = f(x) / g(x)$

Quocient: És la funció que assigna a cada nombre x el quocient de les imatges per la funció f i per la funció g.

Exemple: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$ $(f/g)(x) = \frac{x^2}{2x+1}$

Composició de funcions:

Donades dues funcions f i g , la funció que assigna a cada x el valor g (f (x)) s'anomena funció composta de f i g, i s'escriu $(g^\circ f)(x) \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$

Exemple: $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x+1$ $(g^\circ f)(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 1$

Funció inversa respecta la composició:

Sigui $f(x) = 4x$ i $g(x) = x/4$

Observem que : $f^\circ g(x) = x$ i $g^\circ f(x) = x$

Anomenem g la funció inversa de f i la representem per: $g = f^{-1}$.

Exemple 1:

La funció inversa de $f(x) = x^2$ és $f^{-1} = \sqrt{x}$

Exemple 2:

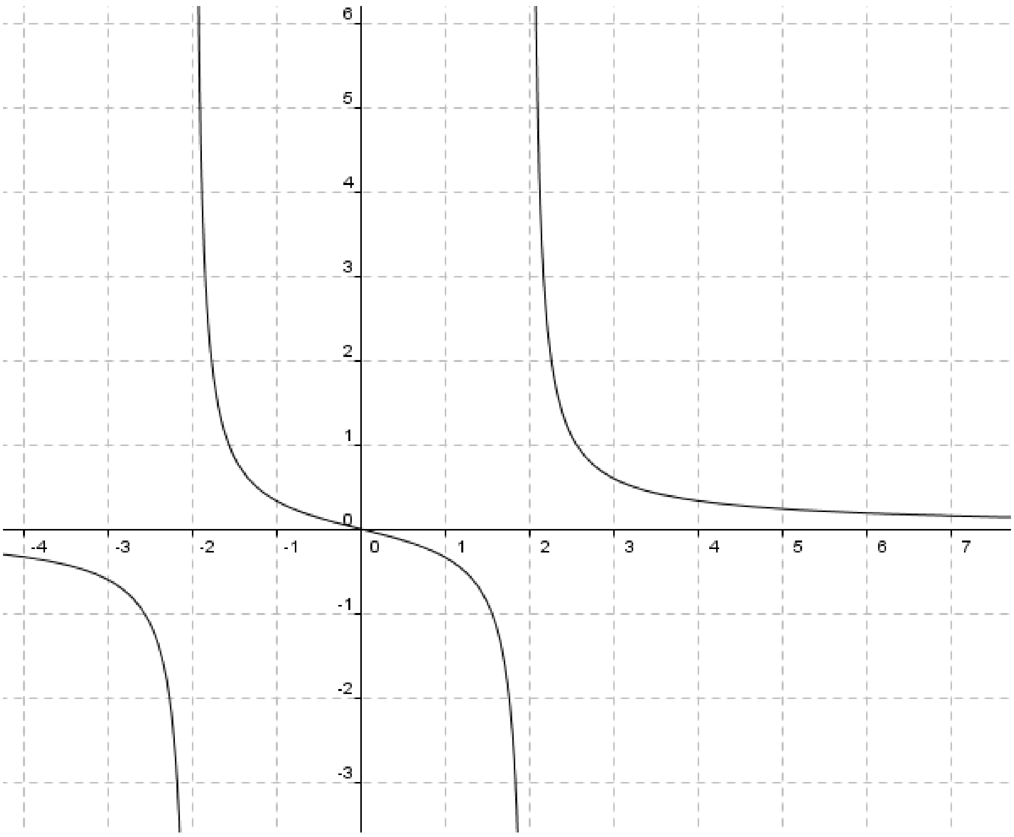
La funció inversa de $g(x) = 2x$ és $g^{-1} = \frac{x}{2}$

EXERCICIS:

*Donats els següents gràfics estudia si són o no són funcions i en cas que ho siguin analitza els aspectes més representatius: domini, recorregut, continuïtat, creixement, decreixement, signe, màxims i mínims relatius, màxims i mínims absoluts, asímptotes...

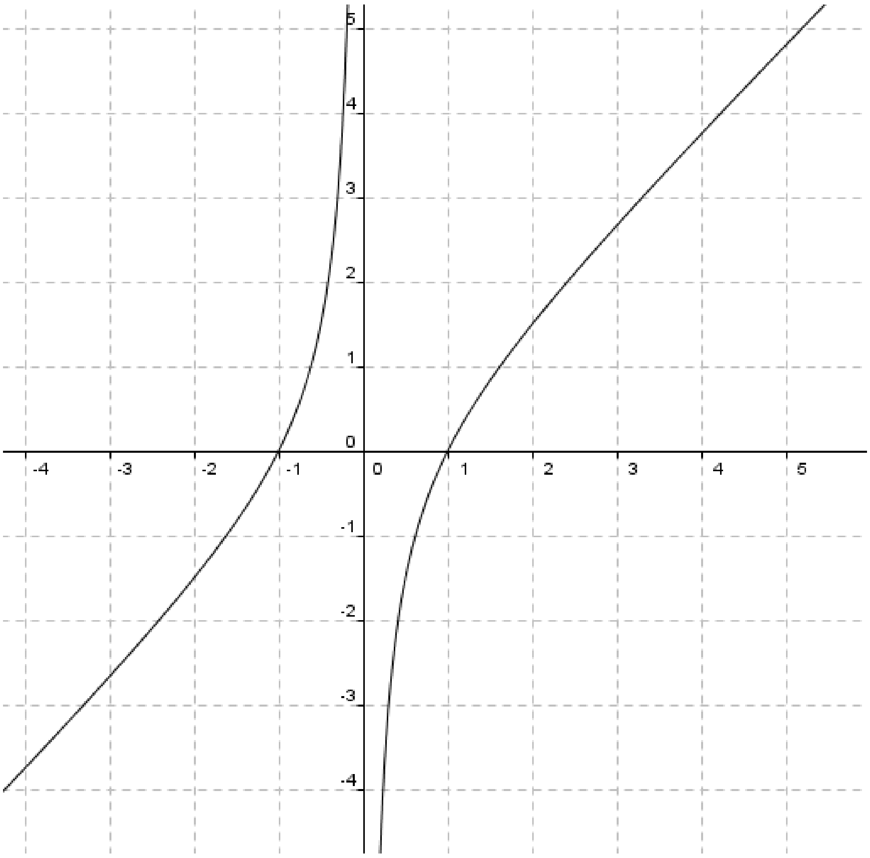
1-Estudia els límits laterals en els punts x=-2, x=2 i x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions quocient de dos polinomis)



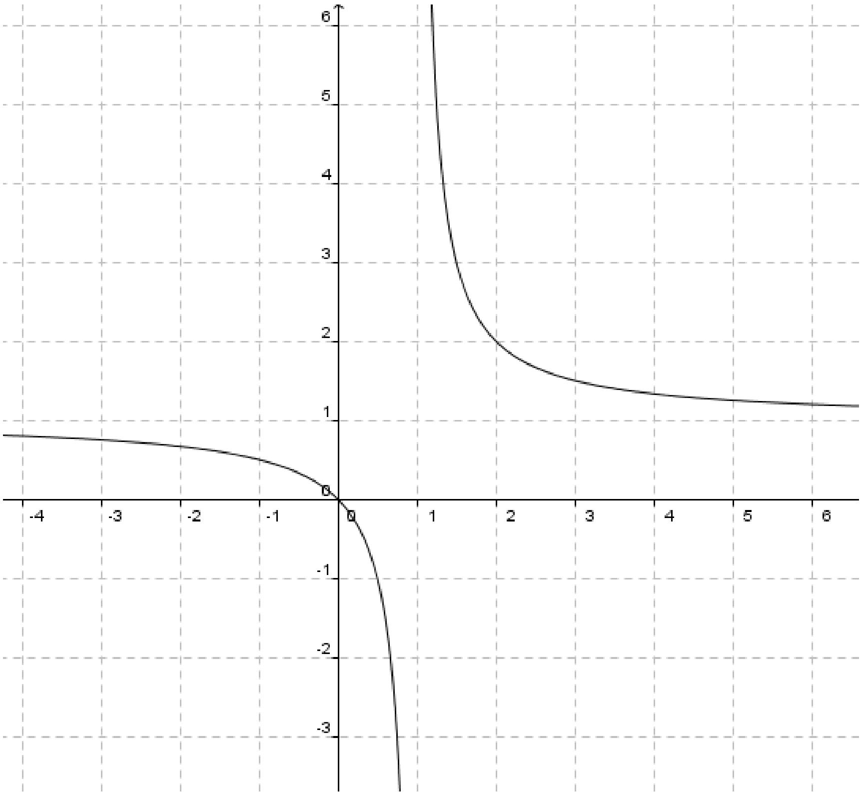
2-Estudia els límits laterals en els punts x=-1, x=1 i x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions quocient de dos polinomis)



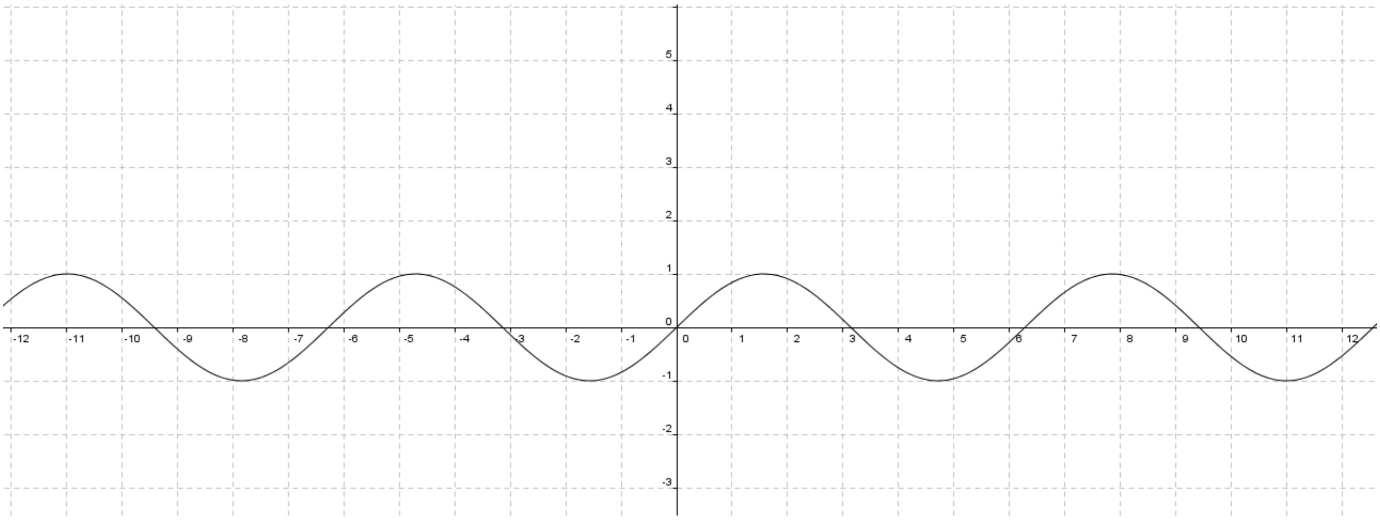
3-Estudia els límits laterals en els punts x=1, x=2 i x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions quocient de dos polinomis)



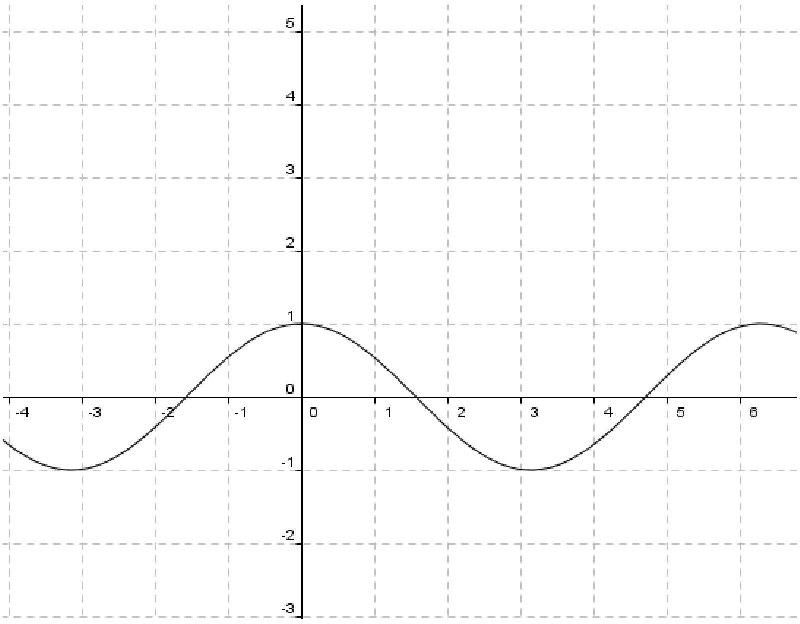
4-Estudia els límits laterals en el punt x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions trigonomètriques)



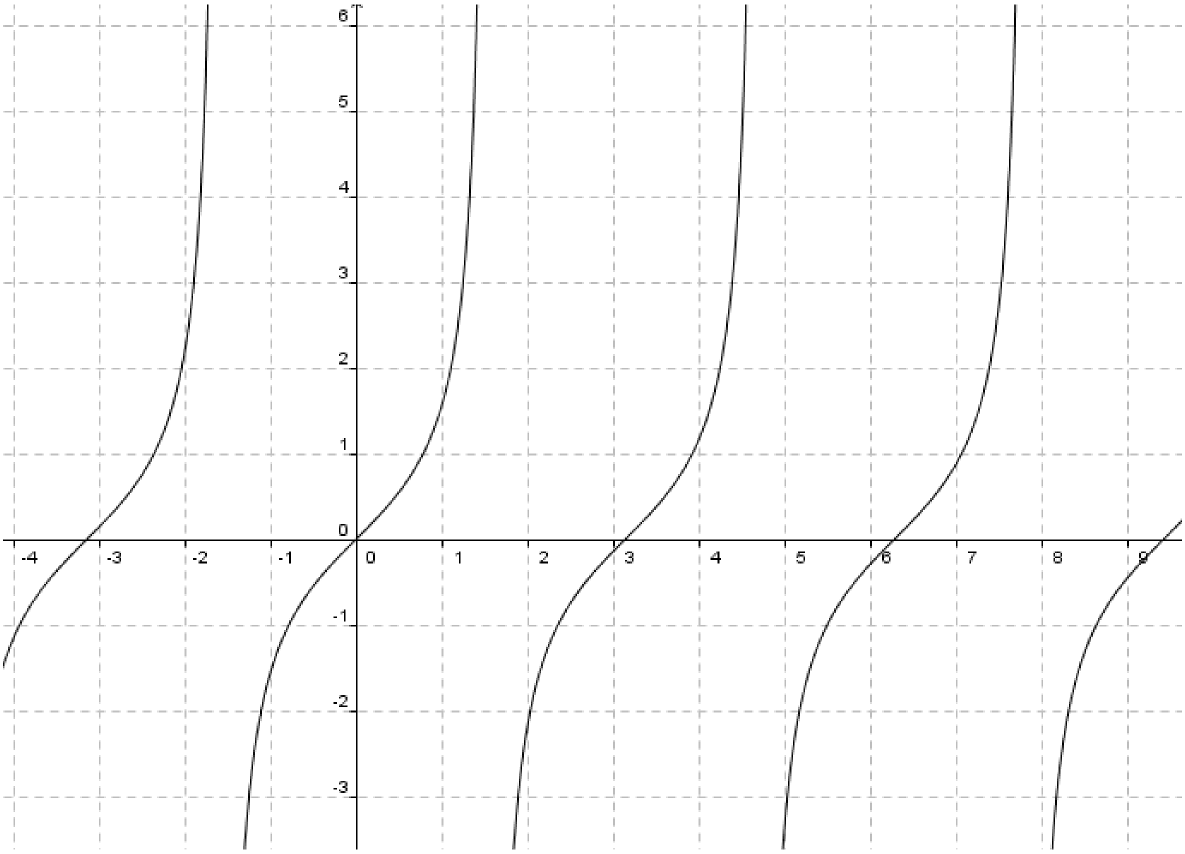
5- Estudia els límits laterals en el punt x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions trigonomètriques)



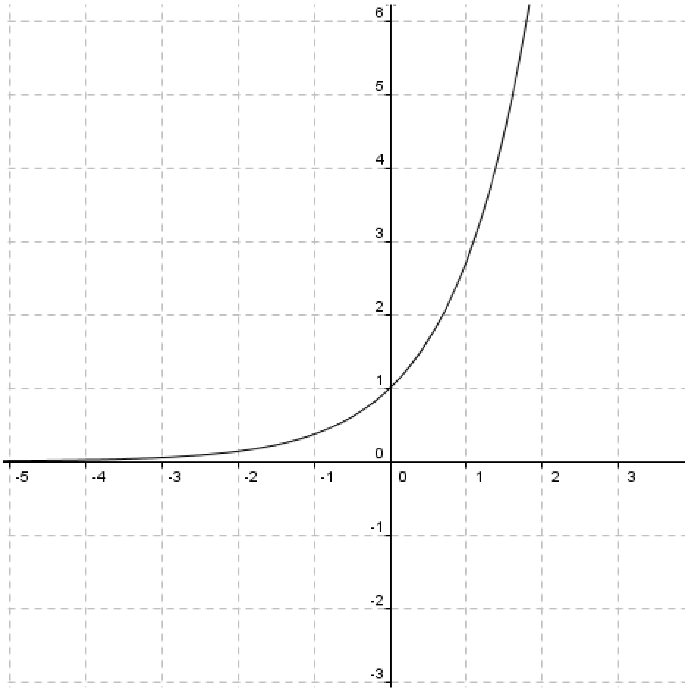
6- Estudia els límits laterals en el punt x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions trigonomètriques)



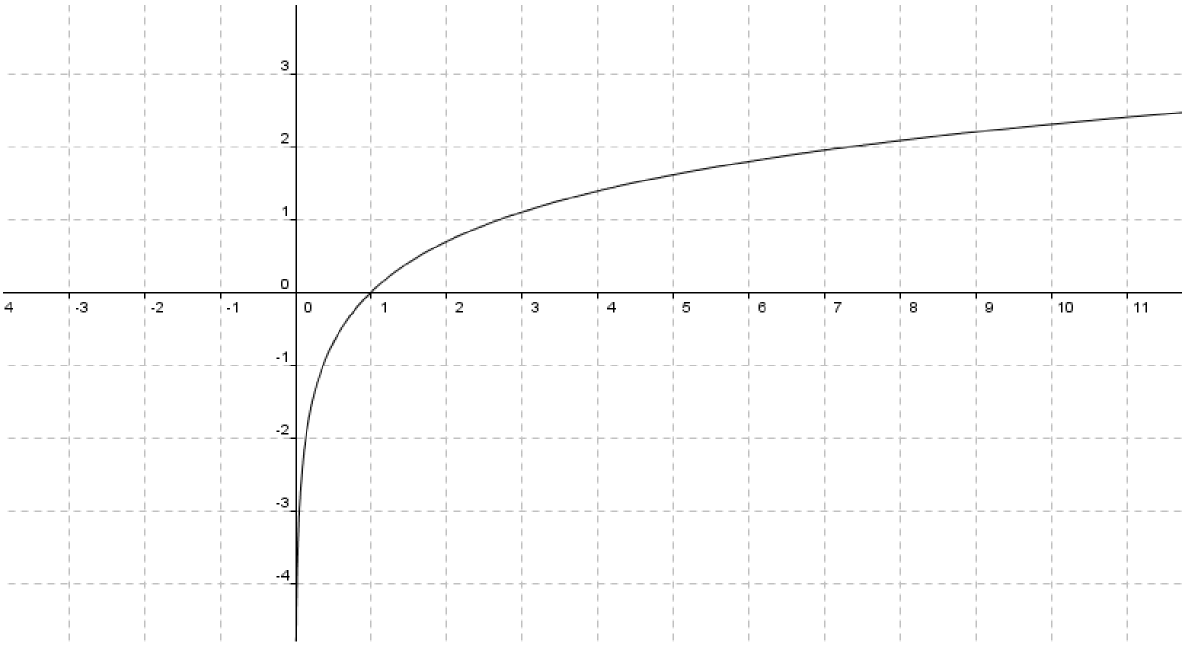
7- Estudia els límits laterals en el punt x=0 i en el +∞ i -∞ i també *

(funcions exponencials)

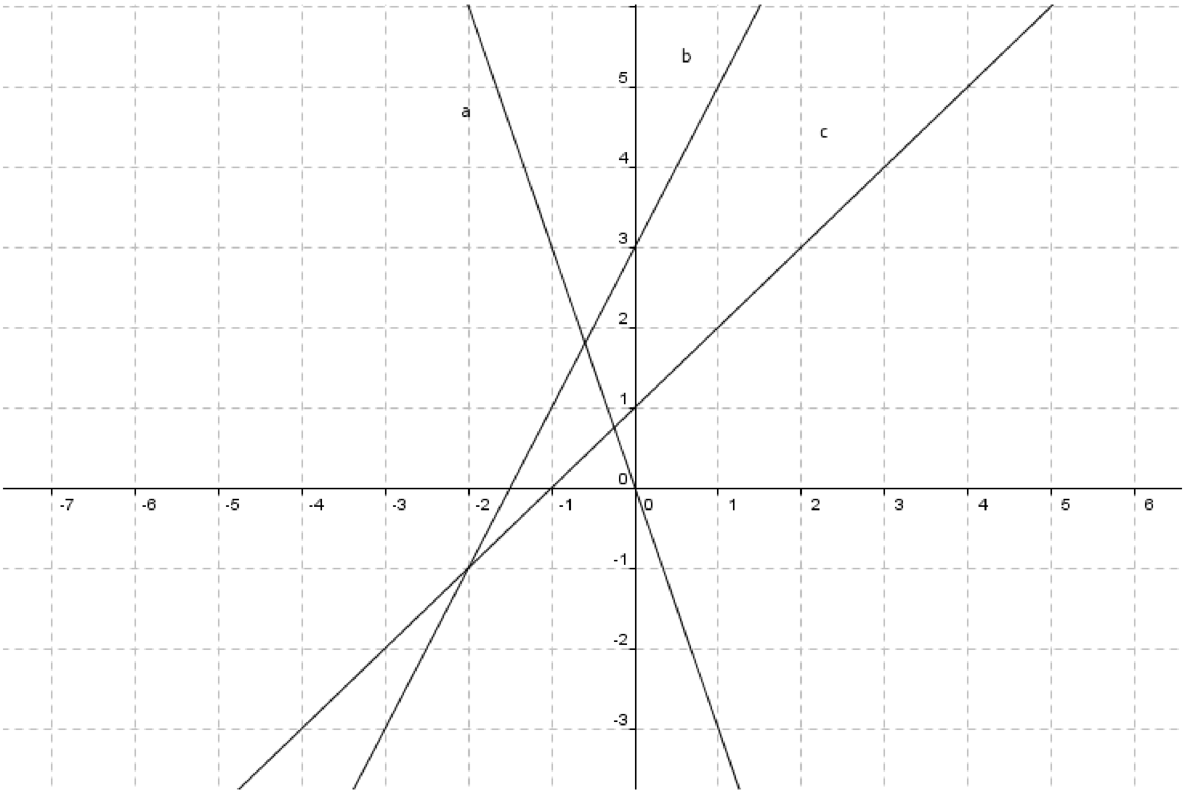


8- Estudia els límits laterals en els punts x=0, x=1 i en el +∞ i -∞ i també *

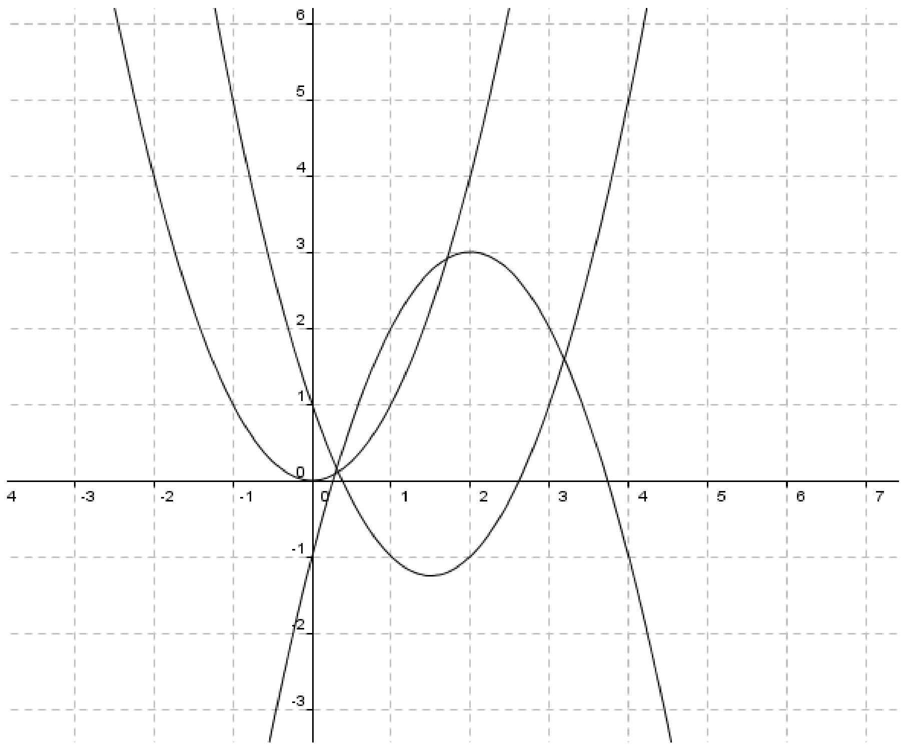
(funcions logarítmiques)



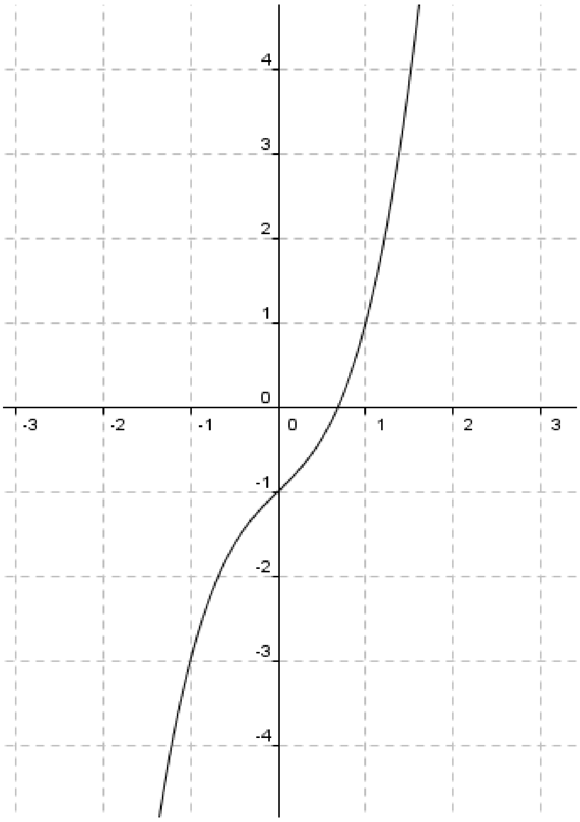
9-Funcions polinòmiques de primer grau: estudia * en les rectes a, b i c



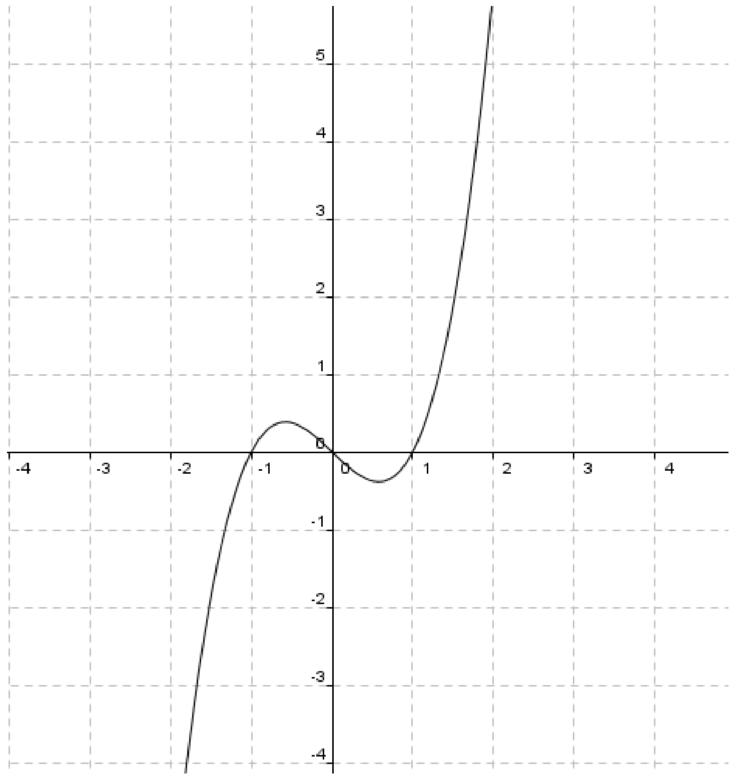
10-Funcions polinòmiques de segon grau: estudia * en les tres paràboles.



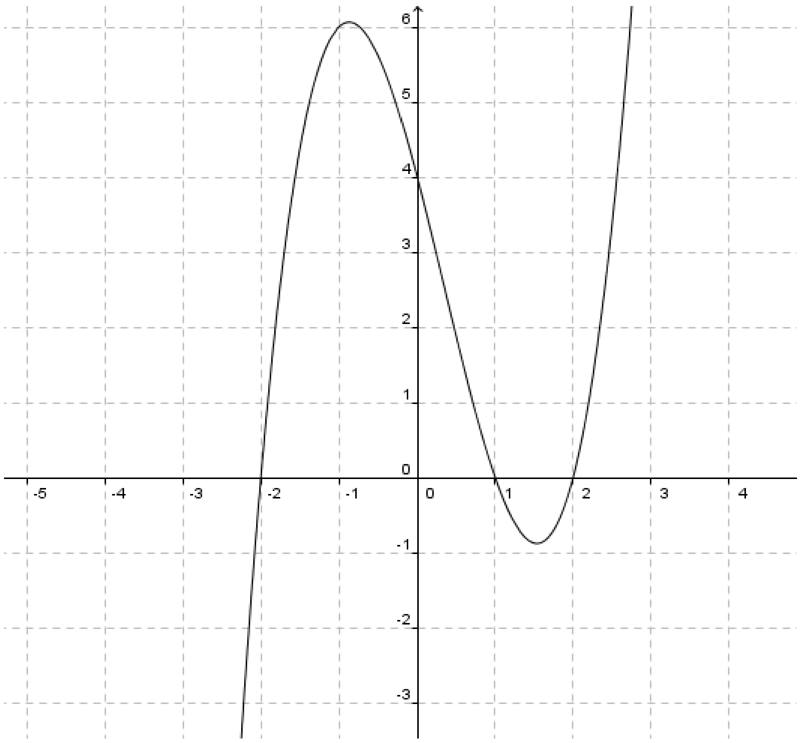
11- (Funcions polinòmiques de grau superior a tres). Estudia els límits laterals en $x=0$, $x=1$ en el $+\infty$ i $-\infty$ i també *



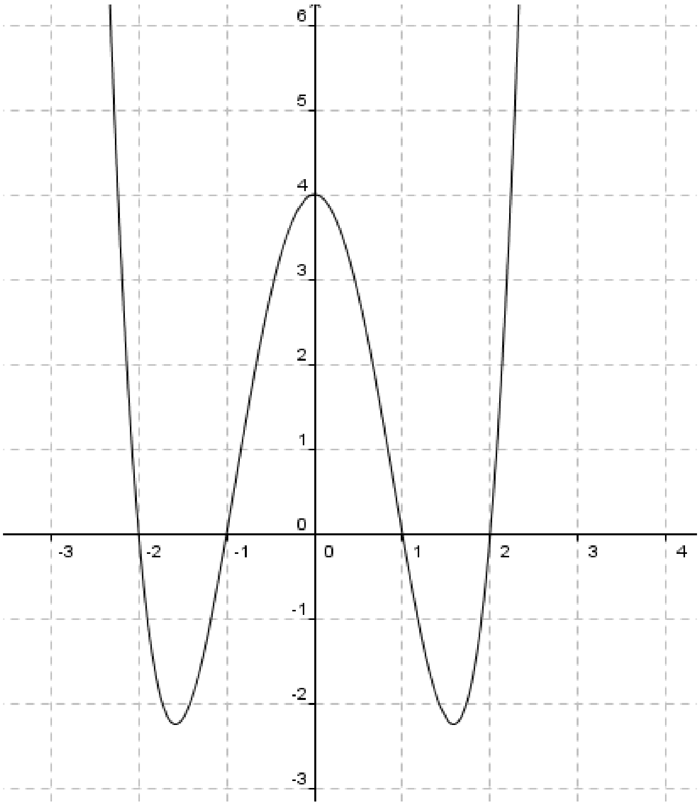
12-(Funcions polinòmiques de grau superior a tres). Estudia els límits laterals en x=0, x=1, x=-1, en el +∞ i -∞ i també *



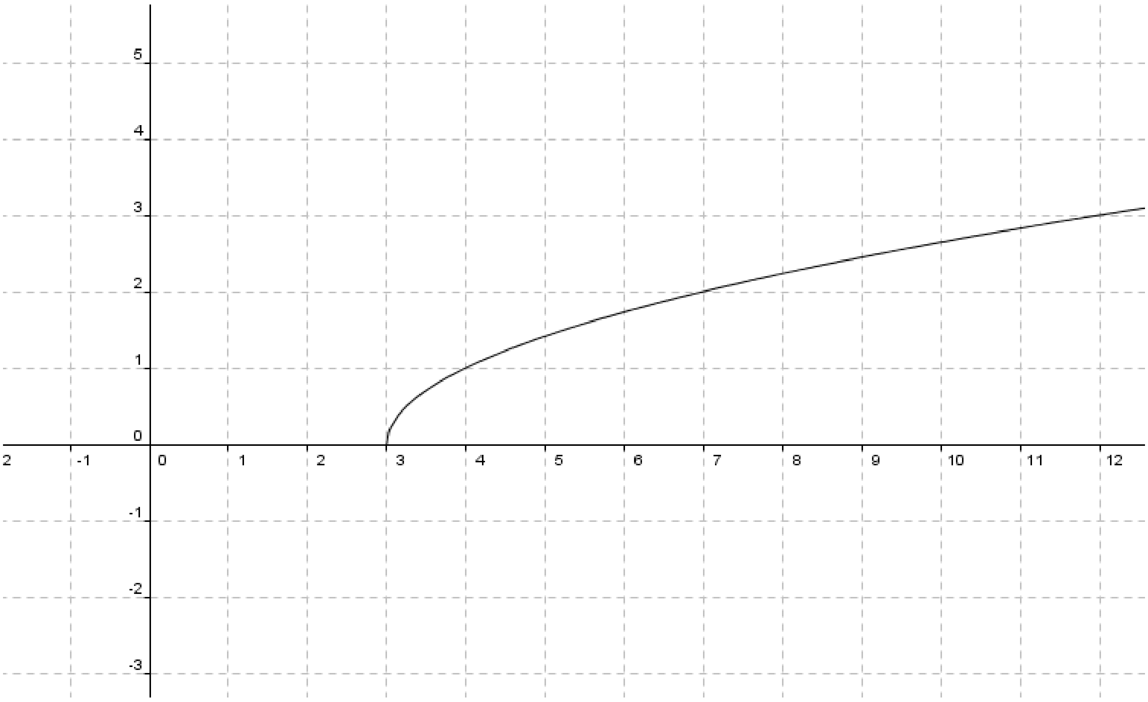
13-(Funcions polinòmiques de grau superior a tres). Estudia els límits laterals en x=0, x=1, x=2 en el +∞ i -∞ i també *



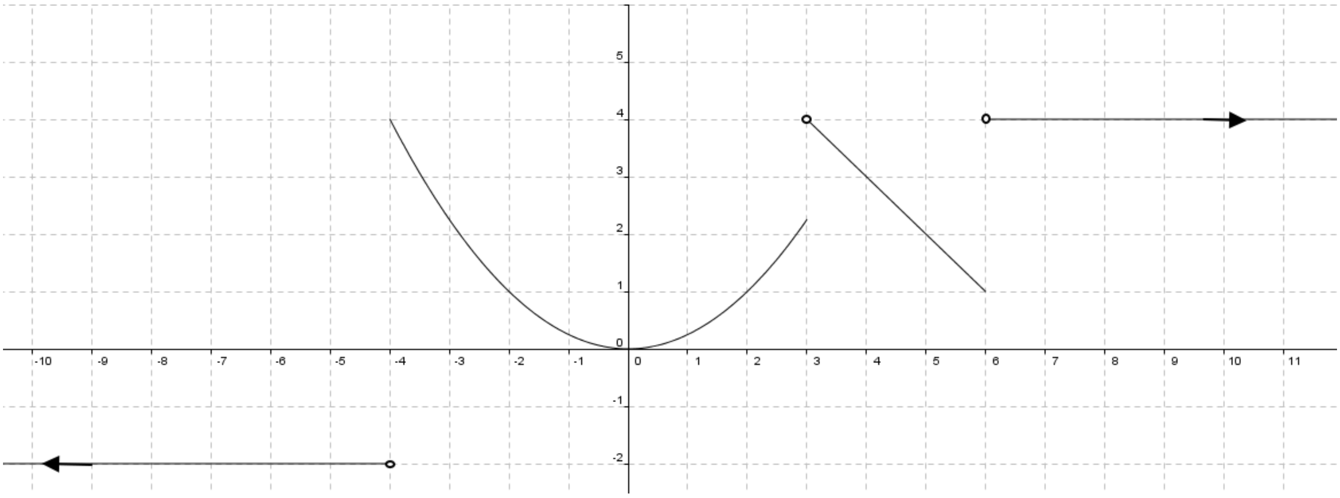
14-(Funcions polinòmiques de grau superior a tres). Estudia els límits laterals en x=0, x=1, x=2, x=-1, x=-2 en el +∞ i -∞ i també *



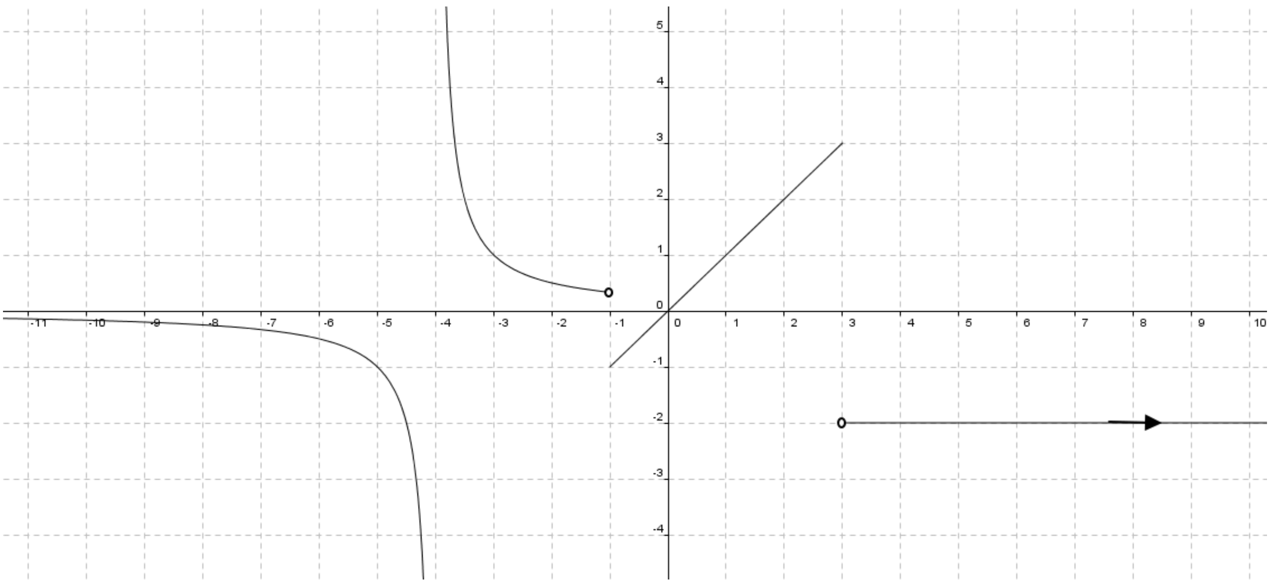
15-Funcions radicals: Estudia els límits laterals en x=3, en el +∞ i -∞ i també *



16- Funcions a trossos: Estudia els límits laterals en x=-4, x=3, x=6, en el +∞ i -∞ i també *



17-Funcions a trossos: Estudia els límits laterals en x=-4, x=-1, x=3, en el +∞ i -∞ i també *



REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

ESTUDI ANALÍTIC DE FUNCIONS

ASÍMPTOTES

Verticals:

Si algun dels límits laterals de f en un punt **a** és +∞ o -∞ la recta **x=a** s'anomena **asímptota vertical de f.**

Horitzontals:

Si algun dels límits en l'infinit de f és **l** aleshores la recta **y=l** s'anomena **asímptota horitzontal de la funció f.**

LÍMITS DE FUNCIONS ELEMENTALS

Quan x tendeix a infinit (+∞):

Polinomis:

El límit és +∞ o -∞ depèn del signe del coeficient de major grau (si és positiu +∞ i si és negatiu -∞)

Si ho veu comprovar empíricament agafeu una funció polinòmica i aneu donant valors a x cada cop més grans, mireu que passa.

Quocient de polinomis:

-Si **grau numerador > grau denominador el límit és +∞ o -∞** (per determinar-ho prenem els coeficients de major grau del numerador i del denominador i dividiu: (+/+, +/-, -/+ o -/-) el resultat serà el signe de l '∞

- Si **grau numerador < grau denominador el límit és 0**

- Si grau numerador =grau denominador el límit és el quocient dels coeficients de major grau dels polinomis numerador i denominador.

Quan x tendeix a infinit (-∞):

Es fa el mateix que quan x tendeix a +∞ però canviant la x per –x.

Per tant trobar límits al menys infinit és redueix a saber calcular límits al infinit.

Altres funcions:

Exponencials: si a>1 $\lim_{+\infty} p \cdot a^x = \pm\infty$

Comparació d'infinits:

Si $\lim_{+\infty} f(x)=\pm\infty$ i $\lim_{+\infty} g(x)=\pm\infty$

f(x) és un infinit d'ordre superior a g(x) si:

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ o el que és el mateix, $\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)}=0$

Són infinits del mateix ordre si: $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=l \neq 0$

- Donades dues potències de x, la de major exponent és un infinit d'ordre superior.
- Donades dues funcions exponencials de bases majors que 1, la de major base és un infinit d'ordre superior.
- Qualsevol funció exponencial de base major que 1 és un infinit d'ordre superior a qualsevol potència de x.
- Les potències de x són infinits d'ordre superior a les funcions logarítmiques.
- Dos polinomis de mateix grau o dues funcions exponencials de la mateixa base són infinits de mateix ordre.

Operacions amb expressions infinites(límits quan x tendeix a infinit): fem les corresponents operacions amb els límits:

<table>
<tr><th>Sumes</th><th colspan="2">Productes</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$(+\infty) \pm (l) = (+\infty)$</td><td colspan="2">$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$</td><td rowspan="2">$l > 0$</td><td>$(+\infty) \cdot (l) = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(-\infty) \pm (l) = (-\infty)$</td><td>$(-\infty) \cdot (l) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$</td><td rowspan="2">$l < 0$</td><td>$(+\infty) \cdot (l) = (-\infty)$</td></tr>
<tr><td>$-(-\infty) = (+\infty)$</td><td>$(-\infty) \cdot (l) = (+\infty)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Quocients</th><th colspan="2">Potències</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{l}{\pm\infty} = 0$</td><td colspan="2">$(+\infty)^{+\infty} = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{\infty^{\infty}} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{l}{0} = \pm\infty \text{ si } l \neq 0$</td><td colspan="2">$Si\ l > 0 \ \rightarrow \ (+\infty)^{l} = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Si\ l < 0 \ \rightarrow \ (+\infty)^{l} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\pm\frac{\infty}{0} = \pm\infty$</td><td colspan="2">$Si\ l \neq 0 \ \rightarrow \ l^{0} = 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l > 1$</td><td>$(l)^{+\infty} = (+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{0}{\pm\infty} = 0$</td><td>$(l)^{-\infty} = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$0 < l < 1$</td><td>$(l)^{+\infty} = 0$</td></tr>
<tr><td>$(l)^{-\infty} = (+\infty)$</td></tr>
</table>

però hem de tenir en compte les possibles indeterminacions (una indeterminació és el reconeixement qu només amb el coneixement dels límits de les funcions que intervenen no podem assignar límit al resultat de l'operació. Cal efectuar una investigació més profunda que ens permeti arribar al valor d'aquest límit) del tipus:

$\infty-\infty$, ∞/∞, 0/0, $\infty \cdot 0$, ∞^{0}, 1^{∞},$1^{-\infty}$, 0^{0} (aleshores resolem operacions, multipliquem i dividim pel conjugat...)

La indeterminació del tipus: **1^{∞}** la resoldrem de la següent manera:

$$\lim_{+\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{+\infty} e^{\lim_{+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Quan x tendeix a a (a és un valor real):

Substituïm el valor de a en la funció (és a dir calculem f(a)) i aquest és el valor del límit en cas que doni un valor real. És a dir si la funció és continua en un punt (no es trenca) el límit i la imatge coincideixen.

Això no sempre és així. Podem aplicar-ho a polinomis, quocients de polinomis, operacions amb funcions polinòmiques, exponencials, logarítmiques, etc.)Cal anar molt en compte amb les funcions a trossos, aquí cal mirar molt bé els diferents trossos de la funció i els punts d'enllaç)

-**Quocients de polinomis:** $\frac{p(x)}{q(x)}$

*Si dona $\frac{m}{0}$ el límit és infinit però el signe de l'infinit depèn si ens acostem per la dreta o per l'esquerra.

Per saber-ho substituïm valors molt propers al valor a tant per la dreta com per l'esquerra i veurem el signe de la tendència.

*Si dona $\frac{0}{0}$ és divideix per Ruffini : P(x) : (x-a) i Q(x) : (x-a) tantes vegades com faci falta. És a dir simplifiquem el quocient fins que al tornar a substituir l'expressió per x=a obtinguem el valor del límit.

-Polinomis, exponencials, logarítmiques...:

Com que són funcions contínues no tenim cap problema i el límit en el punt coincideix amb la imatge del punt.

-**Operacions amb funcions:**

Es fa substituint i operant amb les funcions segons convingui. (multiplicar i dividir pel conjugat, resolent operacions, etc...)

Si ens trobem amb la indeterminació 1^{∞} fem el mateix que quan el límit tendia cap a ∞.

CONTINUÏTAT

Una funció és continua quan:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

-La funció ha d'estar definida en a és a dir existeixi f(a).

-Existeixi $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$

-El límit coincideixi amb el valor de la funció.

De manera intuïtiva diem que la funció no està partida o trencada. És com un fil que li donem forma.

Continuïtat en un interval:

Es diu que una funció és continua en un interval (finit o infinit) de R si és contínua en cada punt de l'interval

Àlgebra de funcions continues:

Si f(x) i g(x) són funcions continues aleshores:

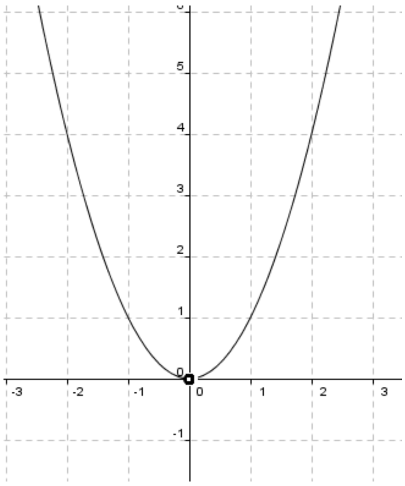
f(x)+g(x) ; f(x)·g(x) ; $\frac{f(x)}{g(x)}$ si g(a)≠0 ; f(g(x)) també són funcions contínues.

Tipus de discontinuïtats:

-Evitable:

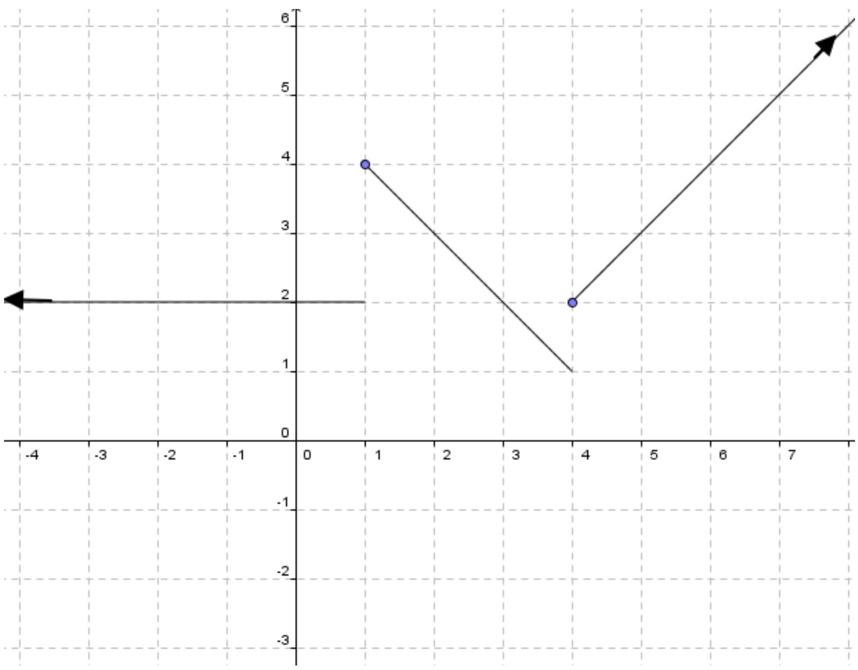
Existeix $\lim_{x \to a} f(x)$ però no existeix f(a) o bé existeix però no coincideix amb el valor del límit.

Exemple:



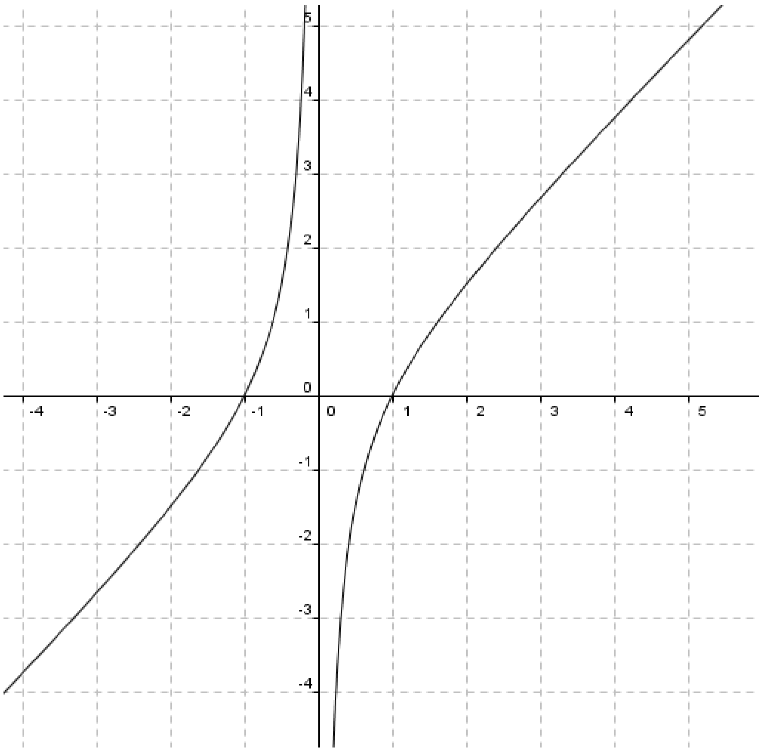
-De salt o de primera espècie:

Existeixen límits laterals , són finits però diferents.

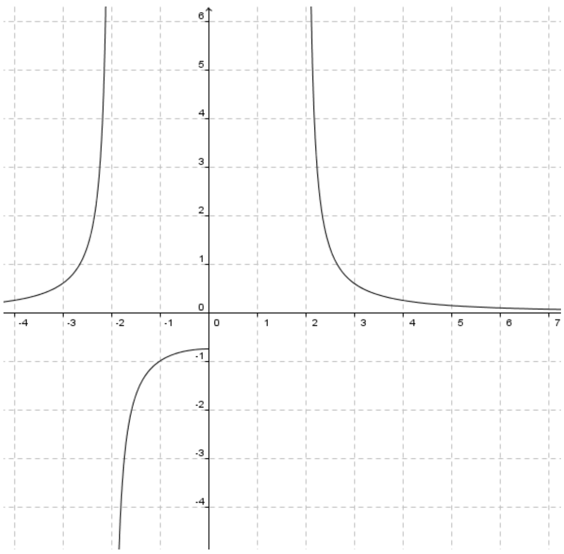


-Asimptòtica:

Els límits laterals són infinits.



-De segona espècie: un límit és infinit i l'altre finit o algun dels dos no existeix.



Continuïtat de les funcions elementals:

-Les funcions constants i les funcions polinòmiques són sempre contínues.

-Els quocients de polinomis f(x) = $\frac{P(X)}{Q(x)}$ són contínues en tots els punts llevat dels punts que anul·len els denominadors.

-Funcions amb arrels: si l'índex és senar són sempre contínues però si l'índex és parell només són contínues per aquells valors que fan no negatiu el radical.

-Les funcions exponencials, logarítmiques, trigonomètriques (sinx i cosx) són contínues en el seu domini.

EXERCICIS:

1- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{2x}{x-3}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).
2- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{2-x}{x-3}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).
3- Troba els límits de la funció: f(x) = x^2-5x+1 en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0, x=$\frac{1}{2}$, x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).
4- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).
5- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{1}{x} - \frac{3-x}{x^2}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

6- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2-9}{x+3}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

7- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2+2x}{x}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

8- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2+3}{x^2-5x+4}$ en x=3, x=-3, x=2,

9- x=-2, x=0, x=1, x=-1, x=4, x=-4, x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

10- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{9-x^2}{x^2-x-6}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

11- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

12- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2+x-2}{2x^2-6x+4}$ en x=1, x=-1, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

13- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{(x-1)^2}{x-5}$ en x=5, x=-5, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

14- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

15- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{x^2+7x+6}{x+1}$ en x=1, x=-1, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

16- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{3x+5}{(x+4)^2}$ en x=4, x=-4, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

17- Troba els límits de la funció: f(x) = $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en x=1, x=-1, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

18- Troba els límits de la funció: f(x) = $\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

19- Troba els límits de la funció: f(x) = $\left(\frac{x^2-2x}{x+2}-\frac{2x-4}{x+2}\right)$ en x=3, x=-3, x=2, x=-2 x=0 x=+∞ i x=-∞. Troba també els límits laterals en els punts anteriors, per la dreta i per l'esquerra).

20- Donada la funció f(x) = $\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+5x+10}$ troba els punts que anul·len el denominador i calcula els límits en cadascun d'ells.

21- Donada la funció f(x) = $\frac{x^2+x-2}{x^3+6x^2+3x-10}$ troba els punts que anul·len el denominador i calcula els límits en cadascun d'ells.

22- De les següents funcions calcula: les asímptotes verticals i horitzontals, el domini i els talls amb els eixos i després fes un petit esbós de la funció.

a) f(x) = $\frac{2x+1}{x-3}$
b) f(x) = $\frac{x-4}{(x-1)^4}$
c) f(x) = $\frac{x+1}{4-x^2}$
d) f(x) = $\frac{-10}{1-x^2}$
e) f(x) = $\frac{x^2+5}{(x-2)\cdot(x+3)}$

f) f(x) = $\frac{-1}{x^2-5x+6}$

g) f(x) = $\frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}$

h) f(x) = $\frac{x^2}{x^2+2x^3}$

i) f(x) = $\frac{x+4}{1-x}$

j) f(x) = $\frac{x^2+1}{x+2}$

k) f(x) = $\frac{x^3+4x-1}{x^2-1}$

l) f(x) = $\frac{x-5}{x^2-x+13}$

m) f(x) = $\frac{x}{x^4-1}$

n) f(x) = $\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+1}$

o) f(x) = $\frac{1}{-2x^2+5x+6}$

23- Troba els límits en els punts de discontinuïtat:

$f(x) = \begin{cases} 3, & x < 0 \\ -2, & x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 3 \\ 4-x, & x \geq 3 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 1-x, & x \geq 2 \end{cases}$

y = $\begin{cases} 3 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$ y = $\begin{cases} 0 & si \ x < -1 \\ 1 & si \ -1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & si \ x > 2 \end{cases}$ y = $\begin{cases} 2x+2 & si \quad x < -2 \\ 0 & si \quad x = -2 \\ x+1 & si \ x > -2 \end{cases}$

24- Estudia les següents funcions:

a) f(x) = $\frac{2x}{4-x}$

b) f(x) = $\frac{2}{4x-x^2}$

c) f(x) = $\frac{2x}{x^2+1}$

d) f(x) = $\frac{x+1}{(2x-3)^2}$

e) f(x) = $\frac{1}{x^2+x+1}$

f) f(x) = $\frac{1}{x^2-2x+8}$

g) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$

h) f(x) = $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

i) f(x) = $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

j) f(x) = $\frac{x+5}{x^2-2x-15}$

k) f(x) = $\frac{2x-3}{(x-3)\cdot(2x-5)}$

l) f(x) = $\frac{x-0.5}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(2x+5)}$

m) f(x) = $\frac{7x-2}{2x^3-7x^2+2x+3}$

n) f(x) = $\sqrt{x+5}$

o) f(x) = $\sqrt{x^2+1}$

p) f(x) = $\sqrt{-x^2+4x+5}$

q) f(x) = $\sqrt{3x-x^2}$

r) f(x) = $\sqrt{x^2-5}$

s) f(x) = $\sqrt{x-4}$

t) f(x) = $\sqrt{2x-5}$

u) $f(x)=4x-x^2$

v) $f(x)=x^2-2x-8$

w) $f(x)= (x-2)^2-1$

x) $f(x)=x\cdot(x+1)\cdot(x-3)$

y) $f(x)=(2x+1)\cdot(x-3)\cdot x$

z) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4}$

aa) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

bb) $f(x) = \dfrac{3x-6}{5x^2-2}$

cc) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4}$

25- Exercicis senzills per fixar bé els conceptes apresos Estudia aquestes funcions i fes un petit esbós:

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+2}$

f) f(x) = $\frac{x^2-3}{x^2-1}$

g) f(x) = $\frac{x^2-3}{x-2}$

h) f(x) = $\frac{x+3}{x-1}$

i) f(x) = $\frac{x^2-4}{x+2}$

j) f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$

k) f(x) = $\frac{x^2-4}{x-1}$

l) f(x) = $5\sqrt{x}$

m) f(x) = $\sqrt{x+3}$

n) f(x) =$-\sqrt{x}$

o) f(x) = $\sqrt{x-5}$

p) f(x)=$2\sqrt[3]{x}$

Altres exercicis:

1- Calcula els límits a l'infinit de les següents funcions comparant els exponents del numerador i del denominador:

f(x) = $\frac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1}$

f(x) = $\sqrt{\frac{5x^2-7}{x+1}}$

f(x) = $\frac{1+\sqrt{x}}{2x-3}$

f(x) = $\frac{3x}{\sqrt{x^3+2}}$

2- Sense operar, digues el límit, quan x→ +∞, de les expressions següents:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\,)$ b) $(x^2 - 2^x)$

c) $(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8-2}$ f) $\sqrt{x} - log_5 x^4$

3- Digues el límit, quan x→ +∞, de les expressions següents:

a) $\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}$

d) $(x+5)^{x^2-5x+1}$

e) $\left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)^x$

f) $\left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^{x^2+x}$

4- Estudia la continuïtat de les funcions següents i representa-les gràficament:

f(x) = $\begin{cases} -x^2+5x & 0 \leq x \leq 5 \\ x-5 & 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 < x < 1 \\ x^2-2x & 1 \leq x \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} 3x-x^2 & x \leq 3 \\ x-3 & 3 < x < 6 \\ 0 & x \geq 6 \end{cases}$

5- Calcula el valor de k perquè les funcions següents siguin contínues:

f(x) = $\begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ k-x & x > 2 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} x+k & x \leq 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} 2x+k & x < -1 \\ -kx-2 & x \geq -1 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases}$

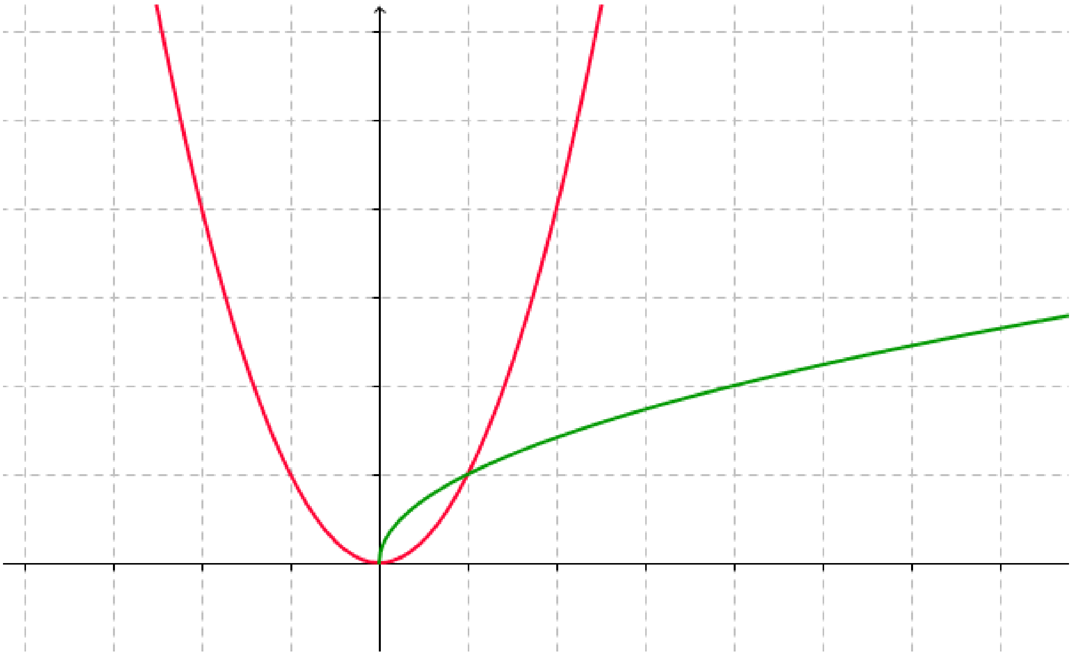
f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \\ k & x \geq 1 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} x^2+ax & x \leq 2 \\ a-x^2 & x > 2 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ x+2a & x > 0 \end{cases}$

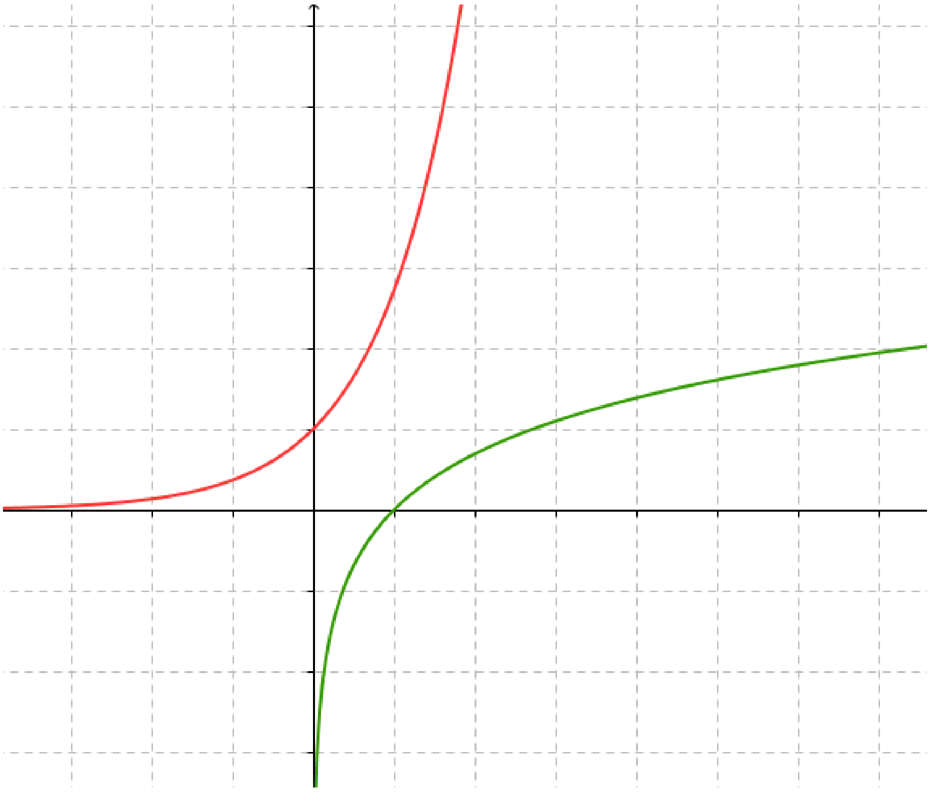
INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES

Si mireu aquesta pàgina web: http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm veureu una mica l'evolució del càlcul diferencial.



Quina de les dues funcions creus que creix més ràpidament la vermella o la verda?

I d'aquestes dues?:



TAXA DE VARIACIÓ MITJANA:

S'anomena taxa de variació mitjana TMV d'una funció y=f(x) en un interval [a,b] el quocient:

$$\frac{variació\ de\ f(x)}{variació\ de\ x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{T.V.M [a,b]}$$

La T.V.M de f(x) en [a,b] és el pendent del segment que uneix els punts A (a, f(a)) i B (b.f(b)):

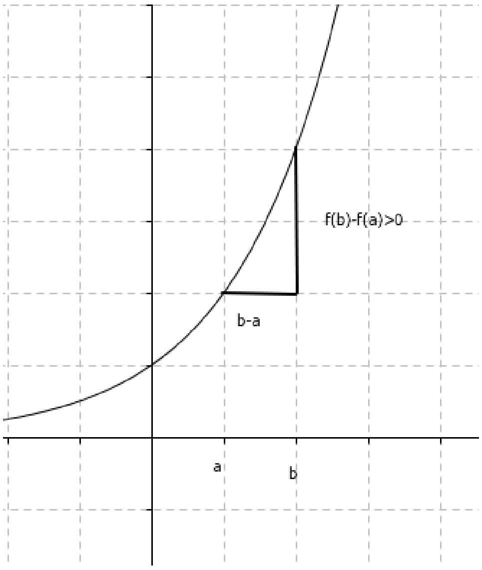
T.V.M [a,b] = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

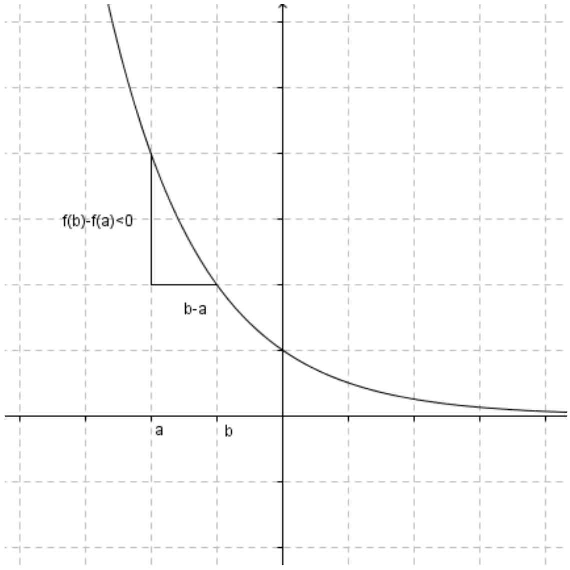
Sovint l'interval es designa mitjançant l'expressió [a, a+h] anomenem així un extrem, de l'interval , a, i la seva longitud, h.

En aquest cas.la taxa de variació mitjana s'obté així:

T.V.M [a,b] = $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Si una funció és creixent en [a,b], la seva taxa de variació mitjana és positiva; i si és decreixent , negativa.





EXERCICIS:

1- Troba la T.V.M de la funció $f(x) = x^2$ en els intervals:
[1,2], [2,5], [3,6], [1,4], [1,6]

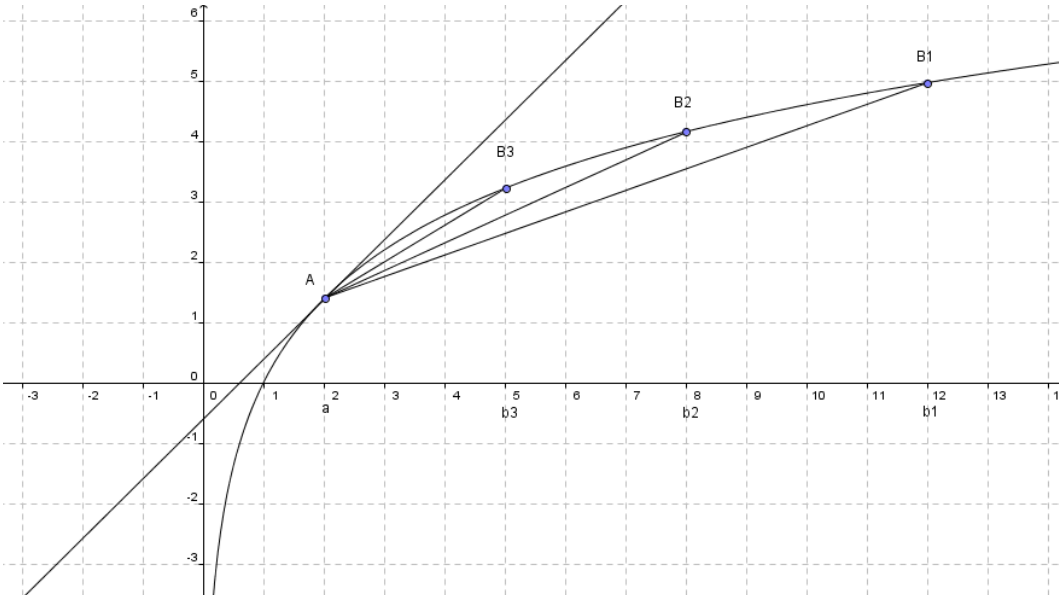
2- Troba la T.V.M de la funció $f(x) = x^2 -3x + 4$ en els intervals anteriors:
[1,2], [2,5], [3,6], [1,4], [1,6]

CREIXEMENT D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT. DERIVADA

El creixement d'una funció en un punt ve donat, de manera natural, pel creixement (el pendent) de la recta tangent a la corba en aquest punt.

Així la mesura del creixement de la funció anterior en els punts on hi ha traçades les tangents ve donada per el valor de la pendent de cadascuna de les rectes tangents.

Relació del creixement en un punt amb la T.V.M:



La T.M.V d'una funció en un interval s'interpreta com el pendent de la corda corresponent. Segons això serà:

T.V.M $[a,b_1]$ = pendent de AB_1

T.V.M $[a,b_2]$ = pendent de AB_2

T.V.M $[a,b_3]$ = pendent de AB_3

....

....

La recta tangent s'obté com a límit de les secants AB_1, AB_2, AB_3,.... quan B_i tendeix a A

Derivada d'una funció en un punt:

El creixement d'una funció en un punt es mesura pel pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt. Es defineix:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$f'(a)$ significa el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció y=f(x) en el punt d'abscissa a.

Si existeix f'(a) es diu que f(x) és derivable en a.

Derivades laterals:

Es defineix la derivada per l'esquerra de f en a:

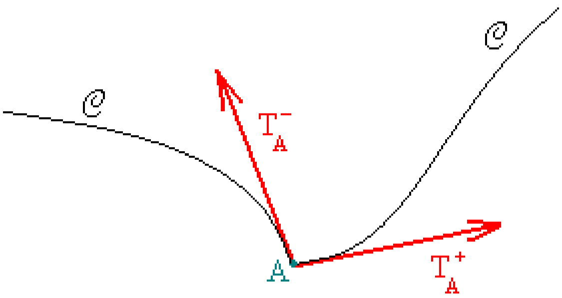
$$\mathrm{f}'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Es defineix la derivada per la dreta de f en a:

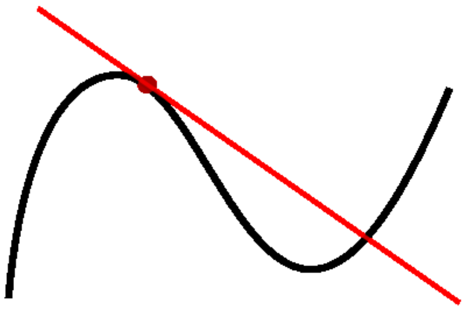
$$\mathrm{f}'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ambdues són anomenades derivades laterals.

Punt angulós:



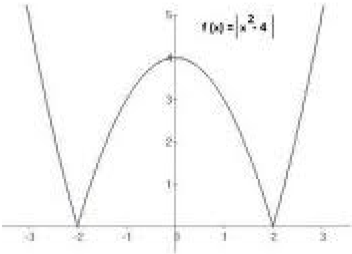
Funció derivable:

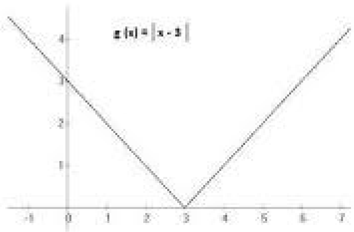


Derivabilitat i continuïtat:

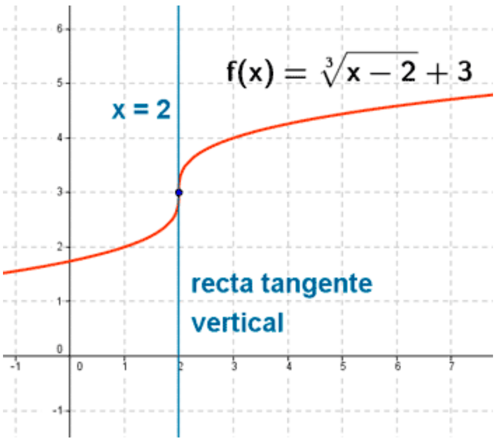
Una funció pot ser contínua en un punt i no ser derivable. És el que passa en els punts angulosos i en els punts de tangent vertical(perpendicular a l'eix X)

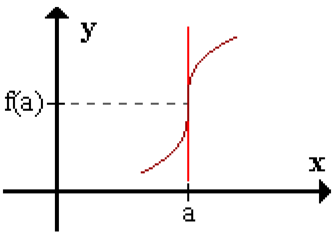
Punts angulosos:





Punts de tangent horitzontal:





Un altre exemple seria en el 0 la funció f(x)=$\sqrt[3]{x}$

Si una funció és derivable en un punt, necessàriament és continua en el punt.

Funció derivada:

La funció que associa a cada abscissa x el valor del pendent (derivada) de la funció f en el punt x s'anomena **funció derivada** de f. L'anomenem f'(x).

Per obtenir la funció derivada de la funció f em de calcular aquest límit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Si una funció, f, és derivable en tots els punts d'un interval I, la funció f' definida en I, s'anomena funció derivada de f en I.

Si f' és derivable, la seva derivada s'anomena f'' (o f segona)

Així successivament, es defineixen f''', f^{IV}, f^{V}, ...f^{n} (f tercera, f quarta, f enèsima)

EXERCICIS: (utilitzant límits)

1- Troba la derivada de la funció y= x^2-3x en els punts d'abscisses x=1 i x=2
2- Troba la derivada de la funció y = $\frac{1}{x+3}$ en els punts d'abscisses x=1, x=-1 i x=3
3- Troba la derivada de la funció y= x^3-5x^2+3x-1 en els punts d'abscisses x=0, x=2 i x=-3.

EXERCICIS: (utilitzant límits)

1-Troba la funció derivada de la funció f(x)=x^2+2x

2-Troba la funció derivada de la funció: f(x)=x^3 +1

3-Troba la funció derivada de la funció: y = $\frac{2}{x+2}$

Regles de derivació:

Funció	**Funció derivada**
$y = K$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tg x$	$y' = \frac{1}{cos^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

EXERCICIS:

1-Deriva successives vegades fins obtenir la funció nul.la.

$y = x^4+7x^3 -3x +6$

2-Deriva les següents funcions:

$$y=(x^3+2x+1)\sin x+3x.\cos x \quad y=\frac{\sin x}{7} \quad y=\frac{\ln x - x^2}{2} \quad y=\frac{x^2-3x+5}{10} \quad y=\frac{2x^2-\log x}{14}$$

$$y=2x^3-8x^4+\frac{1}{2}x^2-100x+5 \quad y=\frac{3x^4-2x^3+5}{6} \quad y=1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2} \quad y=x^2.\sqrt{x^3}$$

$$y=\sqrt[4]{\sqrt{x^3}}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x}} \quad y=\frac{e^x}{x^3+7}+\ln x.\cos x \quad y=x.\ln x.\cos x \quad y=x^3.e^x.\sin x.\cos x \quad y=\frac{x^2\cdot e^x}{\ln x}$$

3-Deriva les següents funcions:

$$y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-3x^3 \qquad y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}-\frac{3}{x\sqrt{x}} \qquad y=\frac{3x}{3x-1} \qquad y=\frac{2x+1}{2x-1}$$

$$y=\frac{2x^2}{3}+\frac{4x}{5}-\frac{1}{6} \qquad y=2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x} \quad y=\frac{x^2}{5x+2} \quad y=\frac{3x}{x-1} \quad y=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$y=2x\cdot sinx-(\,x^2-2)\cdot cosx \quad y=e^x\cdot cosx \quad y=e^x\cdot sinx$$

$$y=(x^2-x+1)\cdot e^x \qquad y=\frac{e^x}{x} \qquad y=\frac{e^x+2}{e^x-1} \quad y=x\cdot 2^x \quad y=3^x\cdot lnx$$

$$y=\frac{lnx}{x^3} \quad y=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad y=\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \quad y=\frac{x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \quad y=x^7\cdot e^x \quad y=\frac{x^3}{e^x}$$

$$y=\frac{x}{lnx} \qquad y=\frac{1}{x}+2\cdot lnx-\frac{lnx}{x} \quad y=x\cdot sinx \quad y=e^x\cdot cosx \quad y=\frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$$

$$y=\frac{6x^5-3^x}{12}$$

Derivades de funcions compostes; regla de la cadena:

D(g∘f)(x) = D(g(f(x)) = g'(f(x))·f'(x)

Regles de derivades compostes: Sigui u funció real

Funció	Funció derivada
y= K	y'=0
y=u	y'=1·u'
y=u^n	y'=nu^{n-1}·u'
y=sinu	y'=(cosu)·u'
y=cosu	y'=(-sinu)·u'
y=tgu	y' = $\frac{1}{cos^2 u}u'$
y=e^u	y'=e^u·u'
y=a^u	y'=a^u·lna·u'
y=lnu	y' = $\frac{1}{u} \cdot u'$
y=$\log_a u$	y' = $\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{lna}$·u'

EXERCICIS:

1- Calcula les derivades de les següents funcions:

$y = \sqrt{1-x^2}$ $y = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$ $y = \frac{1}{(x^2-1)^4}$ $y = (1+x+x^2)^3$

$y = sin^2x - cos^3x$ $y = sinx^2$ $y = sinx + sin^2x + sin^3x$

$y = e^{\sqrt{x^2+1}}$ $y = (x^2+x+1)^5$ $y = (sinx + cosx)^3$ $y = \ln(lnx)$

$y = \sqrt{xe^x + x}$ $y = (1+e^{sinx})^3$ $y = (5-3cosx)^4$

$y = (5x^2+1)^3 \cdot (x^2+x)^4 \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}} \quad y = \sqrt[3]{2+5x^2}$

$y = (1+3x^4)^5 \quad y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \quad y = (x^2-3)^4 \cdot (x^2-5x)^5$

$y = (2x^2-5x)^5 \quad y = (x^2-3)^3 \quad y = x^2 \cdot e^{x^2} \quad y = \ln(sinx + cosx)$

Estudi de la derivabilitat d'una funció definida a trossos:

Donada una f(x) = $\begin{cases} g & x \le a \\ h & x > a \end{cases}$ de manera que g(x) sigui derivable en un interval (p,a) i h(x) sigui derivable en un interval (a,q)

Per saber si f(x) és derivable en x=a farem els passos següents:

1) Comprovarem si f és continua en a (comprovant els límits laterals)
2) Calcularem la derivada per la dreta del punt a i la derivada per l'esquerra del punt a i comprovarem que coincideixen. $f'(a^-)=f'(a^+)$ en cas que això passi aquest és el valor de la derivada en el punt a

Exercici1:

Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 3x-2 & x \ge 2 \end{cases}$$

Estudia la derivabilitat en x=2

Exercici2:

Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5x+m & x \le 1 \\ -x^2+nx & x > 1 \end{cases}$$

Calcula m i n perquè la funció sigui derivable en x=1

Exercici3:

Estudia la continuïtat i la derivabilitat:

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x<1 \\ x^2+x & x\geq 1 \end{cases}$ en x=1

$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ en x=0

$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ x^2-4 & x\geq 3 \end{cases}$ en x=3

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x<1 \\ x^2+x & x\geq 1 \end{cases}$ en x=1

$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x\leq 2 \\ 3x+1 & x>2 \end{cases}$ en x=2

$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & x<2 \\ 3x-6 & x\geq 2 \end{cases}$ en x=2

$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & x\leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ en x=1

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x<0 \\ 1-x & x\geq 0 \end{cases}$

Exercici4:

Calcula els paràmetres pq la funció sigui contínua i derivable:

$(x) = \begin{cases} ax^2+3x & x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & x>2 \end{cases}$

$(x) = \begin{cases} x^3-x & x\leq 0 \\ ax+b & x>0 \end{cases}$

APLICACIONS DE LES DERIVADES

Algunes pàgines interessants:

http://ca.wikipedia.org/wiki/Derivada

http://iespmbroseta.edu.gva.es/04a_matematiques/carpeta_arxius/B2Bsol_t10.pdf

http://www.iescanpuig.com/ewccp/lib/exe/fetch.php?media=mnunez:tema_9._aplicacions_de_les_derivades_t_2n_bat_hs_pdf.pdf

http://es.scribd.com/doc/4059357/aplicacions-de-les-derivadesexer-resolts

Recta tangent a una corba en un dels seus punts:

La obtenció de la recta tangent a una corba en un dels seus punts és l'aplicació més immediata de les derivades, perquè, com sabem, f'(a) és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció y=f(x) en el punt d'abscissa a.

Si f(x) és derivable en x=a, l'equació de la recta tangent a la gràfica de y=f(x) en x=a és:

y=f(a) + f'(a)·(x-a)

Exercicis:

1-Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica en x=3

f(x)=$\frac{x^2-2x}{x+3}$

2-Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f(x)=x^3+x^2+2 que és paral·lela a la bisectriu del primer i tercer quadrant.

3-Troba la derivada de les funcions següents en els punts indicats:

a) y=x^2 en x=3
b) $y = \frac{2}{x-1}$ en x=5
c) $y = \sqrt{x+12}$ en x=13

4-Dibuixa la paràbola y=x^2-5x+8 En quin punt de la gràfica la tangent és paral·lela a la bisectriu del primer i tercer quadrant?

5-En quin punt de la gràfica de la funció y =x^2-6x+8 la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses?

6-Troba les equacions de les rectes tangents a la funció $y = \sqrt{x}$ en els punts x=1 i x=4

7-Troba les equacions de les rectes tangents a la funció $y = \frac{1}{x}$ en els punts d'abscisses x=1 i x=-1

8-Calcula la derivada de $y = \sqrt{3x} - \sqrt{x}$ després el valor de la derivada quan x=1 i per últim l'equació de la recta tangent per x=1

9-Calcula les equacions de les rectes tangents en els punts que s'indiquen:

y=x^3-2x+1 en x=1

$y = \sqrt{x-2}$ en x=6

$y = \frac{2}{x} - \sqrt{x}$ en x=4

10- En quins punts la derivada de La funció $y=2x^3-3x$ és 3

EL CÀLCUL DIFERENCIAL EN L'ESTUDI DE LES FUNCIONS - REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS – OPTIMITZACIÓ:

Monotonia i extrems relatius:

-**creixement**

f és creixent en un punt a si per a tots els punts en un entorn de a (molt a prop de a) es compleix que $f(x)<f(a)$ per a $x<a$ i $f(a)<f(x)$ si $a<x$

si f és derivable i creixent en a aleshores $f'(a)>0$

una funció és creixent en un interval I quan per a dos nombres qualsevol d'aquest interval a i b tals que si $a<b$ aleshores $f(a)<f(b)$

Si f és derivable en tot l'interval aleshores $f' >0$ en tots els punts de l'interval

-decreixement

f és decreixent en un punt a si per a tots els punts en un entorn de a (molt a prop de a) es compleix que $f(x)>f(a)$ per a $x<a$ i $f(a)>f(x)$ si $a<x$

si f és derivable i creixent en a aleshores $f'(a)<0$

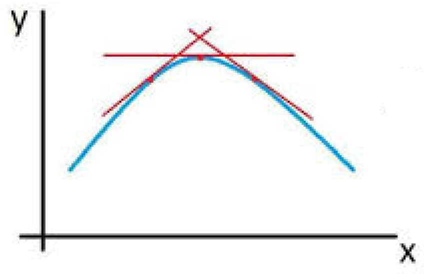
una funció és decreixent en un interval I quan per a dos nombres qualsevol d'aquest interval a i b tals que si $a<b$ aleshores $f(a)>f(b)$

Si f és derivable en tot l'interval aleshores $f' <0$ en tots els punts de l'interval

els intervals de creixement o decreixement s'anomenen **intervals de monotonia**

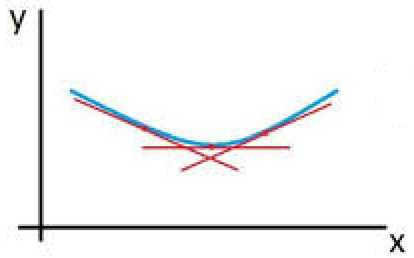
-**Màxim**

Una funció té un màxim local o relatiu en un punt a quan la imatge d'aquest punt supera la dels nombres que té al seu voltant.



-**Mínim**

Una funció té un mínim local o relatiu en un punt a quan la imatge d'aquest punt és més petita que la dels nombres que té al seu voltant.

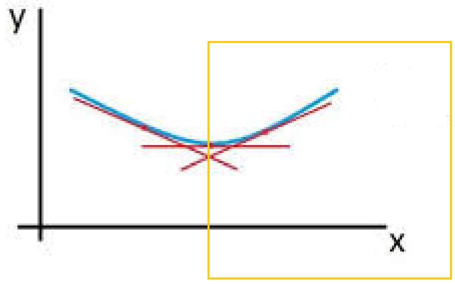


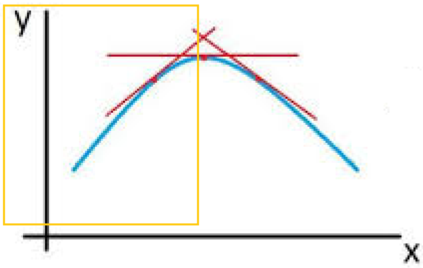
Els màxims i els mínims locals o relatius reben el nom d'extrems **locals de la funció**

Si f és creixent en un interval a l'esquerra d'un punt a i decreixent en un interval a la dreta del punt **a** aleshores hi ha un màxim local de f en el punt a.

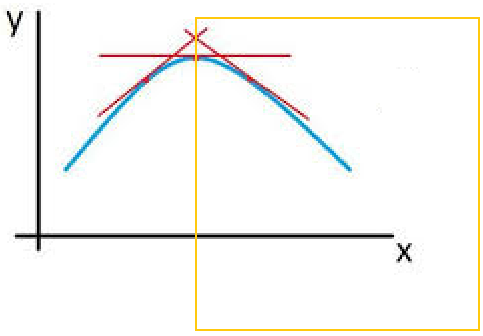
Si f és decreixent en un interval a l'esquerra d'un punt a i creixent en un interval a la dreta del punt **a** aleshores hi ha un mínim local de f en el punt a.

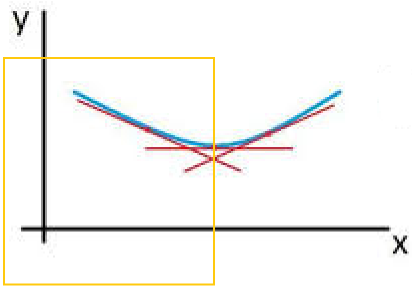
Si α és agut tgα >0 per tant derivada +





Si α és obtús tgα<0 per tant derivada-





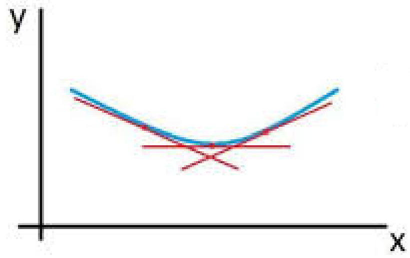
Si f '(x) >0 en un interval I la funció és creixent a I

Si f '(x) >0 en un interval I la funció és decreixent a I

Si f '(x) >0 per x>a

⇒ En x=a la funció té un mínim local

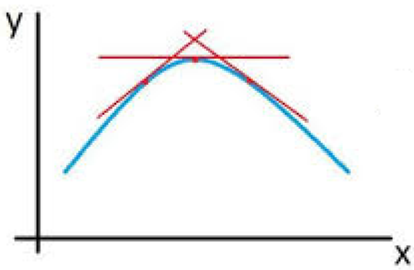
Si f '(x) <0 per x<a



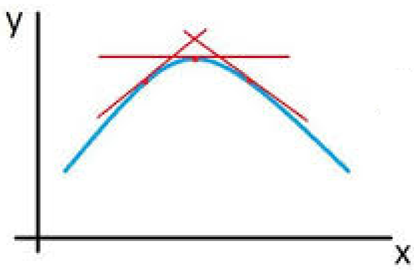
Si f '(x)>0 per x<a

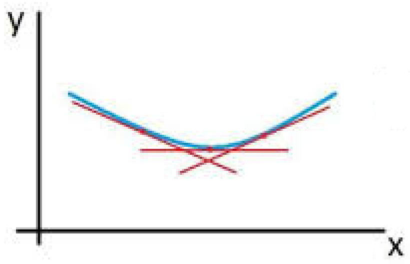
⇒ En x=a la funció té un màxim local

Si f '(x)<0 per x>a



Si una funció té màxims o mínims relatius i es derivable en ells, aleshores la derivada s'anul.la en ells.(Perquè en ells la recta tg és horitzontal)





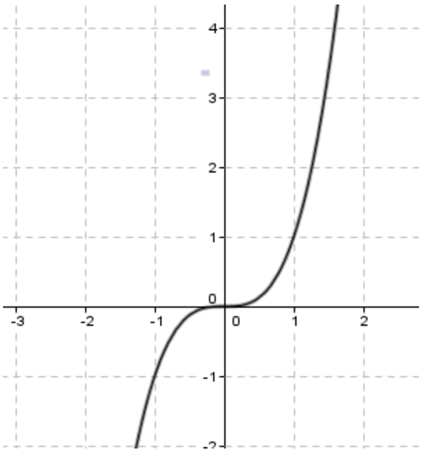
Però els punts on la derivada s'anul.la no són sempre màxims o mínims , dit d'un altre manera els punts que anul·len la primera derivada poden ser:

* Màxims relatius

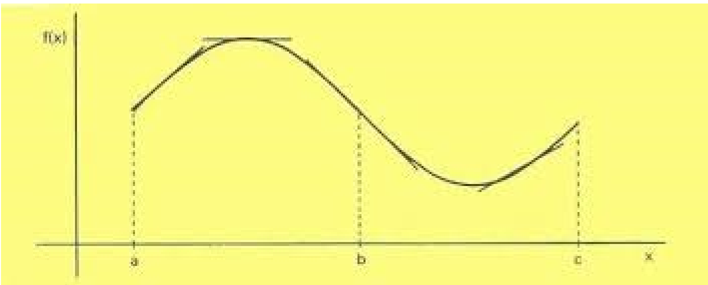
* Mínims relatius

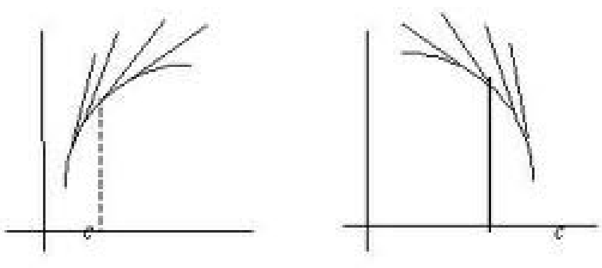
*Punts d'inflexió de tg horitzontal

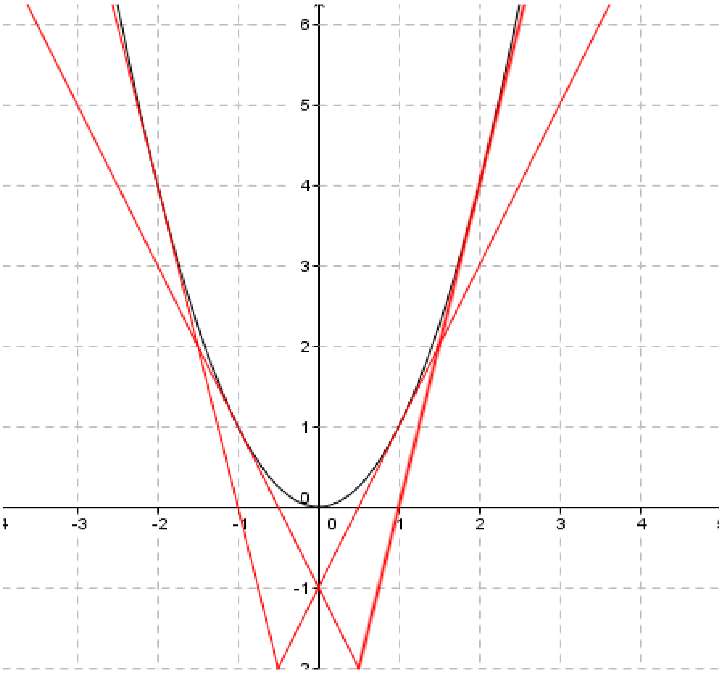
(Cas de la funció $y=x^3$)

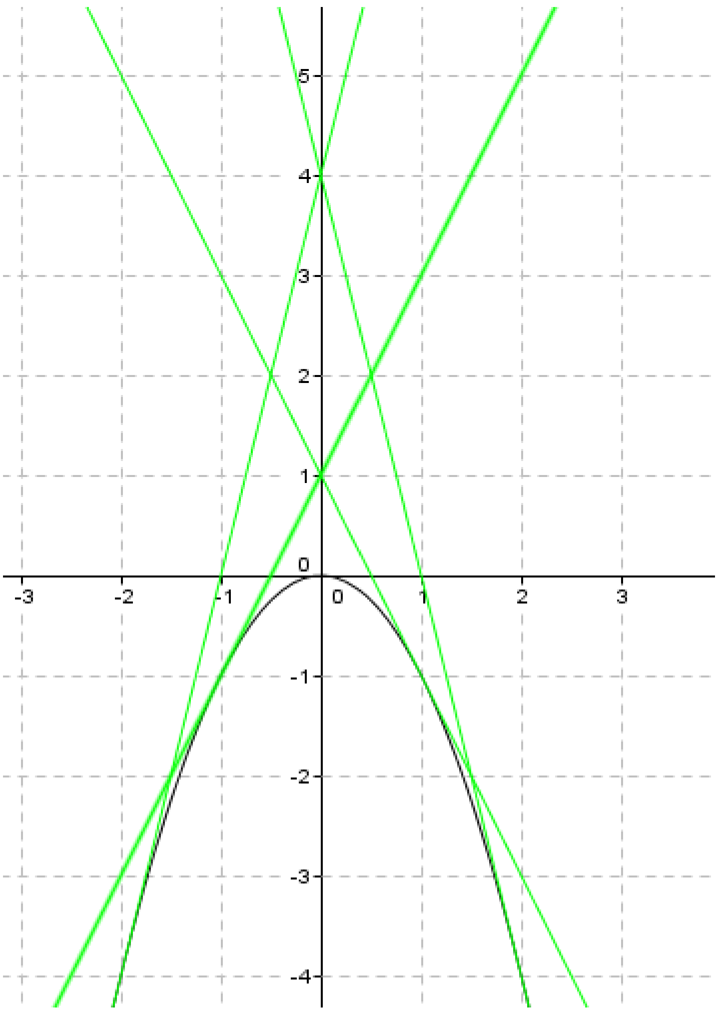


Concavitat i convexitat:






6
5
4
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

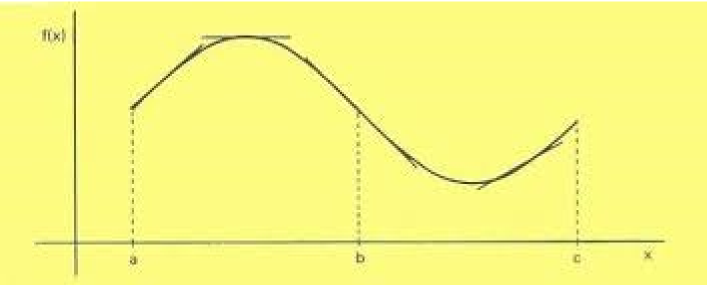
Concavitat:

Una funció derivable en un interval I és còncava en aquest interval quan les rectes tangents al gràfic de la funció en un punt qualsevol de I estan situades sobre el gràfic.

Convexitat:

Una funció derivable en un interval I és convexa en aquest interval quan les rectes tangents al gràfic de la funció en un punt qualsevol de I estan situades sota el gràfic.

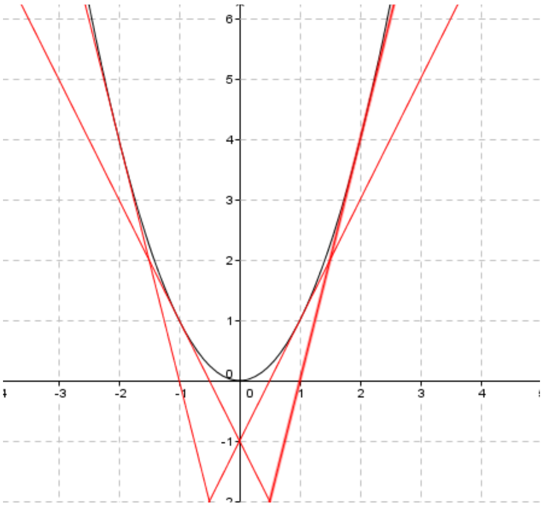
Els intervals de concavitat i convexitat estan separats per punts que s'anomenen **punts d'inflexió** en les quals la recta tangent travessa el gràfic.



(b seria un punt d'inflexió)

Si f '(x) és creixent en un interval I aleshores f(x) és còncava en I

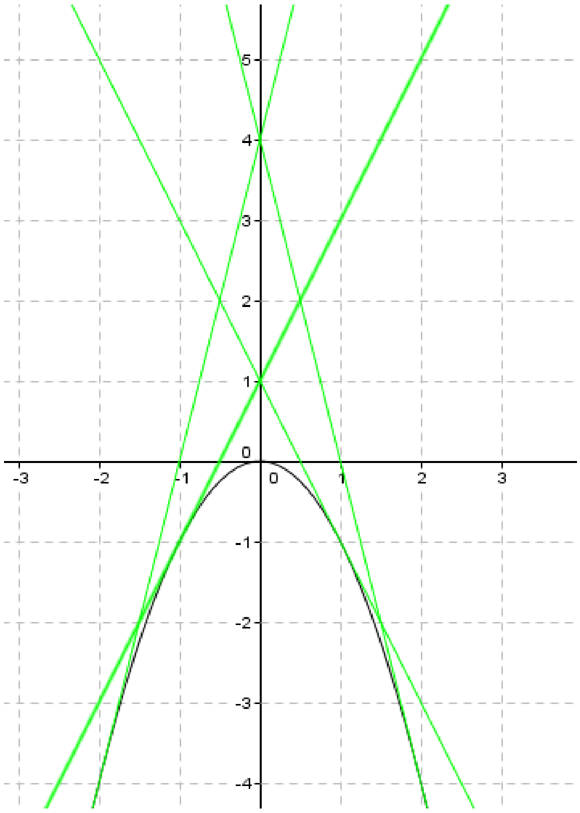
Si f ''(x) >0 aleshores f '(x) és creixent i aleshores f(x) és còncava



Valor de les pendents en: x=-3, -2,-1,0,1 i 2 és: -6,-4,-2,0,2,4 (es veu que van augmentant, per tant la derivada va creixent)

Si f '(x) és decreixent en un interval I aleshores f(x) és convexa en I

Si f ''(x) <0 aleshores f '(x) és decreixent i aleshores f(x) és convexa.



Valor de les pendents en: x=-3, -2,-1,0,1 i 2 és: 4,2,0-2,-4 (es veu que van disminuint, per tant la derivada va decreixent.

Cada punt d'inflexió està situat entre dos intervals de sentit de curvatura diferent i per tant la derivada segona s'anul.la en ells.

Per tant diem que **si un punts és d'inflexió la derivada segona s'anul.la en ell.**

Però els punts on la segona derivada s'anul.la no són sempre punts d'inflexió, poden ser:

-Punts d'inflexió

-màxims o mínims si la 1ª derivada també s'anul.la

-Cap dels anteriors.

Exemple: $y= x^4+2x$ el punt 0 no anul.la la primera derivada però si la segona i no és cap punt d'inflexió. En aquest punt 0 la funció és còncava.

Aplicació a la identificació de màxims i mínims:

Si $f'(a)=0$ i existeix $f''(a)$ aleshores:

$f''(a)>0$ vol dir que f té un mínim relatiu en a

$f''(a)<0$ vol dir que f té un màxim relatiu en a

REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS:

1-Domini:

Son els punts on la funció està definida.

Domini de les funcions elementals:

-Funcions constants i funcions polinòmiques : Domini tots els R

-Quocient de polinomis $y=p(x)/q(x)$ el domini són tots els reals menys els valors que anul·len el denominador . $D= R - \{x/ q(x)=0\}$

-Funcions amb arrel:

$\sqrt[n]{>0}$ $\quad$ *amb n parell*

El domini són tots els reals menys els valors que fan negatiu el radical.

$\sqrt[n]{\mp}$ $\quad$ *amb n imparell*

El domini són tots els reals.

-$y=e^x$ el domini són tots els reals.

-$y=\ln x$ el domin són tots els R^+

-$y= \sin x$ i $y=\cos x$ el domini són tots els reals.

2-Talls amb els eixos

Trobem els punts de tall amb els eixos de coordenades

Farem una taula de valors on posarem, la imatge de 0 i l'antiimatge de 0.

x	y
0	
	0

3-Asimptotes verticals

Tenim que trobar els punts a per als quals limf(x) = $\pm\infty$ quan $x \to a\pm$ (per la dreta o per l'esquerra) i l'asímptota vertical és la recta x=a

-En les funcions polinòmiques no hi ha asímptotes verticals.

- En les funcions quocients de polinomis els possibles valors de a pels quals hi ha una asímptota vertical en x=a són els ceros del denominador.

-En la funció y=lnx en el punt x=0

- En les funcions y= ln(p(x)) en els punts on p(x)=0

-En y=tg(f(x)) resolem f(x)= $\pi/2+k\pi$

4-Comportament a l'infinit ; Asímptotes horitzontals i obliqües

Comportament a l'infinit és mirar que passa quan x tendeix a ∞ i a $-\infty$, es a dir cal estudiar.

limf(x) quan $x \to \pm\infty$

Diem que y= l és una asímptota horitzontal si existeix i és finit algun límit dels anteriors, és a dir quan limf(x)=l quan $x \to \pm\infty$

En les funcions racionals si y=l és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$ també ho és quan $x \to -\infty$, això no passa en altres funcions com per exemple aquelles que tenen radicals o exponencials.

Si el $\lim f(x)=\pm\infty$ quan $x\rightarrow\pm\infty$ és possible que hi hagi una asímptota obliqua (quan el grau del numerador és un grau més gran que el grau del denominador hi ha asímptota obliqua):

És la recta y= mx+n on: $m= \lim(f(x)/x)$ quan $x\rightarrow\pm\infty$ i $n= \lim [f(x)-mx]$ Quan $x\rightarrow\pm\infty$

En les funcions racionals si y=mx+n és asímptota quan $x\rightarrow+\infty$ també ho és quan

$x\rightarrow-\infty$

5- Màxims i Mínims Creixement i Decreixement

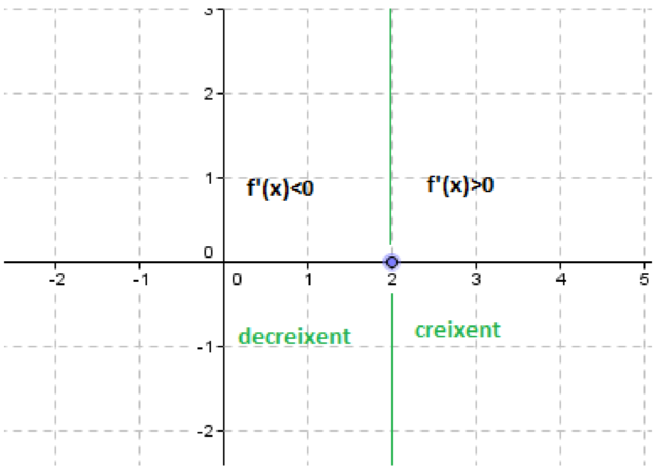
Fem la primera derivada i l'igualem a 0 : $f'(x)=0$

un cop tenim aquest punts els posem sobre la recta i mirem el signe de la derivada entre aquests punts i així podem saber si són màxims , mínims o punts d'inflexió de tangent horitzontal.

Exemple:

$y=x^2-4x+5$

$y'= 2x-4$; $2x-4=0$; $x=2$



Per tant el x=2 és un mínim.

D'aquesta manera coneixem també els intervals de creixement i de decreixement.

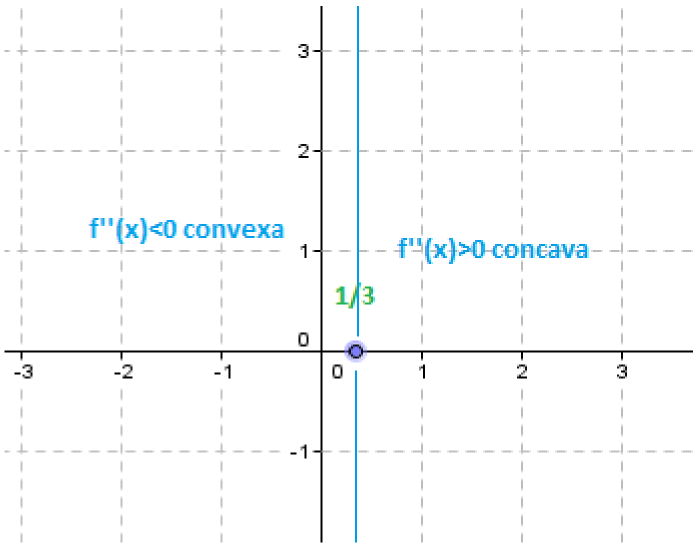
(cal tenir en compte que si la derivada té denominador i aquest és un quadrat per tant sempre positiu els punts que anul·len el numerador son els que separen el creixement del decreixement, si el denominador no és un quadrat cal tenir en compte els punts que anul·len el denominador , que són els punts de discontinuïtat o asímptotes verticals també poden separar els intervals de creixement i de decreixement)

6-Concavitat , Convexitat ; Punts d'inflexió

Fem la segona derivada i l'igualem a 0 : f ''(x) =0

Un cop tenim aquests punts els posem sobre una recta i mirem que passa amb els signe de la segona derivada entre aquests punts, així podrem saber si son punts d'inflexió o no(ja hem dit abans que si també anul.la la 1ª derivada podria ser o un màxim ,o un mínim o punt d'inflexió de tangent horitzontal, però que si no anul.la la 1ª derivada pot ser un punt d'inflexió o no ser-ho.)

Exemple: $y= x^3 -x^2 +1$; $y'=3x^2-2x$; $y''= 6x-2$; $6x-2=0$; $x=2/6$; $x=1/3$



(En les funcions que hi ha denominadors si aquests és un quadrat els punts que anul·len el numerador son els que poden separar la concavitat de la convexitat, però si el denominador no és un quadrat els punts que anul·len el denominador també poden separar la concavitat de la convexitat aquests són els punts de no continuïtat o asímptotes verticals)

7-Simetries:

Si una funció compleix que f(x)=f(-x) és simètrica respecte l'eix y

Si una funció verifica f(-x)=-f(x) llavors la seva gràfica és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

8-Periodicitat:

Les funcions periòdiques que treballarem són les trigonomètriques.

9-Altres aspectes a tenir en compte

-Les asímptotes horitzontals o obliqües poden tallar la funció per tant cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = l \;\; (\,asímptota\ horitzontal) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = mx + n \;\; (\,asímptota\ obliqüa) \end{cases}$$

- Cal mirar els límits en els extrems de l'interval de definició de la funció , és dir si el domini de la funció és (a, b) Cal mirar el límf(x) Quan $x \to a^+$ i quan $x \to b^-$

Si el domini és $(a,+\infty)$ Cal mirar el limf(x) quan $x \to a^+$

Els altres casos són similars.

10-Funcions amb valors absoluts

-Per representar una funció del tipus:

y=$|f(x)|$

representarem la funció y=f(x) i després passarem per simetria tot el tros de la corba que estigui per sota de l'eix x.

-Si les funcions inclouen valors absoluts com ara:

y=$|x-7|+|x+1|$

y=$\frac{1}{1+|x|}$

el que farem serà posar-les com a funcions a trossos i estudiar-les com a tals.

OPTIMITZACIÓ:

La optimització de funcions consisteix en trobar el màxim absolut o del mínim absolut de la funció d'estudi.

Aquest problema és de molta importància teòrica i pràctica en moltes ciències(física , economia, sociologia...)

Comencem trobant primer el domini de definició real del problema que ens plantegem, i un cop ho tenim buscant els valors per als quals la funció pren el màxim o mínim absolut.

El màxims o mínims absoluts poden estar en:

-Els màxims o mínims relatius de la funció , es a dir en els punts on s'anul.li la primera derivada.

-En els punts on la funció no és continua.

-En els punts on la funció no és derivable.

-En els extrems de l'interval real de problema que ens plantegem.

Resum utilitat de la funció derivada:

Quan una funció ens ve donada per la seva expressió analítica y=f(x) la seva derivada f'(x) ens dona la inclinació (el pendent) de la corba en cada punt.

-Càlcul de la derivada d'una funció en diversos punts:

Per trobar la derivada d'una funció en un punt calculem l'expressió general de f'(x) i substituïm la x pel punt que vulguem.

-Obtenció de les abscisses en les quals la derivada té un valor determinat:

Per esbrinar els valors de x per als quals és f'(x) = k obtenim l'expressió general de f'(x) i resolem l'equació f'(x)=0.

-Obtenció de les abscisses dels punts singulars:

S'anomenen punts singulars els punts de tangent horitzontal, es a dir els punts en què la seva derivada és 0. Entre aquests punts trobem els màxims i mínims relatius però en poden haver-hi d'altres. Les abscisses dels punts singulars són les solucions de f'(x)=0.

-Obtenció de trams on la funció creix o decreix:

Si f'(x) > 0 la funció és creixent i si f'(x)<0 la corba és decreixent. Per tant resolen aquestes inequacions s'obtenen els intervals on la corba creix o decreix.

EXERCICIS:

1- Donada la funció: $f(x)=x^3-4x^2+1$

Troba:

a) Els pendents de les rectes tangents a les abscisses en els punts -1,1 i 3.

b) Les equacions d'aquestes rectes tangents.

c) Les abscisses dels possibles màxims i mínims relatius.

d) Els intervals de creixement i decreixement.

2- Escriu l'equació de la recta tangent a la corba: $y = \frac{x}{x+2}$ en x=2

3- Escriu l'equació de la recta tangent a la corba: $y = \frac{3}{x-5}$ en x=0

4- Escriu l'equació de la recta tangent a la corba: $y = \frac{x-3}{x+2}$ en x=1

5- Troba els màxims i mínims i els intervals de creixement i decreixement de la funció: $y=-(x^3/3)+3x^2-8x+16$

6- Troba els coeficients a, b i c de la funció: $f(x)=ax^2+bx+c$ sabent que passa per (0,5) i que té un punt de tangent horitzontal en (2,-3)

7- Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció:

$y=x^3-3x^2$

8- Exercicis trets de Toomates: http://www.toomates.net/

Deriva les següents funcions (1):

9- $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 3x^3 - 2$

10- $f(x) = \sin x - \cos x$

11- $f(x) = 3\cos(x)$

12- $f(x) = \frac{5}{x}$

13- $f(x) = \sin(x)\cdot(3x+1)$

14- $f(x) = \frac{6x-3}{x^2-3x+2}$

15- $f(x) = \cos(3x)$

16- $f(x) = 2^x$

17- $f(x) = \ln(3x - 1)$

18- f(x) = e^{x^2}

Deriva les següents funcions (2):

19- f(x) = $x^6 - 2x^5 - 2$

20- f(x) = sin x + ln (x)

21- f(x) = 4 tan(x)

22- $f(x) = \frac{x}{3}$

23- f(x) = $(x^3+5x+2)\cdot(3x+1)$

24- f(x)= $\frac{x-3}{x^2+2}$

25- f(x) = $\cos(x^2+1)$

26- f(x) = e^x

27- f(x) = l n (3x - 1)

28- f(x) = 2^{x^3}

Deriva les següents funcions (3):

29- f(x) = $5x^4 + 2x^8 - 2$

30- f(x) = log(x) + ln (x)

31- f(x) = $4\sqrt{x^2+5}$

32- $f(x) = -\frac{x}{2} + 5$

33- f(x) = $(x^3+5x+2)\cdot(3x^2+x)$

34- f(x)= $\frac{x+3}{x^2+2x+4}$

35- f(x) = $\tan(x^2+5x+1)$

36- f(x) = e^x

37- f(x) = l n (x - 1)

38- f(x) = $(6x^2+2x-3)^{100}$

Deriva les següents funcions(4):

39- f(x) = $8x^6 - 10x^5 + 3x^2 + 5x + 2$

40- f(x) = x + ln (x)

41- f(x) = 5 tan(x)

42- $f(x) = \frac{x}{3} + 2x + 4x - 6x$

43- f(x) = $(x^3+8x-2)\cdot(x-1)$

44- f(x)= $\dfrac{2x}{x^2+2x+100}$

45- f(x) = sin(4x^2+1000)

46- f(x) = 8^x

47- f(x) = $(3x - 1)^{2010}$

48- f(x) = 2^{x^2}

EXERCICIS:

1. Calcula les següents derivades:

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = 3^x$

2. Calcula les seguetas derivades:

a) $f(x) = x \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

3. Calcula les següents derivades:

a) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

b) $f(x) = \sin^2(x)$

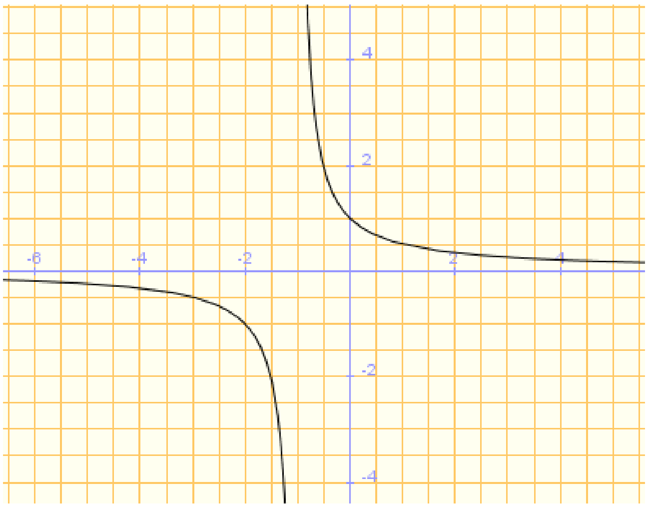
4. Troba l'angle α (en graus) de la funció $f(x) = x^2$ en x=1

5. Troba el punt x on el pendent de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 5$ és igual a 2.

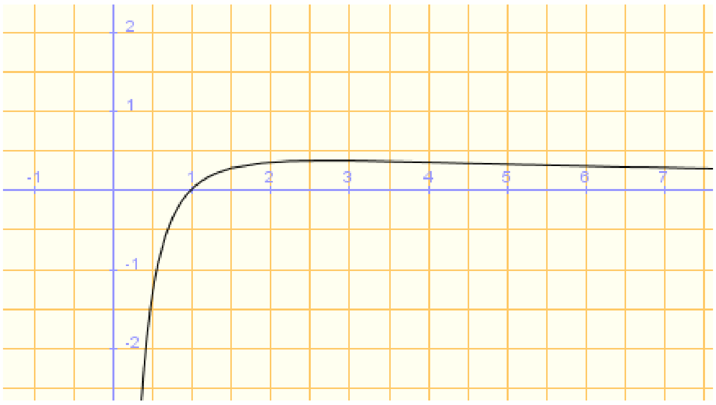
6. Determina la recta tangent $g(x) = ax + b$ a la funció anterior $f(x) = x^2 - 6x + 5$,en x=-1.

7. Determina els extrems de la funció $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

8. Demostra raonadament que la funció $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ és sempre decreixent.



9. Troba el màxim de la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.



EXERCICIS:

Representa les següents funcions racionals (sense fer servir la segona derivada):

1: $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

2: $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$

3: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

4: $f(x)=\dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

5: $f(x)=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

6: $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$

7: $f(x)=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$

8: $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{2x^3}$

9: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$

10: $f(x)=\dfrac{3}{x^3-3x}$

EXERCICIS:

1-Representa gràficament les següent funcions:

a) $y=x^3-3x^2$
b) $y=x^3-3x+2$
c) $y=x^4+4x^3$
d) $y=x^3-9x^2+24x-20$
e) $y=12x-x^3$
f) $y=-x^4+x^2$
g) $y=x^5-6x^3-8x-1$
h) $y=x^4-8x^2+2$

2-Quina és la derivada de $f(x)=2x-8$ en qualsevol punt?

3-Quant ha de valer x perquè la derivada de $f(x)=x^2-6x+5$ sigui igual a 2?

4-En quin punt la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)= x^2-6x+5$ és paral·lela a la recta $y=2x+8$

5-En quins punts la recta tangent a $y=x^3-4x$ té el pendent igual a 8?

6-Escriu les equacions de les rectes tg a la corba: $y = \frac{2x}{x-1}$ que són paral·leles a la recta $2x+y=0$

7-Troba els punts de tangent horitzontal de la funció: $y=x^3-3x^2-9x-1$

8-En quins punts d'y= $y = \frac{1}{x}$ la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del segon quadrant?

Existeix cap punt de tangent horitzontal en aquesta funció?

9-L'equació de la recta tangent a una funció f(x) en el punts d'abscissa x=2 és

$4x-3y+1=0$. Quin és el valor d'f'(2) ? I de f(2)?

10-Troba una funció de segon grau sabent que passa per (0,1) i que elpendent de la recta tangent en el punt (2,-1) val 0.

11-Troba el vèrtex de la paràbola $y=x^2+6x+11$ tenint en compte que en aquest punt la tangent és horitzontal.

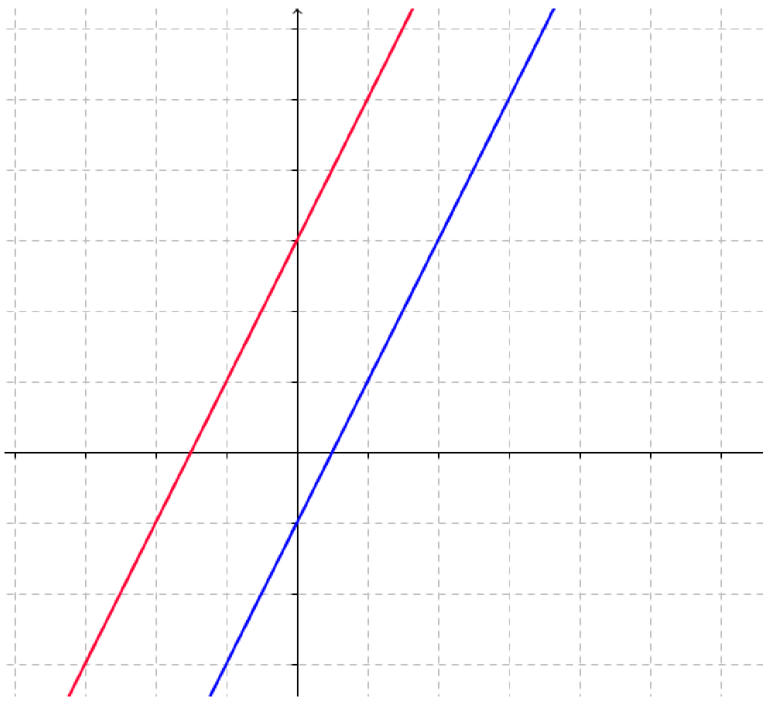
12-Detemina la paràbola que és tangent a la recta $y=2x-3$ en el punt (2,1) i que passa pel punt (5,-2)

13-Troba el valor de x per al qual les tangent a les corbes $y=3x^2-2x+5$ i $y=x^2+6x$ siguin paral·leles i escriu les equacions d'aquestes tangents.

14-Troba el valor d'x per al qual les tangents a les corbes $y=3x^2-2x+5$ i $y=x^2+6x$ siguin paral·leles i escriu les equacions d'aquestes tangents.

15-Troba a,b i c en $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de manera que la gràfica d'f tingui tangent horitzontal en $x=-4$ i en $x=0$ i que passi per (1,1)

16-Quina relació hi ha entre f i g? I entre f' i g'?



17-existeix cap punt de la funció $y=4x-x^2$en què la tangent sigui paral·lela a la recta que passa pels punts (0,0) i (3,3)? En cas afirmatiu troba'l.

18-Si $f'(2)=0$ quina de les afirmacions següents és correcta?

a) La funció té màx o mín en x=2
b) La recta tangent en x=2 és horitzontal
c) La funció passa pel punt (2,0)

19-Un banc llança al mercat un pla d'inversió la rendibilitat R(x), del qual, en milers d'euros, ve donada en funció de la quantitat que s'inverteix, x, en milers d'euros, per mitjà de l'expressió següent:

$R(x)=-0,001x^2+0,04x+3,5$

a) Quina quantitat de diners s'hi ha d'invertir per obtenir-ne la màxima rendibilitat?

b) Quina rendibilitat se n'obtindrà?

MÉS EXERCICIS

1- Representa gràficament les següents funcions:

1: $y = x^3-9x$

2: $y=x^3+3x^2$

3: $y=(x+1)^2\cdot(x-2)$

4: $y=x^4-x^2$

5: $y=x^4-6x^2+5$

6: $y=\frac{4x+5}{2x-3}$

7: $y=\frac{1}{x^2-1}$

8: $y=\frac{x^2}{x^2-4}$

9: $y = \frac{x^2+3}{x^2-1}$

10: $y=\frac{x}{x^2-1}$

11: $y=\frac{x^2+1}{x}$

12: $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

13: $y=\frac{(x-2)^2}{x-3}$

14:y=$\frac{1}{1+x^2}$

15:y=$\frac{x}{x^2+2}$

2- Determina el paràmetre c perquè el mínim de la funció: $y=x^2+2x+c$ tingui d'abscissa x=8
3- Donada la funció $y=x^3+ax^2+5$ busca el valor de a perquè tingui un extrem relatiu en x=2 i digues de què es tracta.
4- La funció $y=3x^2+mx+8$ té un mínim a x=1. Calcula m i el valor del mínim.
5- Busca els valors de a i b perquè la funció $y=x^3+ax^2+b$ tingui un mínim relatiu igual a 3 en x=2.
6- Busca el valor de b i m perquè la corba $y=x^3+bx^2+mx+1$ tingui una inflexió al punt (0,1) i el pendent de la recta tangent valgui 1.
7- Busqueu a i b perquè la funció: $f(x)=x^3+ax+b$ tingui un mínim en el punt (1,1)
8- La funció que determina la corba de demanda d'un producte és: $f(x)=-2x+16$, on x és la quantitat de producte fabricat per unitat de temps i f(x) és el preu en dòlars per unitat. L'ingrés total es defineix com el producte $x \cdot f(x)$

   Dibuixa les funcions f(x) i $g(x)=x \cdot f(x)$ en el primer quadrant.