

## ARREGLANT LA CASA DE CAMP

(Inspirat en les proves d'accés a la Universitat. Curs 2009-2010. Matemàtiques aplicades a les ciències socials)

La Marina és una noia eixerida, resolutiva d'aquelles que sempre esta al lloc adequat en el moment adequat i tothom li demana consell, perquè de ben segur la seva opinió serà l'encertada. La Marina té com un sisè sentit, una intuïció innata que fa que sempre trobi la manera de sortir de l'entrellat.

De vegades la Marina se sent aclaparada per la família, els amics, els veïns, els companys de feina... en general per tot aquell que la coneix; però al mateix temps està molt i molt satisfeta de resoldre tot el que passa per les seves mans.



La Marina i la seva família estan esperant a la notaria que el senyor notari llegeixi el testament de la seva tieta de la Lluna, com tothom la coneixia. La tieta de la Lluna de la Marina era un personatge molt curiós, doncs era una dona amb empenta que havia voltat per arreu del món, tenia una cultura extraordinària encara que la seva feina havia estat la de professora de matemàtiques d'un institut. Per molta gent era una dona llunàtica, perquè anava a la seva i no feia cas dels convencionalismes ni de les enraonies de la gent. No li agradava posar el nas a la vida de la gent, perquè amb la seva pròpia en tenia prou. La Marina era una gran admiradora de la seva tieta i sovint quedava amb ella per anar a dinar o passar una tarda tot passejant pel camp, la platja o la ciutat.

La tieta de la lluna de la Marina havia mort d'un atac de cor gairebé sense adonar-se, com sempre havia desitjat. Ella havia estat amb el cap clar fins l'últim moment.

Estimava molt la Marina i li deia que la curiositat i les ganes d'aprendre i viure no les perdés per res del món ja que segons ella era lo mes valuós que teníem les persones, la vitalitat!!!



La tieta de la Lluna tenia molta afició per les perles i en els seus llargs viatges sempre comprava collarets de perles.

### PROBLEMA 1

La tieta havia deixat escrit que repartissin a parts iguals el nombre de collarets entre les dones de la família. Però la Marina ràpidament va veure que aquesta era una tasca impossible i a més va afegir:

Si fóssim dues dones més a la família ens tocaria un collaret per cap i si en comptes d'això la tieta de la Lluna tingués tres collarets més ens tocarien dos collarets per cap essent les que som.

Sabríeu dir-me quantes dones eren a la família i quants collarets tenia la tieta de la Lluna?

## PROBLEMA 2

Com bé veureu al problema anterior el que heu de resoldre és un sistema d'equacions de dos equacions i dues incògnites. Aquests sistemes es poden resoldre pels mètodes habituals de reducció, igualació i substitució o també pel mètode de Gauss( que en realitat és el mètode de reducció quan es tracta de dues equacions i dues incògnites).

També deveu saber que els sistemes es poden resoldre matricialment:

$$\begin{cases} ax + by = n \\ cx + dy = m \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

Per això no aniria malament que aprenguéssiu a calcular matrius inverses i productes de matrius que és el necessari per resoldre els sistemes matricialment.

Per tant calculeu la inversa de les següents matrius si és possible:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Apliqueu el càlcul de les inverses per calcular X si  $A \cdot X \cdot B = C$

El que més il·lusió va fer a la Marina va ser que la tieta de la Lluna els va deixar a ella i el seu xicot la fabulosa casa de camp al Baix Camp on tant i tants moments agradables havien passat tots plegats. Havia començat essent una caseta de tros com anomenaven la gent de la terra i ella, la tieta de la Lluna, amb molt de gust i molta feina havia anat arreglant i posant al seu estil. Ja feia temps que la tieta de la Lluna no hi anava i per tant la casa estava abandonada. Abans de poder-hi anar calia fer unes quantes reparacions, però la Marina i el seu xicot van decidir posar-s'hi.



El seu xicot volia saber com era la piscina, però en aquells moments era inabastable ja que havien construït una tanca envoltant-la per evitar accidents de persones, en especial nens que anessin per allà ja que la finca no estava tancada ( era un espai obert).

La Marina va dir al seu xicot, en Pau: -De totes maneres la tieta un dia tot parlant de la piscina m'havia dit que era el doble de llarg que d'ampla i que l'amplada era un metre més que la profunditat ja que ella mateixa l'havia dissenyat com un ortoedre perfecte. Ningú que no sabés nadar no podia posar-s'hi ja que era bastant fonda. Bé podien fer servir maneguets o flotadors tots aquells que no sabessin nadar. Ah! I em va dir que cabien 36000 litres d'aigua?

### PROBLEMA 3

Sabries dir a quants  $m^3$  equivalen els 36.000 litres d'aigua. Sabries trobar les dimensions de la piscina?

#### PROBLEMA 4

Remenant per la casa va entrar al magatzem ple de coses però totes elles ben endreçades ( estris de jardineria, rajoles en capsos, mobles de jardí i de casa, productes químics per plantes...)

Dins unes capsos van trobar unes rajoles per piscina meravelloses, gairebé semblaven de mosaic romà. En Pau de seguida va dir: -Aquestes rajoles m'encantaria posar-les a la piscina, són perfectes!!

Van fer càlculs dels metres quadrats de rajoles que tenien, ja que hi havia 20 capsos de  $2\text{m}^2$  de rajoles cada una.

Suposant que la piscina es pogués retocar tota llevat la profunditat ( 2m)

Quines dimensions hauria de tenir per tal d'aconseguir un volum màxim i aprofitar totes les rajoles per a les parets ja que el fondo el volien d'un altre material més modern.

#### PROBLEMA 5

Quines dimensions hauria de tenir la piscina si es pogués retocar tota inclús la profunditat i volguessin que l'amplada fos un metre més que la profunditat i la llarga indiferent si també voguessin aprofitar les rajoles de mosaic romà per a les parets i no per la base ja que pensaven posar-hi un material més modern.

Representa gràficament la funció volum. Pots fer el gràfic amb el programa Geogebra o bé amb el Wolfram-Alpha <http://www.wolframalpha.com/>

## PROBLEMA 6

Com veieu les funcions polinòmiques són molt interessants per tal de resoldre molt tipus d'exercicis es per això que el seu estudi es treballa àmpliament al currículum del batxillerat.

Per tant a veure si podeu amb aquest:

Sigui la funció polinòmica  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$

Calculeu a i b sabent que la gràfica passa per ( 1,-1) i té un extrem relatiu en  $x=-2$

Un cop coneguis a i b troba tots els extrems relatius i fes un petit esbós de la funció. Pots fer el gràfic amb el programa Geogebra o bé amb el Wolfram-Alpha <http://www.wolframalpha.com/>



## PROBLEMA 7

La Marina i en Quim van a la botiga de plantes per veure les ofertes d'arbres , plantes i flors. Estan decidits a comprar-ne moltes de tots tipus per posar el jardí a to.

Van veure dos tipus de lots que els van interessar:

Lots de tipus A ( 2 arbres, 1 arbust i quatre torretes de flors) a 50€

Lots de tipus B ( 4 arbres, tres arbustos i 8 torretes de flors) a 100€

El noi de la botiga els diu que per raons d'existències de lots de tipus A no se'n poden agafar més de dos i que entre tots dos lots no en poden prendre més de 5

( normes de la casa).

Podríeu dir-nos quants lots de cada tipus intentaran vendre els de la botiga a la Marina i a en Quim per redecorar el seu jardí per tal d'obtenir el màxim benefici? Ja sabeu que la Marina és molt espavilada i de ven segur que va fer els càlculs en un bufar i fer ampolles. ( la Marina sense adonar-se'n anava fent càlculs mentalment per tal de saber quin seria el màxim benefici per la botiga. Series tu un bon venedor???)

## PROBLEMA 8

Mentre estaven esperant a l'embalatge de les plantes que havien comprat l'amo de la botiga estava parlant amb uns proveïdors sobre uns arbres molt especials i altament exòtics que venien del Japó.

Li deia que per cada arbre de mida petita podia guanyar 100€ i per cada arbre de mida gran podí guanyar 150€ si els venia seguint les següents pautes:

- 1) Has de vendre entre 50 i 150 arbres de mida gran.
- 2) Has de vendre almenys tants arbres de mida petita com de mida gran.
- 3) No vendre més de 500 arbres de mida petita ( problemes d'existències)

Quants arbres creieu que ha de vendre la botiga per obtenir el benefici màxim?



La Marina i en Quim volen comprar cadires per posar al voltant de la piscina i també pel porxo de la casa i els han parlat d'un centre comercial on fan ofertes de mobles de jardí.

Quan entren a la botiga en veuen unes que els agraden molt ja que són extensibles a gandules i tenen un disseny molt i molt actual.

La Marina es fixa en l'oferta que és molt especial, tant especial com les gandules. No havia vist mai una oferta com aquesta:

#### PROBLEMA 9

Les cadires valen 40€ cadascuna però si en compres 1 et fan un 1% de descompte. Si en compres dues et fan un 2% de descompte. Si en compres 3 et fan un 3% de descompte.... Si en compres 10 un 10% i així successivament.

No se'n poden comprar més de 75.

També els diuen al centre comercial que cal afegir 2€ de taxes.

- Si compren 10 cadires. Quant es gasten?. Quin seria el preu per cadira?
- Si compren  $x$  cadires. Quant es gasten?. Quin seria el preu per cadira?
- Troba la funció que indica el preu d'una cadira en funció del nombre de cadires que compren i estudia el domini real d'aquesta funció segons el context, les asímptotes, els Màxims i mínims relatius...
- Digues quantes cadires has de comprar per a obtenir el mínim preu per cadira. Sabem que com a màxim se'n poden comprar 75 cadires)



- e) Utilitzant el geogebra i adequant els eixos i l'escala fes una gràfica d'aquesta funció que t'ajudarà a interpretar la situació. Què veus?
- f) Si enlloc del geogebra utilitzessis el programa <http://www.wolframalpha.com/> què veuries? Parla de les asímptotes obliqües.
- g) Ja saps que no se'n poden comprar més de 75 cadires. Què passaria si se'n poguessin comprar 100? A quin preu sortirien? I si se'n comprassin més de 100 ens haurien de retornar diners? Tu que creus?

#### PROBLEMA 10

Com heu vist estudiar funcions com la que ara us proposaré és un model molt freqüent en matemàtiques i sorgeix quan ens plantegem un problema senzill.

Aleshores a la vista de la següent funció responeu les preguntes plantejades:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

- a) En quin punt de la gràfica de la funció la recta tangent a la gràfica de f és paral·lela a la recta  $2x - y - 3 = 0$
- b) Calculeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció, si n'hi ha, i feu un esbós de la gràfica de la funció de f.

La Marina i el seu xicot estan espantats perquè han dit per la tele que hi ha una invasió de mosques de la fruita i que hi ha plagues per tot arreu!!!  
 La població està espantada i les autoritats competents sembla que s'han posat a la feina. Nombrosos biòlegs i especialistes d'arreu del món estan analitzant les causes i les possibles solucions.



En Pau llegeix en una revista científica que el creixement de les mosques segueix la funció logística i troba un exemple que li comenta a la Marina que sap que aquestes coses li agraden molt:

#### PROBLEMA 11

-Mira Marina, li diu en Pau:

Si col·loquem mosques de la fruita en una ampolla de mig litre amb un plàtan a dins ( com aliment) i plantes de fongs ( com aliment i estímulo per a què posin ous) es suposa que la població de mosques  $P$  en funció del temps que passa en dies segueix la següent funció:

$$P(t) = \frac{230}{1 + 56.5e^{-0.37t}}$$

-Marina!, sabries contestar aquestes preguntes?

- Quina és la capacitat de manteniment de l'ampolla de mig litre, es a dir, quin és el valor de  $P(t)$  quan  $t \rightarrow \infty$ ?
- Quantes mosques es van col·locar inicialment a l'ampolla?
- Quan arribarà a 180 la població de mosques?

d) Fes una gràfica de  $P(t)$  si vols pots utilitzar el Geogebra o un altre programa. (es millor utilitzar aquest programa que fer-la manualment)

## PROBLEMA 12

Com veieu la funció exponencial és present en moltes situacions quotidianes:

Resol el següent problema:

Donada la funció  $f(x)=xe^x$

- Per quins valors és  $f(x)<0$ , per quins és  $f(x)>0$  i per quins  $f(x)=0$
- Estudia el creixement i el decreixement de la funció. En  $x=1$  és creixent o decreixent?