

## MATEMÀTIQUES I MEDICINA

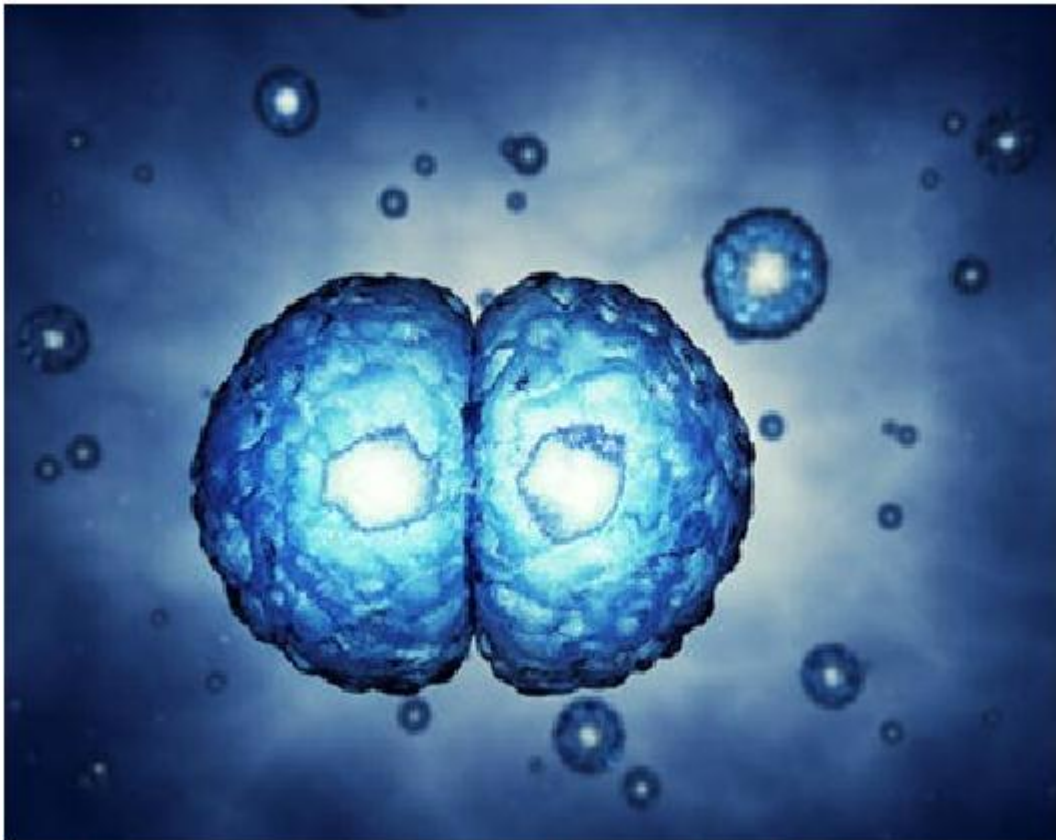
L'altre dia com tants d'altres estava jo pensant en la manera de fer entendre als meus alumnes que les matemàtiques estan a la base de la natura, la societat i de tants i tants fenòmens que ens envolten. Era diumenge estava jo en un estat de desànim mirant per la xarxa com qui no vol la cosa, fent això en comptes d'anar a la platja o passejar-me per la muntanya...No estava molt centrada i rellegia les pàgines en diagonal fins que vaig anar a parar no em digueu com a la següent pàgina:

[http://netlizama.usach.cl/Apuntes%20Medicina%20\(Veronica\).pdf](http://netlizama.usach.cl/Apuntes%20Medicina%20(Veronica).pdf)

de Veronica Poblete Oviedo “Matemáticas en la Salud”

Em va semblar “genial” justament el que estava buscant. Aquesta persona havia escrit un llibre de matemàtiques pels alumnes de biologia-medicina explicant amb molta claredat la interrelació d'ambdues matèries. No he pogut passar sense fer-ne us i l'he fet servir com a base dels nous exercicis creats per treballar la matèria:

“matemàtiques aplicades a les ciències socials” encara que en aquest cas treballem les ciències naturals.



Us explico a continuació alguns fragments:

*Pels essers vius el punt de partida és la cèl·lula: un minúscul polsim de protoplasma contingut dins una prima membrana, però d'una estructura especialitzada i complexa. Una membrana pot dividir-se en dos, formant cada meitat una nova cèl·lula completa*

*capaç de reproduir-se de nou i així indefinidament. “les cèl·lules es multipliquen dividint-se” “Sona a matemàtiques?” La forma de la cèl·lula abans, durant i després de la reproducció és matemàtica. Un cercle, un tall transversal, en el cercle apareix una cintura que es va estretint, s’estrangula en una figura en forma de vuit i es trenca per crear dos cercles.*

*Un altre exemple és la natura matemàtica del regne vegetal, la notable numerologia i geometria de les plantes, la distribució de les seves fulles al llarg de la tija, les figures espirals formades a les llavors, el nombre de pètals...*

*La molècula de la hemoglobina, que recull l’oxigen dels pulmons el porta a la sang i l’allibera on és necessari. Aquesta funció depèn de la forma de la molècula, de la seva geometria tridimensional. La forma és una conseqüència de les lleis de la física i la química que s’expressen a través de la matemàtica.*

Ara un recull de problemes del mateix llibre que amb les eines que conformen el curs fàcilment els resolldrem:

### **Àlgebra lineal:**

- 1- Un farmacèutic ha de preparar 15 ml d’unes gotes pels ulls per un pacient amb glaucoma. La solució de les gotes ha de contenir 2% d’un ingredient actiu però el farmacèutic només té una solució al 10% i una altra al 1% al magatzem. Quina quantitat de cada tipus de solució ha de fer servir de cada tipus de solució per preparar la recepta?  
Sol: ( 13,334 d’una i 1,667 de l’altra)
- 2- En certa prova mèdica, dissenyada per mesurar la resistència als carbohidrats, un adult beu 7ml d’una solució de glucosa al 30%. Quan se li administra la mateixa prova a un nen cal disminuir la concentració de glucosa. Quina quantitat d’una solució al 30% de glucosa i quina quantitat d’aigua cal utilitzar per preparar 7ml d’una solució al 20% de glucosa?
- 3- Per preparar la Teofilina, que és un medicament contra l’asma, s’utilitza un elixir amb una concentració del fàrmac de 5mg/ml, i un xarop amb gust a cirera que es posa per dissimular el gust del medicament. Quina quantitat de tots dos cal utilitzar per preparar 100ml de solució amb una concentració del medicament de 2mg/ml?
- 4- Un químic té 10ml d’una solució que conté 30% de concentració d’àcid. Quants mil·lilitres d’àcid pur han d’agregar-se per augmentar la concentració al 50%?

## Funcions:

- 1- Es realitzarà un escàner a malalts crònics de pulmó. pe això es subministrarà a cada pacient un líquid de contrast. El percentatge residual en el cos en funció del temps mesurat en hores és  $p = -2t^2 + 8t$ . Es requereix una concentració mínima d'un 6% per a poder fer l'examen. Si li administrem el contrast a les 12.00 A.M. Entre quina hora és possible fer l'examen?
- 2- Una persona s'ha intoxicat al ingerir accidentalment un medicament caducat. S'estima que el percentatge de sang contaminada t hores després de que passi la intoxicació és  $P = 18t - t^2 + 6$ . Es considera el pacient en risc vital quan el percentatge de sang contaminada és més d'un 62%. En quin interval de temps passa aquesta situació? Fes un esquema del gràfic de la funció per trobar la solució.
- 3- L'activitat física produeix a llarg termini un augment del pes del fetge i volum del cor. Suposi que es té un fetge de 280 grams de volum cardíac 850 ml i que per un fetge de 350 grams el volum cardíac és de 990 ml. Suposant que existeix una relació lineal entre la massa hepàtica i el volum del cor, determini la funció del volum cardíac en termes de la massa hepàtica.
- 4- Un investigador en fisiologia estableix que la funció  $r(s) = -s^2 + 12s - 20$  és un model matemàtic que descriu el nombre d'impulsos emesos per una persona després que s'hagi estimulat un nervi. La variable s és el nombre de segons transcorreguts des de que hem estimulat el nervi. Feu la gràfica de la funció i interpreteu-la en el context del problema.
- 5- De vegades els fisioterapeutes descobreixen que el procés de rehabilitació es caracteritza per un efecte de rendiments decreixents. És a dir, la recuperació de la funcionalitat acostuma a augmentar amb la duració del programa terapèutic, però amb el temps el millorament es cada vegada més petit en relació amb els esforços addicionals del programa. Per a una incapacitat particular, els terapeutes han ideat una funció que descriu el cost C d'un programa terapèutic en terminis del percentatge de la funcionalitat recuperada x donada per:  
$$Y = \frac{5x}{100-x}$$
 on C es mesura en milers d'euros. Troba el domini, el recorregut i gràfic de la funció i interpreta el gràfic en el context de problema.
- 6- Un pacient amb càncer rebrà teràpia mitjançant fàrmacs i radiació. Cada centímetre cúbic de medicament que s'utilitzarà conté 200 unitats curatives i cada minut d'exposició a la radiació proporciona 300 unitats curatives. El

pacient requereix 2400 unitats curatives. Si  $d$  centímetres cúbics de la droga i  $r$  minuts de radiació són administrats, determineu la funció lineal que relaciona  $d$  i  $r$ . Feu el gràfic de la funció.

7- En cert experiment d'aprenentatge involucrant repetició i memòria es va estimar que la proporció  $p$  d'elements recordats es relacionava linealment amb un temps d'estudi efectiu  $t$  ( en minuts). Per un temps d'estudi efectiu de 5min, la proporció d'elements recordats va ser de 0.32. Per cada minut més en el temps d'estudi, la proporció recordada augmentava en 0.059. trobeu la funció lineal de  $p$  en termes de  $t$ . Fes el gràfic i interpreta els resultats.

8- Es varen estudiar els efectes nutricionals sobre rates que van ser alimentades amb una dieta que contenia un alt grau de proteïna. La proteïna consistia en llevat i farina de blat de moro. Si variàvem el percentatge  $p$  del llevat a la barreja de proteïna es va estimar que el pes mitjà guanyat en grams d'una rata durant un temps va ser de:

$$f(p) = -\frac{1}{50}p^2 + 2p + 20$$

Trobeu el màxim pes guanyat.

9- El consum d'oxigen, en mil·límetres per minut, per una persona que camina a  $x$  quilòmetres per hora, està donat per la funció:

$$f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 10$$

Mentre que el consum d'oxigen per a una persona que corre a  $x$  quilòmetres per hora està donat per:  $g(x) = 11x + 10$

Fes els gràfics de  $f$  i  $g$ .

A quina velocitat és idèntic el consum d'oxigen per a una persona que camina i per a una altra que corre?

Què passa amb el consum d'oxigen per totes dues persones a velocitats més grans que la determinada anteriorment?

10- Les vitamines A-C-E es troben concentrades en l'organisme en un 0.06% per  $\text{cm}^3$  de líquid corporal. Si s'ingereixen vitamines A-C-E de manera addicional degut a algun tractament el percentatge de concentració en  $\text{cm}^3$  de líquid corporal està donat per la funció:

$$f(t) = \frac{t + 6}{100 - t}$$

On  $t$  representa el temps de tractament en mesos. Feu el gràfic de la funció i indiqueu el domini i el recorregut i interpreteu-lo en el context del problema.

11- Per a una relació particular hoste- paràsit, es va determinar que quan la densitat dels hostes ( nombre d'hostes per unitat d'àrea) és  $x$ , el nombre de paràsits és  $p$ , on:

$$p(x) = \frac{900x}{10 + 45x}.$$

Feu el gràfic de la funció i interpreteu els resultats en el context de problema. Què passa amb el nombre de paràsits quan la densitat d'hostes és molt gran?

- 12- Per estudiar la taxa a la qual aprenen els animals, un estudiant de psicologia va realitzar un experiment, de manera reiterada enviava una rata d'un extrem a l'altra d'un laberint de laboratori. Suposi que el temps requerit per la rata per travessar el laberint a l'enèsima prova és aproximadament:

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n}$$

f(n) en minuts.

- Domini de f
- Per a quins valors de n té sentit la funció en el context de l'experiment?
- Quin temps va fer la rata a la tercera prova?
- A quina prova va travessar la rata per primera vegada el laberint en quatre minuts o menys?
- Podrà la rata travessar el laberint en menys de tres minuts?

- 13- Una bactèria a l'oïda mitjana s'incrementa a raó del 2% cada hora.

Suposem que a l'inici d'una infecció bacteriana hi havia 120 bacteris. Determineu els nombre de bacteris  $N(t)$  presents després de t hores. Quants bacteris estan presents en l'organisme després de 2h? Utilitzeu aquest model:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

- 14- S'ha determinat experimentalment que la majoria de substàncies radioactives es desintegren exponencialment, de manera que la quantitat d'una mostra de mida inicial  $N_0$  que perdura després de t anys està donada per la funció:

$N(t) = N_0 e^{-kt}$ . La constant positiva k mesura la taxa de desintegració, però aquesta taxa generalment està donada a l'especificar la quantitat de temps t necessari per a què es desintegri la meitat de la mostra. Aquest temps s'anomena període radioactiu o vida mitjana de la substància. Podem calcular explícitament el període radioactiu:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-kt} \quad \text{de donde} \quad t = \frac{\ln(2)}{k}.$$

El iode radioactiu té un període radioactiu de 20.9 h. Si s'injecta a la sang el iode s'acumula a la glàndula tiroides.

- Després de 24h un metge examina la glàndula tiroides d'un pacient per a determinar si el seu funcionament és normal. Si la glàndula tiroides ha

absorbit tot el iode. Quin percentatge de la quantitat original s'hauria de detectar?

- b) Un pacient torna a l'hospital 25h després d'haver rebut una injecció de iode radioactiu. El metge examina la glàndula tiroides del pacient i detecta la presència de 41,3% del iode original. Quant de iode radioactiu queda a l resta del cos del pacient?

15- La població en milers d'una colònia de bacteris  $t$  minuts després de la introducció d'una toxina està donada per la funció:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ -8t + 72 & \text{si } t \geq 5 \end{cases}$$

- a) Quina és la població passats dos minuts?  
b) Quan mor la població?  
c) És continua la funció  $P(t)$ ? Justifica-ho.

16- Un biòleg va realitzar un experiment sobre la quantitat d'individus en una població de paramecis en un mitjà nutritiu i va obtenir el següent model:

$$g(t) = \ln(t^2 - 2t + 5)$$

On  $t$  es mesura en dies i  $g(t)$  és el nombre d'individus al cultiu. Indiqueu després de quant de temps el nombre d'individus a la població és mínim.

17- Un article en una revista de sociologia afirma que si ara s'iniciés un programa específic de serveis de salut aleshores al cap de  $t$  anys,  $N$  milers de persones adultes rebria beneficis directes, on:

$$N = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t; \quad 0 \leq t \leq 8$$

Per quin valor de  $t$  és màxim el nombre de beneficiaris?

18- La concentració  $C$  de cert producte químic a la sang,  $t$  hores després de ser injectat al teixit muscular és:

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$$

Quan és màxima la concentració?

