LÍMITS

Exercici n. 1.-

Representa gràficament i explica el significat de l'expressió:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-1}{x^2+2x} = 5$$

Solució:

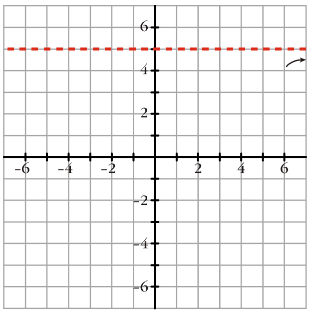
Podem aconseguir que $\frac{5x^2-1}{x^2+2x}$ estigui tan pròxim a 5 com vulguem donant a x valors suficientment grans.

Amb més precisió:

Donat $\varepsilon > 0$, podem trobar un nombre h tal que, si $x > h$, llavors

$$\left| \frac{5x^2-1}{x^2+2x} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Representació:



Exercici n. 2.-

Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x\to+\infty} \left[x^3 - \log x\right]$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{x^2+1}$

Solució:

a) $\lim_{x\to+\infty} \left[x^3 - \log x\right] = +\infty$

Perquè les potències són infinits d'ordre superior als logaritmes.

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{-x}}{x^2+1} = \frac{0}{+\infty} = 0$

Exercici n. 3.-

Obtén el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

Solució:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)\,(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-1-x^4-2x^3}{x^3+x+2x^2+2} =$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3-1}{x^3+2x^2+x+2} = -2$$

Exercici n. 4.-

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

Solució:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^0 = 1$

Exercici n. 5.-

Troba el límit:

$$\lim_{x\to3}\left[\frac{2x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\right]$$

Solució:

$$\lim_{x\to3}\left[\frac{2x}{x^2-9}-\frac{x+1}{x-3}\right] = \lim_{x\to3}\frac{2x-(x+1)\,(x+3)}{(x+3)\,(x-3)} = \lim_{x\to3}\frac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)\,(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{-x^2-2x-3}{(x+3)\,(x-3)} = \frac{-18}{(0)}$$

Hi ha una asímptota vertical en x=3

Obtenim els límits laterals:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = +\infty \; ; \qquad \lim_{x\to 3^+} \frac{-x^2-2x-3}{(x+3)(x-3)} = -\infty$$

<u>Exercici n. 6.-</u>

Calcula:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}}$$

Solució:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}-1\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4}\right)\cdot\frac{2x}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{4x+4}\cdot\frac{2x}{x-3}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(2x)}{(4x+4)}} = e^{\frac{42}{16}} = e^{\frac{21}{8}}$$

<u>Exercici n. 7.-</u>

Troba els límits següents:

a) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}}$ **b)** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}}$

Solució:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\,\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(2x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = \left(1^{+\infty}\right)$. Agafem logaritmes

$$\lim_{x\to 0} \ln(\cos 2x)^{3/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\,tg\;2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-3\left(1+tg^2\,2x\right)\cdot 2}{1} = -6$$

Per tant:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

Exercici n. 8.-

Donada la funció $\mathbf{f(x)=\dfrac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}}$, estudia la seva continuïtat. Indica el tipus de discontinuïtat que hi ha en els punts en què no és contínua.

Solució:

$$f(x)=\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}=\frac{(x+5)\left(3x^2+1\right)}{(x+5)(x-2)}$$

- Domini = $\mathbb{R}$ – {–5, 2}

  f (*x*) és contínua en $\mathbb{R}$ – {–5, 2}.

- Vegem el tipus de discontinuïtat que presenta en $x = -5$ i en $x = 2$:

$$\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{76}{-7}=\frac{-76}{7}$$

Discontinuïtat evitable en $x = -5$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{13}{(0)}.\ \text{Obtenim els límits laterals:}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad ; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

Discontinuïtat de salt infinit en $x = 2$.

Exercici n. 9.-

Calcula els valors de *a* i *b* per tal que la funció següent sigui contínua:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+b & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}}$$

Solució:

- Si $x \neq 1$ i $x \neq 2$ $\rightarrow$ *f* (*x*) és contínua, ja que està formada per funcions contínues.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2-2x\right)=a-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(4x^2+ax+b\right)=4+a+b \\ f(1)=4+a+b \end{array}\right\}$$

Per tal que $f(x)$ sigui contínua $x = 1$, ha de ser:

$$a - 2 = 4 + a + b \quad \rightarrow \quad b = -6$$

- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(4x^2 + ax - 6\right) = 10 + 2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\}$$

Per tal que $f(x)$ sigui contínua en $x = 2$, ha de ser:

$$10 + 2a = 0 \quad \rightarrow \quad 2a = -10 \quad \rightarrow \quad a = -5$$

- Per tant, $f(x)$ serà contínua si $a = -5$ i $b = -6$.

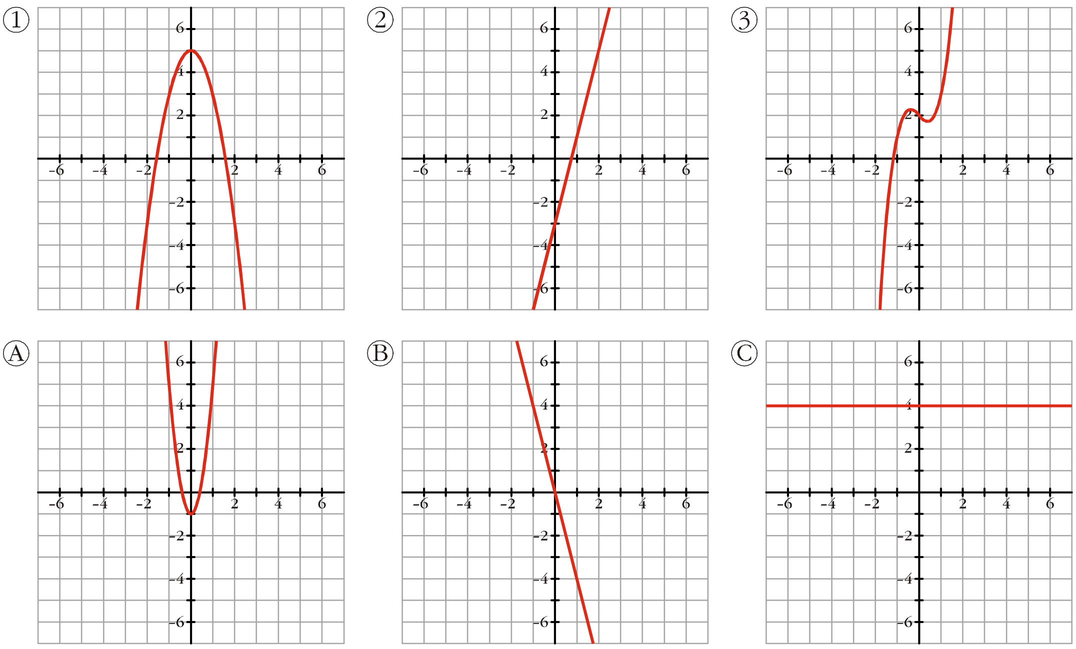
DERIVADES

Exercici n. 1.-

Les gràfiques A, B i C són les funcions derivades de les gràfiques 1, 2 i 3, però en un altre ordre.

Quina és la derivada de cada gràfica?

Justifica les teves respostes.



Solució:

1 – B, 2 – C, 3 – A.

La derivada s'anul·la en els punts de tangent horitzontal, és positiva on la funció és creixent i és negativa on la funció decreix.

<u>Exercici n. 2.-</u>

Si $f(x) = 2x^2 - 3$ troba'n la derivada en $x_0 = 1$ utilitzant la definició.

Solució:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2\cdot(1+h)^2 - \cancel{3} - 2 + \cancel{3}}{h} = \frac{4h+2h^2}{h} = 4+2h$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+2h) = 4$$

<u>Exercici n. 3.-</u>

Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0 \le x < 4 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$, estudiar la continuïtat i derivabilitat.

Solució:

CONTINUÏTAT

Si $x \neq 0$ i $x \neq 4$: La funció és contínua ja que $f(x)$ és una funció polinòmica.

Per a $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontínua en } x = 0$$

Per a $x = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (x-2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} (x^2-4) = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontínua en } x = 4$$

Per tant: $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0, 4\}$.

DERIVABILITAT

$f(x)$ és derivable en $\mathbb{R} - \{0, 4\}$, ja que és una funció polinòmica en cada un d'aquests tres intervals.

La funció no és derivable en $x = 0$ i $x = 4$, ja que és discontínua en aquests punts.

Exercici n. 4.-

Deriva logarítmicament la funció següent:

$$\boldsymbol{y = (\cos x)^x}$$

Solució:

$f(x) = (\cos x)^x$

$\ln f(x) = x \cdot \ln \cos x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \cos x + x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = \ln \cos x - x \cdot tg\, x$$

$f'(x) = f(x) \cdot (\ln \cos x - x\, tg\, x) = (\cos x)^x \cdot (\ln \cos x - x\, tg\, x)$

Exercici n. 5.-

Coneguda la funció $f(x) = x^5$ i la seva derivada $f'(x) = 5x^4$. Calcula la derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

Solució:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$$

Exercici n. 6.-

Demostra, utilitzant la definició de derivada, que la funció $f(x) = (x + 1) \cdot |x|$ no és derivable en $x = 0$.

Solució:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = (x+1) \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, llavors:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$. $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$ Per tant, f no és derivable en $x = 0$.