

PREPARA LA SELECTIVATAT*(Activitats de Selectivitat)*

- 1 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calcula la integral $\int f(x) dx$.

b) Troba la primitiva F de f que compleix que $F(1) = 1$.

$$a) F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{10} \int \frac{10x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{5} (\sqrt{5x^2 - 4}) + k$$

$$b) F(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{5} + k = 1 \rightarrow k = \frac{4}{5} \rightarrow F(x) = \frac{1}{5} (\sqrt{5x^2 - 4}) + \frac{4}{5}$$

- 2 Determina $f(x)$ si saps que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$; $f'(0) = 1$ i $f(0) = 0$.

$$f'''(x) = 24x \rightarrow f''(x) = \int 24x dx = 12x^2 + k_1$$

$$\text{Com que } f''(0) = 2 \rightarrow k_1 = 2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 2$$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \rightarrow f'(x) = \int (12x^2 + 2) dx = 4x^3 + 2x + k_2$$

$$\text{Com que } f'(0) = 1 \rightarrow k_2 = 1 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1 \rightarrow f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1) dx = x^4 + x^2 + x + k_3$$

$$\text{Com que } f(0) = 0 \rightarrow k_3 = 0 \rightarrow f(x) = x^4 + x^2 + x$$

- 3 Considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció que defineix $f(x) = (x-1)e^{2x}$. Calcula la primitiva de f , la gràfica de la qual passa pel punt $(1, e^2)$.

$$F(x) = \int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + k = (x-2)e^x + k$$

$$\begin{aligned} u &= x-1 \rightarrow du = dx \\ dv &= e^x dx \rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$F(1) = e^2 \rightarrow -e + k = e^2 \rightarrow k = e^2 + e \rightarrow F(x) = (x-2)e^x + e^2 + e$$

- 4 Donada la funció $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, calcula una funció primitiva de $f(x)$ que passi pel punt $P(e, 2)$.

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \ln x dx = \ln|x| + x \ln|x| - x + k$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx \rightarrow v = x \end{aligned}$$

$$F(e) = 2 \rightarrow 1 + k = 2 \rightarrow k = 1 \rightarrow F(x) = \ln|x| + x \ln|x| - x + 1$$

Integrals indefinides

- 5 Donada la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \ln(1+x^2)$, troba la primitiva de f , la gràfica de la qual passa per l'origen de coordenades (Ln indica la funció logaritme neperià).

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int \ln(1+x^2) dx = \underbrace{x \ln(1+x^2)}_{u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx} - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \\
 &= x \ln(1+x^2) - \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + k \\
 F(0) &= 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow F(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x
 \end{aligned}$$

- 6 Troba una primitiva de la funció $f(x) = xe^x$.

$$\begin{aligned}
 \int xe^x dx &= \underbrace{xe^x}_{u=x \rightarrow du=dx} - \int e^x dx = xe^x - e^x + k \\
 dv &= e^x dx \rightarrow v = e^x
 \end{aligned}$$

- 7 Calcula la integral següent: $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

$$\int \frac{x}{(x+1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + k$$

- 8 Resol: $\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$.

$$\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3} \right) dx = -\ln|x+1| + 3\ln|x+3| + k$$

- 9 Calcula aquesta primitiva:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx \\
 &\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx = \int \left(x + 1 + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{13}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{4} \ln|x+2| + k
 \end{aligned}$$

- 10 Calcula $\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx$.

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+3} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + k$$

- 11 Per mitjà del canvi de variable $t = \ln x$, calcula $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$.

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int \frac{\ln t}{t} dt = \frac{(\ln t)^2}{2} + k = \frac{(\ln(\ln x))^2}{2} + k$$

$t = \ln x$
 $dt = \frac{1}{x} dx$

- 12 Donats a i b dos nombres reals, calcula aquesta integral indefinida:

$$\int \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^2} dx$$

Posa atenció a les possibilitats $a = 0$ o $b = 0$.

- Si $a \neq 0$ i $b \neq 0$: $\int \frac{\sin x}{(a + b \cos x)^2} dx = -\frac{1}{b(a + b \cos x)} + k$
- Si $a = 0$ i $b \neq 0$: $\int \frac{\sin x}{b \cos^2 x} dx = -\frac{1}{b \cos x} + k$
- Si $a \neq 0$ i $b = 0$: $\int \frac{\sin x}{a^2} dx = -\frac{\cos x}{a^2} + k$
- a i b no poden ser 0 simultàniament, perquè no existiria la funció que hem d'integrar.

- 13 Calcula una funció $f(x)$ que verifiqui que $f'(x) = (x - 3)e^{2x}$ i que tingui un extrem en l'eix d'abscisses. Calcula les coordenades d'aquest extrem i digues si és mínim o màxim.

En primer lloc, hem de trobar una primitiva:

$$f(x) = \int (x - 3)e^{2x} dx = \frac{1}{4}(2x - 7)e^{2x} + C$$

Per calcular el valor de C , sabem que la funció $f(x)$ té un extrem en l'eix d'abscisses, és a dir, que la seva derivada s'anul·la en $x = a$; per tant:

$$f'(a) = (a - 3)e^{2 \cdot 3} = 0 \rightarrow a = 3$$

$$\text{I com que: } f(3) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}(2 \cdot 3 - 7)e^{2 \cdot 3} + C = 0 \rightarrow \frac{-1}{4}e^6 + C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{4}e^6$$

La funció que busquem és, doncs: $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 7)e^{2x} + \frac{1}{4}e^6$; i l'extrem és el punt $P(3, 0)$.

Per saber si aquest punt és màxim o mínim, apliquem el criteri de la primera derivada:

$$f'(x < 3) = \underbrace{(x - 3)}_{(-)} e^{(+)} < 0 \rightarrow f(x) \text{ és decreixent a l'esquerra de } x = 3.$$

$$f'(x > 3) = \underbrace{(x - 3)}_{(+)} e^{(+)} > 0 \rightarrow f(x) \text{ és decreixent a l'esquerra de } x = 3.$$

Per tant, $P(3, 0)$ és un mínim de la funció.