

Producte escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = ab + bb + ba = 2ab + b^2 = 0$$

Resolem el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ 2ab + b^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ b(2a + b) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0, a = \pm 1 \\ b = -2a \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3} \\ a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Com que } a > 0, \text{ tenim dues solucions: } \begin{cases} a = 1, b = 0 \\ a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

- 2 Determina una constant a perquè el pla d'equació $\pi: ax + y + z = 2$ formi un angle de $\frac{\pi}{3}$ radians amb el pla $z = 0$.

$$\pi: ax + y + z = 2 \rightarrow \vec{n}_\pi = (a, 1, 1)$$

$$\pi': z = 0 \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (0, 0, 1)$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|(a, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}} \rightarrow a^2 + 2 = 4 \rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

- 3 Troba els punts de la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ que es troben a distància 1 del pla $\pi: 2x - 2y + z - 5 = 0$.

$$\pi: 2x - 2y + z - 5 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -2, 1)$$

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (1, 1, -2)$$

Un punt genèric de r és $A(2 + \lambda, 1 + \lambda, -2\lambda)$.

$$d(A, \pi) = \frac{|2(2 + \lambda) - 2(1 + \lambda) + (-2\lambda) - 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 1$$

$$\frac{|-2\lambda - 3|}{3} = 1 \rightarrow |-2\lambda - 3| = 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-3-3}{2} = -3 \\ \lambda = \frac{-3+3}{2} = 0 \end{cases}$$

Els punts que busquem són $A_1(-1, -2, 6)$ i $A_2(2, 1, 0)$.

- 4 Troba les equacions dels plans paral·lels a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situats a 6 unitats de distància d'aquest.

$$\pi' \text{ paral·lel a } \pi \rightarrow \pi': 2x - y + 2z + D = 0$$

Si prenem $P(1, -1, 0) \in \pi$, tenim que:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 6$$

$$\frac{|3 + D|}{3} = 6 \rightarrow |3 + D| = 18 \rightarrow \begin{cases} D = 18 - 3 = 15 \\ D = -18 - 3 = -21 \end{cases}$$

Per tant, els plans són $\pi_1: 2x - y + 2z + 15 = 0$ i $\pi_2: 2x - y + 2z - 21 = 0$.

- 5 Es demana:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 \end{array} \right\} \text{equidistant dels punts } P(-1, 2, 1) \text{ i } Q(0, 3, 1).$$

- b) Calcular l'equació implícita d'un pla π de manera que el simètric del punt P respecte del pla π sigui el punt Q .

Un punt genèric de la recta r és $R(1 + 2t, -t, -1)$.

$$\vec{PR} = (2t + 2, -t - 2, -2)$$

$$\vec{QR} = (1 + 2t, -t - 3, -2)$$

$$|\vec{PR}| = |\vec{QR}| \rightarrow \sqrt{(2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 + (-2)^2} \\ \rightarrow (2t + 2)^2 + (-t - 2)^2 \rightarrow (2t + 1)^2 + (-t - 3)^2 \rightarrow t = 1$$

Així doncs, un punt de la recta r equidistant dels punts P i Q és $R(3, -1, -1)$.

- 6 Donats els punts $P(1, 1, 3)$ i $Q(0, 1, 0)$, es demana:

- a) Trobar tots els punts R de tal manera que la distància entre P i R sigui igual a la distància entre Q i R . Descriu aquest conjunt de punts.
b) Trobar tots els punts S continguts a la recta que passa per P i Q que verifiquen $\text{dist}(P, S) = 2 \text{ dist}(Q, S)$, en què «dist» significa distància.

- a) Busquem els punts $R(a, b, c)$ que verifiquin que $d(P, R) = d(Q, R)$.

$$|\vec{PR}| = |\vec{QR}| \rightarrow \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 3)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2 + c^2} \\ \rightarrow (a - 1)^2 + (c - 3)^2 = a^2 + c^2 \rightarrow a + 3c = 5 \rightarrow \begin{cases} a = 5 - 3\mu \\ b = \lambda \\ c = \mu \end{cases}$$

Els punts que compleixen aquesta condició són de la forma $R(5 - 3\mu, \lambda, \mu)$

$$\text{i configuren el pla d'equació } \pi: \begin{cases} x = 5 - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}.$$

Producte escalar

b) Trobem la recta que passa per P i Q .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Punt: } P(1, 1, 3) \\ \text{Vector director: } \vec{PQ} = (-1, 0, -3) \end{array} \right\} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

Un punt genèric de la recta és $S(1 - \lambda, 1, 3 - 3\lambda)$.

$$\vec{PS} = (-\lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\vec{PS}| = \sqrt{10\lambda^2}$$

$$\vec{QS} = (1 - \lambda, 0, -3\lambda) \rightarrow |\vec{QS}| = \sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10}$$

$$\begin{aligned} d(P, S) = 2 \cdot d(Q, S) &\rightarrow \sqrt{10\lambda^2} = 2\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10} \\ &\rightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Els punts que busquem són $S_1(-1, 1, -3)$ i $S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$.

7 Troba les equacions de la recta r que passa per $P(2, 1, -1)$, està continguda

en el pla $\pi: x + 2y + 3z = 1$, i és perpendicular a la recta $s: \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases}$.

Escrivim la recta s en forma paramètrica:

$$\left. \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow \vec{u}_s = (2, 1, 1)$$

Determinem el pla π' perpendicular al pla que passi pel punt P .

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x - 5y + 3z + 6 = 0$$

$$\text{La recta } r \text{ ha de ser } r: \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

8 Calcula la distància del punt $P(1, -1, 3)$ a la recta r .

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Calculem el pla π que passa per P i és perpendicular a r .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Punt: } P(1, -1, 3) \\ \text{Vector normal: } \vec{u}_r = (1, -1, 2) \end{array} \right\} \rightarrow \pi: x - y + 2z - 8 = 0$$

Determinem el punt de tall Q de la recta r i el pla π .

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \\ x - y + 2z - 8 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ \lambda = 1 \end{array} \right. \rightarrow Q(2, 0, 3)$$

La distància del punt P a la recta r és la distància de P a Q .

$$d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}$$

- 9 Determina els punts de la recta r d'equacions $r: \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z-3}{2} \end{array} \right\}$ que equidisten del pla π d'equació $\pi: x + z = 1$ i del pla π' d'equació $\pi': y - z = 3$.

$$s: \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y - 1 = \frac{z-3}{2} \end{array} \right\} \rightarrow s: \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right\}$$

Un punt genèric de la recta s és $P(0, \lambda, 1 + 2\lambda)$.

$$d(P, \pi) = d(P, \pi')$$

$$\frac{|1 + 2\lambda - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - (1 + 2\lambda) - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{|-\lambda - 4|}{\sqrt{2}} \rightarrow 2\lambda = |-\lambda - 4| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\frac{4}{3} \\ \lambda = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Els punts que busquem són $P_1\left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ i $P_2\left(0, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$.