

Sistemes d'inequacions lineals

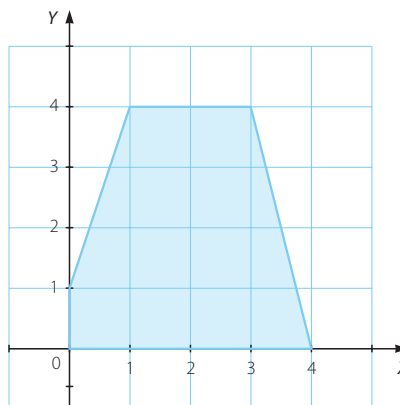
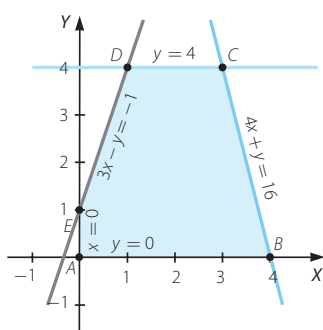
PREPARA LA SELECTIVAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Escriu un sistema de quatre inequacions (amb dues variables x i y) de tal manera que la regió del pla que determini aquest sistema sigui la regió ombrejada del dibuix següent:

Sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 16 \\ y \leq 4 \\ 3x - y \geq -1 \end{array} \right\}$$

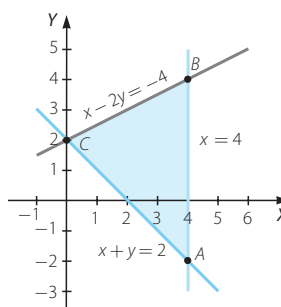


- 2 a) Representa gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x + y \geq 2 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Calcula el mínim de la funció $F(x, y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

- a) Gràfica de la regió solució:



b) El mínim s'aconsegueix en punt del contorn de la regió. Calculem els vèrtexs:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} &\rightarrow A(4, -2) \\ \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ x + 2y = -4 \end{array} \right\} &\rightarrow B(4, 4) \\ \left. \begin{array}{l} x - 2y = -4 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} &\rightarrow C(0, 2) \end{aligned}$$

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$F(x, y) = x - 2y \rightarrow \begin{cases} F(4, -2) = 4 - 2(-2) = 8 \\ F(4, 4) = 4 - 2 \cdot 4 = -4 \\ F(0, 2) = 0 - 2 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

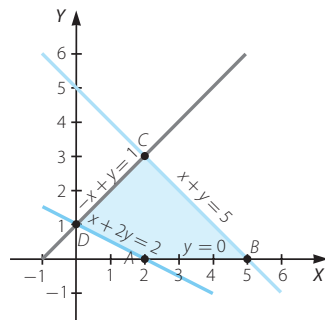
Així doncs, el mínim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{AC}$.

3 Dibuixa la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

i calcula el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + 2y$ en aquesta regió.

Regió:



Punts de tall:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{array} \right\} &\rightarrow A(2, 0) \\ \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} &\rightarrow B(5, 0) \\ \left. \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} &\rightarrow C(2, 3) \\ \left. \begin{array}{l} -x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{array} \right\} &\rightarrow D(0, 1) \end{aligned}$$

Sistemes d'inequacions lineals

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$f(x, y) = 2x + 2y \rightarrow \begin{cases} F(2, 0) = 4 \\ F(5, 0) = 10 \\ F(2, 3) = 10 \\ F(0, 1) = 2 \end{cases}$$

Per tant, el màxim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{BC}$.

- 4 Troba els punts de la regió del dibuix on la funció $F(x, y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digues quin és aquest valor màxim.

El valor òptim d'una funció s'obté en un punt del contorn:

$$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 5$$

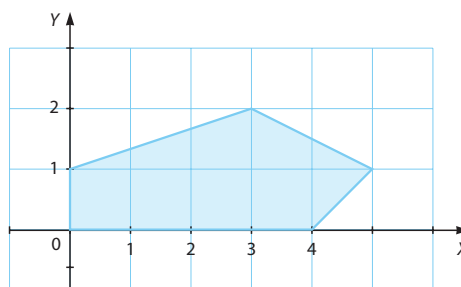
$$B(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 13$$

$$C(5, 1) \rightarrow F(5, 1) = 19$$

$$D(3, 2) \rightarrow F(3, 2) = 19$$

$$E(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 9$$

Per tant, el màxim de la funció s'obté en qualsevol punt del segment $\overline{CD}$, i el seu valor és 19.

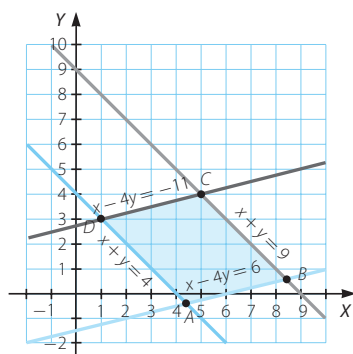


- 5 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{aligned} x - 4y &\geq -11 \\ x + y &\geq 4 \\ x - 4y &\leq -6 \\ x + y &\leq 9 \end{aligned} \right\}$$

- a) Dibuixa la regió de solucions del sistema.
b) Una funció objectiu $f(x, y) = ax + by + c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt $(4, 15/4)$. Digues si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determina'ls.

a) Regió solució:



Punts de tall:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{22}{5}, \frac{-2}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{42}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \rightarrow C(4, 4)$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \rightarrow D(1, 3)$$

La funció agafa el valor mínim en el punt $E\left(4, \frac{15}{4}\right)$, que és un punt del segment $\overline{CD}$, per la qual cosa agafarà aquest mateix valor mínim en qualsevol dels punts del segment $\overline{CD}$.