

PREPARA LA SELECTIVAT*(Activitats de Selectivitat)*

- 1 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ troba totes les matrius $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de manera que $AP = PA$.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$AP = PA \rightarrow \begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ 0 = c \end{cases}$$

Les matrius P són de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$.

- 2 Resol: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemes d'equacions lineals

3 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \ 2 \ 3)$ i $C = (4 \ 0 \ 2)$.

- Troba els valors de x , y i z per als quals A no té inversa.
- Determina els valors de a per als quals el sistema $B \cdot A = C$ té solució.
- Resol el sistema anterior quan sigui possible.

a) A no té inversa si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y(y - yz) = y^2(1 - z)$$

La inversa no existeix si $y = 0$ o $z = 1$.

$$b) BA = C \rightarrow (a \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \ 0 \ 2) \rightarrow \begin{cases} ax + 2y + 3 = 4 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ ay + 3z = 0 \\ ax + 2y + 3z = 2 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & a & 3 & | & 0 \\ a & 2 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 6$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = \text{nre. d'incògnites}$
Sistema compatible determinat
- Si $a = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $a \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{3a + 6}{3a^2} = \frac{a + 2}{a^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{3a}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

4 Considera el sistema
$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = 2a \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$$
 en què a és un paràmetre real.

- a) Discuteix el sistema d'acord amb el valor de a .
 b) Resol el sistema per $a = 0$.
 c) Resol el sistema per $a = 1$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{rang}(A^*) = 3 \neq \text{rang}(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{nre. d'incògnites}$
Sistema compatible indeterminat

b) Per $a = 0 \rightarrow$ El sistema és incompatible, no té solució.

c) Per $a = 1$ considerem el sistema:

$$\begin{cases} x - y = -1 - z \\ y = 2 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Donat el sistema dependent del paràmetre α :
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

- a) Determina, de manera raonada, els valors de α per als quals el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
 b) Resol el sistema quan és compatible determinat.
 c) Troba, de manera raonada, la solució del sistema quan $\alpha = 0$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemes d'equacions lineals

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = \text{nre. d'incògnites}$
Sistema compatible determinat
- Si $\alpha = -2 \rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$
- Si $\alpha = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 1 < \text{nre. d'incògnites}$
Sistema compatible indeterminat

b) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow |A| = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0 \rightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

- 6 Un país importa 21.000 vehicles de tres marques, A, B i C al preu de 10.000, 15.000 i 20.000 € respectivament. El total de la importació puja 332 milions d'euros. Cal dir també que hi ha 21.000 vehicles comptant només els de la marca B i α vegades els de la A.

- Planteja un sistema d'equacions amb les condicions del problema en funció del nombre de vehicles de cada marca.
- Estableix el nombre de vehicles de cada marca si suposem que $\alpha = 3$.
- Estudia si existeix algun valor de α per al qual la situació no es pugui donar en el camp dels nombres reals.

- a) Considerem x, y, z els vehicles de cada marca. Així, doncs:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 21.000 \\ 10.000x + 15.000y + 20.000z = 332.000.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ \alpha x + y = 21.000 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) Si } \alpha = 3 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 15y + 20z = 332.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 3x + y = 21.000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 21.000 \\ 10x + 5y = 88.000 \\ 5x = 17.000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3.400 \\ y = 10.800 \\ z = 6.800 \end{cases}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 20 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 0 & 21.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\alpha - 10 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 17.000\alpha - 17.000$$

$$\text{Si } \alpha = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

7 Determina raonadament els valors del paràmetre m que fan que el sistema tingui més d'una solució.

Com que es tracta d'un sistema homogeni, perquè el sistema tingui més d'una solució, la matriu dels coeficients ha de tenir rang 2, és a dir, el determinant ha de ser nul. Així, doncs:

$$\begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & 1 & m+4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^3 + 8m^2 + 17m + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = -2 \\ m = -1 \end{cases}$$