PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitat de Selectivitat)

1 **En una fàbrica d'articles esportius tenen 10 caixes de mides diferents, Grans, Mitjanes i Petites, per envasar les samarretes d'atletisme que produeixen i amb capacitat per a 50, 30 i 25 samarretes, respectivament. Si una caixa gran fos mitjana, aleshores hi hauria el mateix nombre de caixes grans i mitjanes. En total, envasen 390 samarretes. Determina el nombre de caixes que hi ha de cada classe.**

Considerem x, y, z el nombre de caixes per a samarretes grans, mitjanes i petites, respectivament.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 50x + 30y + 25z &= 390 \\ x - 1 &= y + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 10x + 6y + 5z &= 78 \\ x - y \quad &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 5x + y \quad &= 28 \\ x - y \quad &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ 5x + y \quad &= 28 \\ 6x \quad &= 30 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}\right.$$

Hi ha 5 caixes de samarretes grans, 3 de mitjanes i 2 de petites.

2 **Discuteix, en funció del paràmetre a, la solució del sistema d'equacions lineals següents. Troba'n la solució quan sigui possible.**

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y + az &= -a \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -a \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 - F_3 \rightarrow F_3]{3F_1 - F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & 5 \\ 0 & 13 & 2 - a & 4 + a \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -13 & 1 & 5 \\ 0 & -0 & a - 1 & 1 - a \end{array}\right)$$

Per tant:

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema compatible determinat. El sistema equivalent és:

$$\left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 2 \\ 13y + z &= 5 \\ (a - 1)z &= -(a - 1) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{15}{13} \\ y &= \frac{6}{13} \\ z &= -1 \end{aligned}\right.$$

- Si $a = 1 \rightarrow$ rang (A) = rang $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
  El sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 - z \\ 13y = 5 - z \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{6 - 9\lambda}{13} \\ y = \dfrac{5 - \lambda}{13} \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

3 **Considera el sistema d'equacions següent:**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array}\right\}$$

a) Troba els valors de *a* per als quals el sistema no és compatible determinat.

b) Troba el valor de *a* per al qual $x = 2$. Determina també els valors de *y* i de *z* en aquest cas.

a) Canviem l'ordre de les incògnites i apliquem Gauss:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & a & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[-4F_1 + F_3 \rightarrow F_3]{-F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & a-4 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2 + F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-7 & -12 \end{array}\right)$$

- Si $a = 7 \rightarrow$ rang $(A) = 2$ i rang $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq 7 \rightarrow$ rang (A) = rang $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

b) El sistema equivalent i la solució són:

$$\left.\begin{array}{r} z + y + x = 5 \\ 2y + x = -2 \\ (a-7)x = -12 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z \\ y \\ x = \dfrac{-12}{a-7} \end{array}\right. \qquad \text{Si } x = 2 \rightarrow \frac{-12}{a-7} = -2 \rightarrow a = 1$$

i aleshores: $2y = -2 - 2 \rightarrow y = -2$ i $z = 5 - (-2) - 2 = 5$

4 **Discuteix i resol el sistema següent per a tots els valors del paràmetre *a*. (Empra el mètode de Gauss per a la resolució).**

$$\left.\begin{array}{r} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a+2)z = 6 - a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - 4F_3 \to F_3]{F_1 - 4F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & a-4 & -8a-10 & 4a-25 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 12a+8 & -4a+28 \end{array}\right)$$

a) Si $12a + 8 = 0 \to a = \frac{-2}{3} \to \text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \to$ incompatible.

b) Si $a \neq \frac{-2}{3} \to \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, i el sistema serà compatible.

Un sistema equivalent és:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + ay - 2z = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (12a+8)z = -4a+28 \end{array}\right\} \to z = \frac{-4a+28}{12a+8} \text{ i amb aquest valor}$$

passem a la segona equació:

$$(a-4)y + (4a-2)\cdot\frac{(-4a+33)}{(12a+8)} = 3 \to y = 3 - \frac{(4a-2)(-4a+28)}{(a-4)(12a+8)},$$

per tant, tampoc és vàlid el valor $a = 4$. Aleshores:

b1) Si $a = 4$, la matriu és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 56 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2 - F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{array}\right), \text{ és a dir}$$

$a = 4 \to \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \to$ sistema compatible indeterminat:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 4y - 2z = -1 \\ 14z = 3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1+7\lambda}{7} \\ y = \lambda \\ z = \frac{3}{14} \end{array}\right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

b2) I si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$, el sistema és compatible determinat: el sistema equivalent

$$\left.\begin{array}{r} 4x + ay - 2z = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (12a+8)z = -4a+28 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3-a^2}{3a+2} \\ y = \frac{4a-5}{3a+2} \\ z = \frac{-4a+28}{12a+8} = \frac{7-a}{3a+2} \end{array}\right.$$

5 El sistema de quatre equacions amb quatre incògnites:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 1 \\ 5u + 3v &= 2 \\ 3x + 2y &= -1 \\ 3u + 2v &= 3 \end{aligned}$$

es pot expressar en la foma $AX = B$, en què A, X i B són matrius quadrades 2×2. Troba aquesta expressió i resol matricialment el sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Calculem A^{-1} pel mètode Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1 - 5F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2 + F_1 \rightarrow F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \cdot (-1) \rightarrow F_2]{F_{1}/5 \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

I a partir d'aquí:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

6 Resol el sistema següent:

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ -3x + y - z &= 7 \\ 2x - 3y + z &= -12 \end{aligned}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1 - F_3 \rightarrow F_3]{3F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_2 - 4F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -20 \end{array}\right)$$

que ens dóna el sistema equivalent i la solució:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ 4y + 2z &= 4 \\ 6z &= -20 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

7 Tres entitats financeres, *A*, *B* i *C*, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2.000 €, un interès anual del 2%, 3% i *k*% (que no coneixem).

La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat *A*, obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per *A*, en Manel per *C* i en Dani per *B*, obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per *B* i en Dani per *C*, obtindrien 218 €.

a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Sense resoldre el sistema, determina la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.

c) Troba, si existeix, un valor de *k* per al qual hi hagi infinites solucions. Resol el sistema per a aquest valor de *k*, i dóna'n tres solucions diferents.

a) Si anomenem *x*, *y* i *z* els diners de la Joana, en Manel i en Dani, respectivament, podem plantejar el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}02(x+y+z) &= 164 \\ 0{,}02x + \frac{k}{100}y + 0{,}03z &= 192 \\ 0{,}03x + 0{,}03y + \frac{k}{100}z &= 218 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z &= 8.200 \\ 2x+ky+3z &= 19.200 \\ 3x+3y+kz &= 21.800 \end{aligned}\right\}$$

b) Del sistema, la primera equació ens dóna directament aquesta quantitat: 8.200 €.

c) Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 2 & k & 3 & 19.200 \\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3 \rightarrow F_3]{-2F_1+F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & k-2 & 1 & -2.800 \\ 0 & 0 & k-3 & -2.800 \end{array}\right)$$

Tenim que:

- Si $k = 3 \rightarrow$ rang $(A) = 2$ i rang $(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema incompatible
- Si $k = 2$, obtenim la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per tant, rang (A) = rang $(A^*) = 2$, i el sistema serà indeterminat, o sigui, amb infinites solucions.

El sistema i la solució general són:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 8.200 \\ z &= 2.800 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 5.400 - \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 2.800 \end{aligned}\right.$$

I algunes solucions són les següents (fixeu-vos que han de ser més grans de 2.000):

x	2.400	2.900	3.400
y	3.000	2.500	2.000
z	2.800	2.800	2.800