PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 En una clínica dental col·loquen tres tipus de pròtesis, P_1, P_2 i P_3, en dos models diferents, M_1 i M_2. El nombre de pròtesis que tenen fetes està reflectit a la matriu A. El preu, en euros, de cada pròtesi està reflectit a la matriu B.

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Troba, si és possible, les matrius $C = A \cdot B$ i $D = B \cdot A$.

b) Quina informació proporcionen els elements c_{12} de la matriu C i l'element d_{22} de D?

c) Quin element de C o D proporciona el valor total de totes les pròtesis del tipus P_2?

a) $$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.060 & 5.750 & 7.260 \\ 4.920 & 4.840 & 6.480 \\ 4.290 & 4.100 & 5.240 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.370 & 8.430 \\ 7.330 & 9.770 \end{pmatrix}$$

b) L'element c_{12} expressa el preu del total de pròtesis de tipus P_1 si es venguessin al preu de les pròtesis de tipus P_2.

L'element d_{22} expressa el preu del total de pròtesis del model M_2.

c) El valor total de totes les pròtesis de tipus P_2 l'expressa l'element c_{22}.

2 Els preus, en euros, de les entrades a un parc temàtic per a adults (AD) i nens i jubilats (NJ) en temporada alta (TA), temporada mitjana (TM) i temporada baixa (TB) són a la matriu P. El nombre de visitants, en milers, d'aquest parc al llarg d'un any és a la matriu N.

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{AD} \\ \text{NJ} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{TA} & \text{TM} & \text{TB} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ \text{TA} \\ \text{TM} \\ \text{TB} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{AD} & \text{NJ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Troba, si és possible, les matrius $R_1 = P \cdot N$ i $R_2 = N \cdot P$.

b) A quants euros puja la recaptació total corresponent als nens i jubilats? I la que correspon a la temporada baixa?

c) Quin element de R_1 o de R_2 ens proporciona informació sobre la recaptació total corresponent als adults?

d) A quants euros puja la recaptació total?

a) $R_1 = P \cdot N = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.250 & 22.400 \\ 16.375 & 17.400 \end{pmatrix}$

$R_2 = N \cdot P = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.500 & 19.000 & 12.400 \\ 14.750 & 11.500 & 7.600 \\ 5.125 & 4.000 & 2.650 \end{pmatrix}$

b) La recaptació total corresponent als nens i jubilats puja 17.400 €. La recaptació total corresponent a la temporada baixa puja 2.650 €.

c) Aquesta informació ve donada per l'element a_{11} de la matriu R_1.

d) La recaptació total puja 38.650 €, que es correspon amb la suma dels elements de la diagonal principal de qualsevol de les dues matrius, R_1 o R_2.

3 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Resol l'equació matricial $AX + B^t = B$, on X és una matriu quadrada d'ordre 2.

$AX + B^t = B \rightarrow AX = B - B^t \rightarrow X = A^{-1}(B - B^t)$

Calculem la matriu inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = 3F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = 4F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{12}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{8}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B - B^t) \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4 Troba una matriu A que verifiqui: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

Calculem la matriu inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Determina la matriu X en l'equació matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + BC)$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2X = \frac{1}{2}(A + BC) \rightarrow X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2}(A + BC)\right)$$

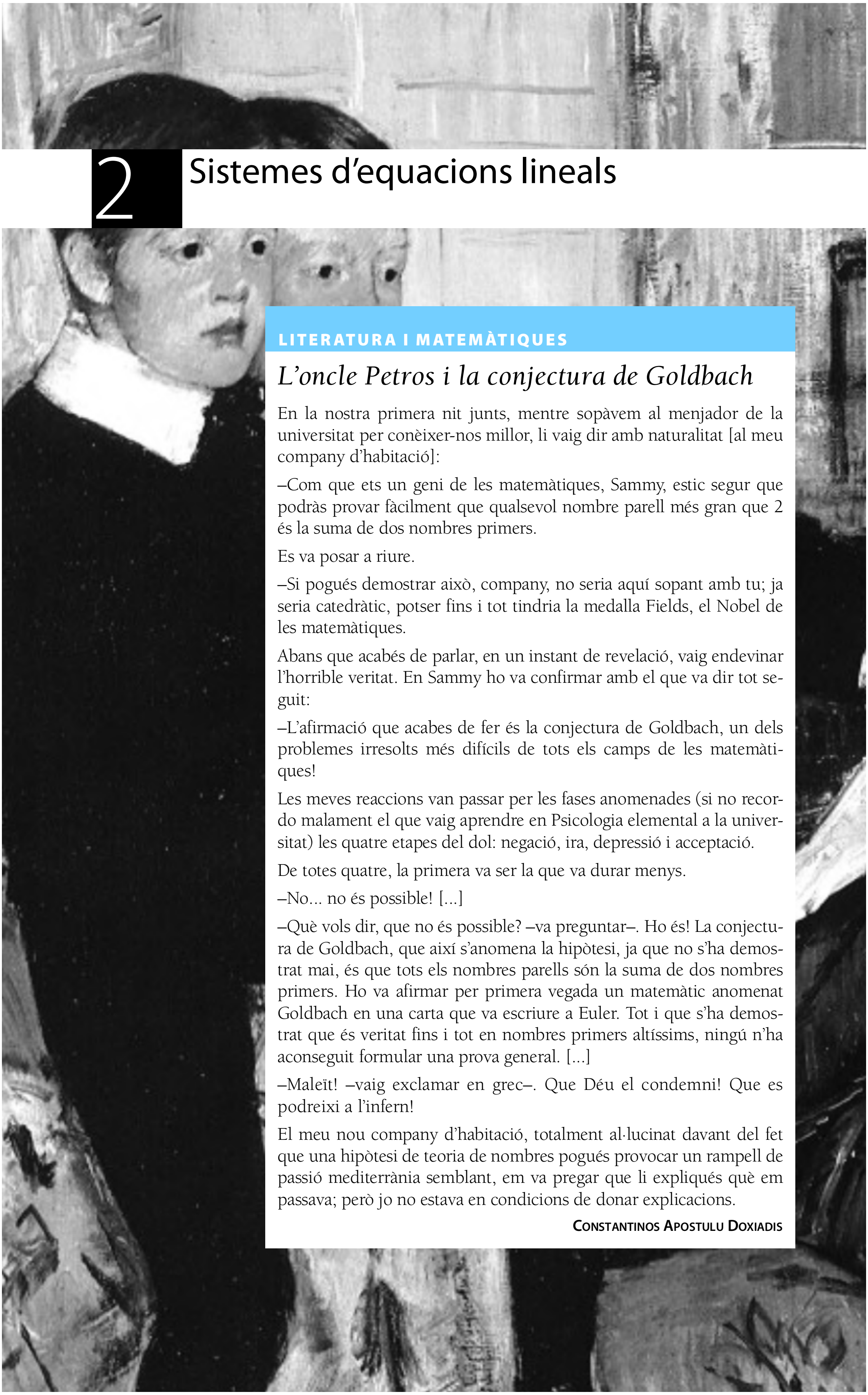
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{1}{4}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot (A + BC)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & \frac{11}{2} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$



2 Sistemes d'equacions lineals

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

L'oncle Petros i la conjectura de Goldbach

En la nostra primera nit junts, mentre sopàvem al menjador de la universitat per conèixer-nos millor, li vaig dir amb naturalitat [al meu company d'habitació]:

–Com que ets un geni de les matemàtiques, Sammy, estic segur que podràs provar fàcilment que qualsevol nombre parell més gran que 2 és la suma de dos nombres primers.

Es va posar a riure.

–Si pogués demostrar això, company, no seria aquí sopant amb tu; ja seria catedràtic, potser fins i tot tindria la medalla Fields, el Nobel de les matemàtiques.

Abans que acabés de parlar, en un instant de revelació, vaig endevinar l'horrible veritat. En Sammy ho va confirmar amb el que va dir tot seguit:

–L'afirmació que acabes de fer és la conjectura de Goldbach, un dels problemes irresolts més difícils de tots els camps de les matemàtiques!

Les meves reaccions van passar per les fases anomenades (si no recordo malament el que vaig aprendre en Psicologia elemental a la universitat) les quatre etapes del dol: negació, ira, depressió i acceptació.

De totes quatre, la primera va ser la que va durar menys.

–No... no és possible! [...]

–Què vols dir, que no és possible? –va preguntar–. Ho és! La conjectura de Goldbach, que així s'anomena la hipòtesi, ja que no s'ha demostrat mai, és que tots els nombres parells són la suma de dos nombres primers. Ho va afirmar per primera vegada un matemàtic anomenat Goldbach en una carta que va escriure a Euler. Tot i que s'ha demostrat que és veritat fins i tot en nombres primers altíssims, ningú n'ha aconseguit formular una prova general. [...]

–Maleït! –vaig exclamar en grec–. Que Déu el condemni! Que es podreixi a l'infern!

El meu nou company d'habitació, totalment al·lucinat davant del fet que una hipòtesi de teoria de nombres pogués provocar un rampell de passió mediterrània semblant, em va pregar que li expliqués què em passava; però jo no estava en condicions de donar explicacions.

CONSTANTINOS APOSTULU DOXIADIS