RESOLDRE SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

NOM: ______________________ CURS: __________ DATA: __________

- Una **solució** d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites és un parell de nombres que verifiquen les dues equacions. Si un sistema té solució, diem que és **compatible**.
- **Resoldre un sistema d'equacions amb dues incògnites** és trobar la solució o les solucions d'aquest sistema.

EXEMPLE

Estudia si el parell de nombres (2, 3) és la solució del sistema d'equacions $\left.\begin{aligned}\mathbf{2x - y = 1}\\ \mathbf{x + 2y = 8}\end{aligned}\right\}$.

Per saber si el parell de nombres (2, 3) és la solució del sistema, hem de comprovar si verifiquen o no les dues equacions. Si substituïm en els dues equacions, tenim:

$$\left.\begin{aligned}2x - y = 1\\ x + 2y = 8\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\to 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1\\ &\to 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8\end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\end{aligned}}\right\} \begin{aligned}&\to \text{Verifica l'equació.}\\ &\to \text{Verifica l'equació.}\end{aligned}$$

Per tant, el parell de nombres (2, 3) és una solució del sistema, i el sistema és compatible.

Per resoldre un sistema d'equacions amb dues incògnites hi ha tres mètodes de resolució:

(I) Mètode de **substitució**.
(II) Mètode d'**igualació**.
(III) Mètode de **reducció**.

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode de substitució**:

- **Aïllem** la incògnita en una de les equacions.
- **Substituïm** l'expressió obtinguda a l'altra equació.
- **Resolem** l'equació amb una incògnita que resulta.
- **Substituïm** els valor obtinguts en qualsevol de les equacions per trobar l'altra incògnita.
- **Comprovem** que la solució aconseguida verifica totes dues equacions.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent pel mètode de substitució: $\left.\begin{aligned}\mathbf{2x - y = 1}\\ \mathbf{x + 2y = 8}\end{aligned}\right\}$

- **Elegim** per aïllar la incògnita x de la segona equació: $x = 8 - 2y$
- **Substituïm** aquesta incògnita en la primera equació:

$$2x - y = 1 \to 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$

- **Resolem** l'equació amb la incògnita y obtinguda:

$$16 - 4y - y = 1 \to 16 - 5y = 1 \to -5y = 1 - 16 = -15 \to y = \frac{-15}{-5} \to y = 3$$

- **Substituïm** el valor $y = 3$ en qualsevol de les dues equacions, per exemple en la primera:

$$2x - y = 1 \to 2x - 3 = 1 \to 2x = 4 \to x = 2$$

- **Comprovem** la solució que hem obtingut. Per fer-ho, hem de substituir el parell de valors (2, 3) en les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned}2x - y = 1\\ x + 2y = 8\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\to 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1\\ &\to 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8\end{aligned}\left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\end{aligned}}\right\} \begin{aligned}&\to \text{Verifica l'equació.}\\ &\to \text{Verifica l'equació.}\end{aligned}$$

Per tant, el parell de valors $x = 2$, $y = 3$ és la solució del sistema, i el sistema és compatible.

1 **Resol els sistemes següents pel mètode de substitució i comprova les solucions:**

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{array}\right\}$

2 **Resol pel mètode de substitució i comprova la solució del sistema d'equacions amb fraccions següent:**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x + 3}{6} + y = 2 \\ \dfrac{2x}{3} + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Per resoldre'l, seguim aquests passos:

1r En cada equació reduïm a comú denominador:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x + 3}{6} + \dfrac{6y}{6} = \dfrac{6 \cdot 2}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y \cdot 3}{3} = -\dfrac{1 \cdot 3}{3} \end{array}\right\}$$

2n Traiem els denominadors:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3r Resolem per substitució el sistema que en resulta i comprovem la solució:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3 **Resol pel mètode de substitució i comprova la solució d'aquests sistemes d'equacions amb fraccions:**

a) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{y}{4}=1\\[2mm] \dfrac{5x-1}{2}-\dfrac{4y+39}{5}=-1\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{5x+3}{6}+\dfrac{y-1}{4}=2\\[2mm] \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{y+5}{10}=0\end{array}\right\}$$

c) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x-6}{3}-\dfrac{2y-3}{7}=-1\\[2mm] x+\dfrac{3y}{2}=-3\end{array}\right\}$$

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode d'igualació**:

- **Substituïm** la mateixa incògnita en les dues equacions.
- **Igualem** les expressions que hem obtingut.
- **Resolem** l'equació amb una incògnita que en resulta.
- **Substituïm** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per trobar l'altra incògnita.
- **Comprovem** que la solució que hem obtingut verifica totes dues equacions.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent pel mètode d'igualació:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\}$$

- **Elegim** per aïllar la incògnita y de les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 12 - x \end{aligned}\right\}$$

- **Igualem** les expressions que hem obtingut: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolem** l'equació amb la incògnita x que hem trobat:

$$2x + x = 12 + 3 \;\rightarrow\; 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5$$

- **Substituïm** el valor $x = 5$ en qualsevol de les dues equacions, per exemple en la primera:

$$2x - y = 3 \;\rightarrow\; 2 \cdot 5 - y = 3 \;\rightarrow\; 10 - 3 = y \;\rightarrow\; y = 7$$

- **Comprovem** la solució que hem obtingut. Per fer-ho, hem de substituir el parell de valors (5, 7) en les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} &2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ &5 + 7 = 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Verifica l'equació.} \\ &\rightarrow \text{Verifica l'equació.} \end{aligned}$$

Per tant, el parell de valors $x = 5$, $y = 7$ és la solució del sistema, i el sistema és compatible.

4 **Resol pel mètode d'igualació i comprova la solució d'aquest sistema d'equacions amb fraccions:**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} &= 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

1r Reduïm a comú denominador les dues equacions:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} &= \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2n Traiem els denominadors:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3 + 4y + 4 &= 12 \\ 2x - y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

3r Resolem per igualació el sistema que en resulta:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓ CURRICULAR

5 **Resol pel mètode d'igualació i comprova la solució dels sistemes d'equacions amb fraccions següents:**

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y+4}{3} = 1 \\ x - \dfrac{y-1}{3} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y+1}{5} - y = -2 \\ \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$

Per resoldre un sistema de dues equacions amb dues incògnites pel **mètode de reducció**:

- **Busquem un sistema equivalent** en el qual els coeficients d'una mateixa incògnita siguin iguals o oposats.
- **Restem** o **sumem** les dues equacions que hem obtingut i eliminem, així, la incògnita.
- **Resolem** l'equació amb una sola incògnita que en resulta.
- **Substituïm** el valor obtingut en qualsevol de les dues equacions per trobar l'altra incògnita.
- **Comprovem** que la solució que hem trobat verifica totes dues equacions.

EXEMPLE

Resol el sistema d'equacions següent pel mètode de reducció:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 18} \end{array}\right\}$$

- Obtenim un **sistema equivalent**. Per fer-ho, **escollim** la incògnita que sigui més senzilla per reduir, en aquest cas x. Multipliquem la primera equació per 5:

$$5(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Restem** les dues equacions del sistema per eliminar els termes amb x i reduir el sistema:

$$\begin{array}{r} \cancel{5x} - 10y = 5 \\ -(\cancel{5x} + 3y = 18) \\ \hline -13y = -13 \end{array}$$

- **Resolem** l'equació que hem obtingut:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Substituïm** el valor que hem trobat en una de les dues equacions del sistema, en la que sigui més senzilla per operar, en aquest cas la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprovem** el resultat. Per fer-ho, hem de substituir el parell de valors (3, 1) en les dues equacions:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 18 = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Verifica l'equació.} \\ \rightarrow \text{Verifica l'equació.} \end{array}$$

Per tant, el parell de valors $x = 3$, $y = 1$ és la solució del sistema, i el sistema és compatible.

6 **Resol el sistema següent pel mètode de reducció i comprova la solució:**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{3x - 2y = 7} \\ \mathbf{2x + 3y = 9} \end{aligned}\right\}$$

- Obtenim un **sistema equivalent**:

  En aquest cas, la variable *x* o la variable *y* no apareixen multiplicades per 1 en cap dels membres de les equacions, així és que en podem escollir l'una o l'altra. Triem, per exemple, la variable *y*.

  Per aconseguir que els dos termes amb variable *y* tinguin el mateix coeficient, hem de multiplicar la primera equació per 3 i la segona per 2, de manera que:

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot (3x - 2y = 7) \\ 2 \cdot (2x + 3y = 9) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 9x - 6y = 21 \\ 4x + 6y = 18 \end{aligned}\right\}$$

- **Sumem** les dues equacions per eliminar els termes amb *y*:

$$\begin{array}{rl} & \left.\begin{aligned} 9x - \cancel{6y} = 21 \\ 4x + \cancel{6y} = 18 \end{aligned}\right\} \\ + & \\ \hline & 13x \qquad y = 39 \end{array}$$

- **Resolem** l'equació que hem obtingut: $x = \dots$
- **Substituïm** aquest valor en qualsevol de les dues equacions per trobar el valor de *y*:

- **Comprovem** la solució:

7 **Resol pel mètode de reducció els sistemes següents i comprova les solucions:**

a) $\left.\begin{aligned} 7x + 3y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 3y = 3 \\ 2x + 5y = 72 \end{aligned}\right\}$

8 **Resol els sistemes següents pels tres mètodes. Comprova la solució i determina quin dels mètodes és més senzill per resoldre cada sistema.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

- Per substitució:
- Per igualació:
- Per reducció:

En aquest cas, el mètode més adequat és ____________________

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{array}\right\}$

- Per substitució:
- Per igualació:
- Per reducció:

En aquest cas, el mètode més adequat és ____________________