

La gràfica de la regió factible és:

Els punts de tall són:

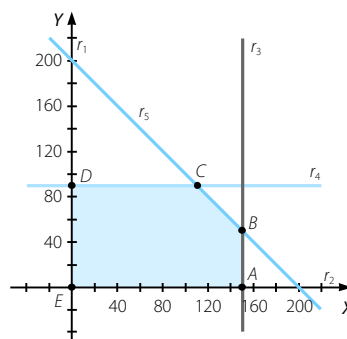
$$r_2 \cap r_3 = A(150, 0)$$

$$r_3 \cap r_5 = B(150, 50)$$

$$r_4 \cap r_5 = C(110, 90)$$

$$r_1 \cap r_4 = D(0, 90)$$

$$r_1 \cap r_2 = E(0, 0)$$



El benefici (en euros) està determinat per la funció objectiu següent:

$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y)$. Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y) \rightarrow \begin{cases} A: B(150, 0) = 6 \text{ €} \\ B: B(150, 50) = 9,5 \text{ €} \\ C: B(110, 90) = 10,9 \text{ €} \\ D: B(0, 90) = 6,3 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà repartint 110 impresos de l'empresa A i 90 impresos de l'empresa B, i aquest benefici serà de 10,9 €.

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Dos compostos medicinals tenen dos principis actius A i B. Per cada píndola, el primer compost té 2 unitats de A i 6 de B, mentre que el segon compost té 4 unitats de A i 4 unitats de B. Durant un període de temps, un pacient ha de rebre un mínim de 16 unitats del tipus A i un mínim de 24 unitats del tipus B. Si el cost de cada píndola del primer compost és de 0,50 € i el cost de cada píndola del segon compost és de 0,90 €:

- Representa la regió factible.
- Calcula el nombre òptim de píndoles de cada compost que ha de rebre el pacient per minimitzar els costos.

a) $x \rightarrow$ nre. d'unitats del primer compost

$y \rightarrow$ nre. d'unitats del segon compost

	Compost 1	Compost 2	Nre. d'unitats
Principi A	2	4	16
Principi B	6	4	24
Cost (€)	0,50	0,90	

$$\rightarrow 2x + 4y \geq 16$$

$$\rightarrow 6x + 4y \geq 24$$

$$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,90y$$

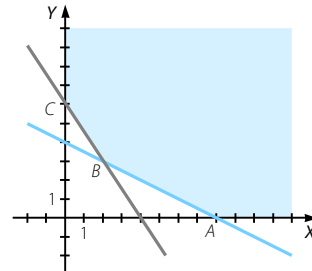
→ Funció objectiu

Programació lineal

La regió factible està determinada per:

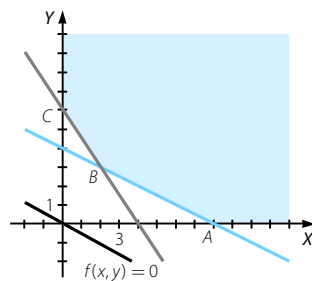
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \geq 16 \\ 6x + 4y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Es tracta d'una regió factible no acotada amb vèrtexs $A(8, 0)$; $B(2, 3)$ i $C(0, 6)$.



- b) Es tracta de minimitzar la funció $f(x, y) = 0,50x + 0,90y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Gràficament, si tracem rectes paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en el vèrtex B ; així doncs, el pacient ha de prendre 2 píndols del primer compost i 3 píndols del segon per minimitzar costos, que pugen a 3,70 €.



- 2 Una empresa fabrica dos tipus de televisors (T_{21} i T_{14}) de 21 i 14 polzades, a un cost per televisió de 100 i 50 €, respectivament. Sabem que el nombre de televisors T_{21} fabricats diàriament no supera en 4 unitats als T_{14} , i que entre tots dos no superen diàriament els 30 televisors. També sabem que el procés productiu no permet fabricar diàriament menys de 2 televisors T_{21} ni menys de 5 televisors T_{14} .

- Formula el sistema d'inequacions associat a l'enunciat.
- Dibuixa la regió factible i calcula'n els vèrtexs.
- Calcula quants televisors T_{21} i T_{14} maximitzen el cost de producció diària i quants la minimitzen.

a) $x \rightarrow$ nre. d'unitats de T_{21}

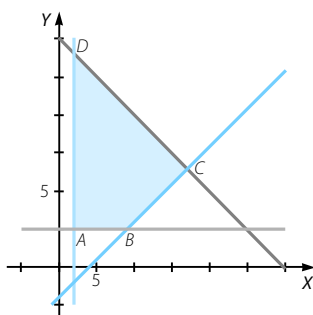
$y \rightarrow$ nre. d'unitats de T_{14}

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y + 4 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array} \right\}$$

- b) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(2, 5)$, $B(9, 5)$, $C(17, 13)$ i $D(2, 28)$.

- c) Es tracta de maximitzar i minimitzar la funció $f(x, y) = 100x + 50y$ subjecte a les restriccions de l'apartat a).

Com que $f(A) = 450$, $f(B) = 1.150$, $f(C) = 2.350$ i $f(D) = 1.600$, el màxim s'aconsegueix en C, i el mínim, en A. La conclusió és que per maximitzar el cost de producció cal fabricar 17 televisors de 21 polzades i 13 televisors de 14 polzades, i per minimitzar el cost de producció han de fabricar 2 televisors de 21 polzades i 5 televisors de 14 polzades.



- 3 Una aerolínia vol optimitzar el nombre de files de classe preferent i de classe turista en un avió. La longitud útil de l'avió per instal·lar les files de seients és de 104 m, i es necessiten 2 m per instal·lar una fila de classe preferent i 1,5 m per a les de classe turista. L'aerolínia ha d'instal·lar almenys 3 files de classe preferent i que les files de classe turista siguin com a mínim el triple que les de classe preferent. Els beneficis per fila de classe turista són de 152 € i de 206 € per a la classe preferent. Quantes files de classe preferent i quantes de classe turista han d'instal·lar per obtenir el benefici màxim? Indica aquest benefici.

$x \rightarrow$ nre. de files de classe preferent $y \rightarrow$ nre. de files de classe turista

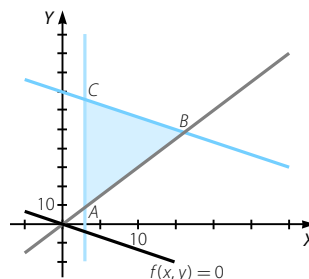
	Preferent	Turista	Total	
Longitud (m)	2	1,5	104	$\rightarrow 2x + 1,5y \leq 104$
Beneficis (€)	206	152		$\rightarrow f(x, y) = 206x + 152y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 206x + 152y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + 1,5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs A(3, 9); B(16, 48) i C(3; 65,3).

Com que $f(A) = 1.986$, $f(B) = 10.592$ i $f(C) = 10.548,6$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B; així doncs, han d'instal·lar 16 files de classe preferent i 48 files de classe turista per obtenir el benefici màxim, que és de 10.592 €



Programació lineal

- 4 Una empresa fabrica dos productes P1 i P2 que es venen a 50 € i 44 € la unitat, respectivament. Per elaborar-los lloga dues màquines, M1 i M2, a un preu de 5 € per hora i 6 € per hora, respectivament. Les hores de funcionament de cada màquina que calen per a la fabricació d'una unitat de cada producte i la disponibilitat màxima setmanal de cada màquina estan expressades en la taula següent:

	Producte P1	Producte P2	Disponibilitat
M1	2 hores	4 hores	80 hores
M2	4 hores	2 hores	100 hores

El cost del material utilitzat en la fabricació d'una unitat del producte P1 és de 10 € i en una unitat del producte P2 és de 8 €. Es vol saber quantes unitats de cada producte s'han de fabricar per maximitzar el benefici.

- Planteja el problema.
- Troba'n la solució gràficament.
- Analitza gràficament què passa si el preu de P2 es redueix en 2 €.

- $x \rightarrow$ nre. d'unitats del producte P1
- $y \rightarrow$ nre. d'unitats del producte P2

	Producte P1	Producte P2	Disponibilitat	Preu per hora	
M1	2	4	80	5	$\rightarrow 2x + 4y \leq 80$
M2	4	2	100	6	$\rightarrow 4x + 2y \leq 100$
Cost de material per unitat	10	8			
Preu de venda per unitat	50	44			
Cost de material + mà d'obra	44	40			
Benefici unitat	6	4			

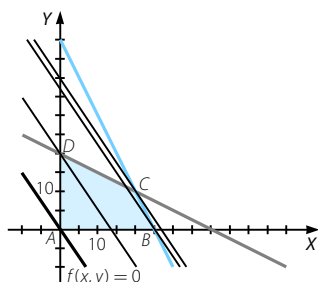
Despeses del producte P1 $\rightarrow 10 \text{ € de producte} + 2 \text{ hores de M1} \cdot 5 \text{ €/hora} + 4 \text{ hores de M2} \cdot 6 \text{ €/hora} = 10 + 10 + 24 = 44 \text{ €}$

Despeses del producte P2 $\rightarrow 8 \text{ € de producte} + 4 \text{ hores de M1} \cdot 5 \text{ €/hora} + 2 \text{ hores de M2} \cdot 6 \text{ €/hora} = 8 + 20 + 12 = 40 \text{ €}$

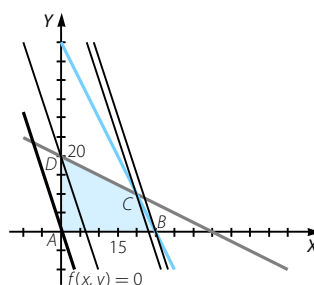
Maximitzar $f(x, y) = 6x + 4y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 80 \\ 4x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- Obtenim una regió factible acotada amb vèrtexs A(0, 0), B(25, 0), C(20, 10) i D(0, 20). Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en C. Això vol dir que han de fabricar 20 unitats del producte P1 i 10 unitats del producte P2 per maximitzar el benefici, que és de 160 €.



- c) Si reduïm de 2 € el preu del producte P2, obtenim 42 €, en lloc de 44 €. Com que el preu de cost continua sent de 40 €, el guany per unitat és de 2 €, i, per tant, la funció objectiu és $f(x, y) = 6x + 2y$. Si tracem paral·leles a aquesta funció que passin per tots els vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B, és a dir, per maximitzar el benefici han de fabricar 25 unitats del producte P1 i cap unitat del producte P2. El valor és de 150 €.



- 5 La candidatura d'un grup polític per a les eleccions municipals ha de complir els requisits següents: el nombre total de components de la candidatura ha d'estar comprès entre 6 i 18 i el nombre d'homes (x) no ha d'excedir del doble del nombre de dones (y).

- a) Representa el recinte associat a aquestes restriccions i calcula'n els vèrtexs.
b) Quin és el nombre més gran d'homes que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions?

- a) $x \rightarrow$ nombre d'homes
 $y \rightarrow$ nombre de dones

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6 \leq x + y \leq 18 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 6)$; $B(4, 2)$; $C(12, 6)$ i $D(0, 18)$.

- b) Es tracta de maximitzar la funció, que és la que ens dóna el nombre d'homes. Substituïm els vèrtexs i obtenim $f(A) = 0$, $f(B) = 4$, $f(C) = 12$ i $f(D) = 0$; així doncs, 12 homes és el nombre màxim que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions de l'enunciat.

