

Producte escalar

016 Troba l'angle que formen els plans següents:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda + \mu \\ \pi: y = \lambda + \mu \\ z = \lambda + \mu \end{array} \right\}$$

$$\pi': (x, y, z) = (-1, -1, 2) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Calculem l'equació implícita del pla π .

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n}_1 = (0, 2, 2)$$

Calculem l'equació implícita del pla π' .

$$\pi': \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 3 = 0 \rightarrow \text{Vector normal } \vec{n}_2 = (-1, 2, -1)$$

Calculem l'angle que formen els dos plans.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{48}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{48}} = 73,22^\circ$$

017 Troba la projecció dels punts $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ i $C(0, 2, 0)$ sobre la recta r .

$$\text{a) } r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \quad \text{b) } r: \begin{cases} x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases}$$

a) • Projecció del punt A .

$$\frac{0-3}{3} = \frac{0-2}{2} = \frac{0-1}{1} \rightarrow A \text{ pertany a } r.$$

La projecció ortogonal de A sobre r és A .

• Projecció del punt B .

Calculem l'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt B .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punt: } B(-1, 1, 1) \end{array} \right\} \rightarrow 3(x+1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 3x + 2y + z = 0$$

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

La projecció ortogonal de B sobre r és $Q(0, 0, 0)$.

- Projectió del punt C.

Calculem el pla perpendicular a la recta r que passa pel punt C.

$$\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punt: } C(0, 2, 0) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (3, 2, 1) \\ \text{Punt: } C(0, 2, 0) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 3(x-0) + 2(y-2) + 1(z-0) = 0 \\ \rightarrow \pi: 3x + 2y + z - 4 = 0 \end{array}$$

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \\ 3x + 2y + z - 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

La projecció del punt C sobre r és $Q\left(\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

- b) • Projectió del punt A.

L'equació en forma contínua de la recta r és:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{-1}$$

Calculem l'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt A.

$$\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punt: } A(0, 0, 0) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punt: } A(0, 0, 0) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2(x-0) + (-1)(y-0) + (-1)(z-0) = 0 \\ \rightarrow \pi: 2x - y - z = 0 \end{array}$$

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{7} \\ y = \frac{12}{7} \\ z = \frac{6}{7} \end{cases}$$

La projecció de A sobre la recta r és $Q\left(\frac{9}{7}, \frac{12}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

- Projectió del punt B.

Calculem l'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt B.

$$\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punt: } B(-1, 1, 1) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punt: } B(-1, 1, 1) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2(x+1) + (-1)(y-1) + (-1)(z-1) = 0 \\ \rightarrow \pi: 2x - y - z + 4 = 0 \end{array}$$

Producte escalar

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{20}{7} \\ z = \frac{10}{7} \end{cases}$$

La projecció de B sobre la recta r és $Q\left(\frac{1}{7}, \frac{20}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

- Projecció del punt C .

Calculem l'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt C .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (2, -1, -1) \\ \text{Punt: } C(0, 2, 0) \end{array} \right\} \rightarrow 2(x - 0) + (-1)(y - 2) + (-1)(z - 0) = 0$$

$$\rightarrow \pi: 2x - y - z + 2 = 0$$

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{16}{7} \\ z = \frac{8}{7} \end{cases}$$

La projecció de C sobre la recta r és el punt $Q\left(\frac{5}{7}, \frac{16}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

- 018 **Calcula la projecció dels punts $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ i $C(0, 2, 0)$ sobre el pla π determinat per les rectes:**

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Troblem el pla π determinat per les rectes r i s .

$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5y + 10z = 0 \rightarrow \pi: y - 2z = 0$$

El vector normal és $\vec{n} = (0, 1, -2)$.

- Projecció del punt A .

El punt A pertany a la recta r ; per tant, la projecció de A sobre el pla π és A .

- Projectió del punt B .

Determinem l'equació de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt B .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (0, 1, -2) \\ \text{Punt: } B(-1, 1, 1) \end{array} \right\} \rightarrow r: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} \rightarrow r: \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ 2y + z = 3 \end{array} \right\}$$

Calculem el punt de tall de la recta amb el pla.

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ 2y + z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = \frac{6}{5} \\ z = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

La projecció del punt B sobre el pla π és $Q\left(-1, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

- Projectió del punt C .

Calculem l'equació de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt C .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Vector normal: } \vec{n} = (0, 1, -2) \\ \text{Punt: } C(0, 2, 0) \end{array} \right\} \rightarrow r: \frac{x-0}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{-2} \rightarrow r: \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2y + z = 4 \end{array} \right\}$$

Calculem el punt de tall d'aquesta recta amb el pla π .

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2y + z = 4 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{8}{5} \\ z = \frac{4}{5} \end{array} \right.$$

La projecció de C sobre el pla π és $Q\left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

019 Calcula la projecció ortogonal de la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

sobre el pla:

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ \pi: y = 2 - \lambda + 3\mu \\ z = 3 + 2\lambda - 2\mu \end{array} \right\}$$

Troblem l'equació del pla π en forma implícita.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 2z - 6 = 0 \rightarrow \pi: 2x - z + 3 = 0$$

Vector director de la recta r : $\vec{u} = (1, 1, -1)$

Vector normal del pla π : $\vec{n} = (2, 0, -1)$

Punt de r : $P(2, 2, 2)$