ACTIVITATS

001 Donats els vectors següents, calcula:

a) $\vec{u}+\vec{v}$

b) $\vec{v}-\vec{w}$

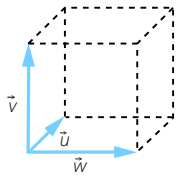
c) $\vec{u}+\vec{w}$

d) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

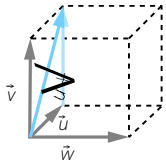
e) $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

f) $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

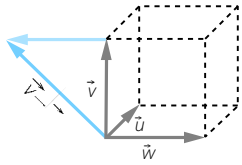
g) $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{v}-\vec{w})$



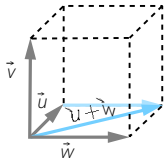
a)



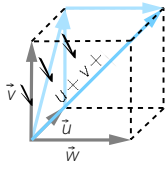
b)



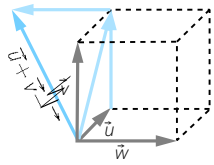
c)



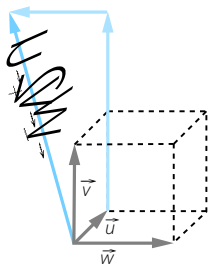
d)



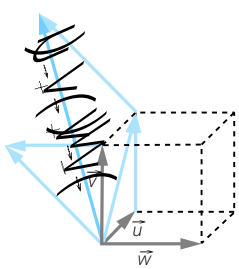
e)



f)



g)



002 Demostra que l'oposat de qualsevol vector coincideix amb el vector multiplicat per -1.

$$\text{Op}(\vec{v}) = -1 \cdot \vec{v}$$

Dedueix que l'oposat de l'oposat d'un vector és el mateix vector: $\text{Op}(\text{Op}(\vec{u})) = \vec{u}$

$-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v} = \text{Op}(\vec{v})$ $\qquad$ $\text{Op}(\text{Op}(\vec{u})) = \text{Op}(-\vec{u}) = -(-\vec{u}) = \vec{u}$

003 Comprova les igualtats següents:

a) $\text{Op}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})))) = -\vec{v}$

a) $\text{Op}(\vec{u} - \vec{v}) = -(\vec{u} - \vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}))) =$
$= \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{v}))) = \text{Op}(\vec{u} + \text{Op}(\vec{u} - \vec{v})) =$
$= \text{Op}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{u}) = \text{Op}(\vec{v}) = -\vec{v}$

004 És cert que si tres vectors són linealment independents, dos a dos, aleshores són linealment independents si els considerem els tres alhora?

No necessàriament, perquè si són linealment independents dos a dos tenen direccions diferents, però la combinació lineal d'un parell d'aquests vectors pot donar com a resultat el tercer, de manera que siguin linealment dependents.

005 Comprova si els vectors l'expressió dels quals respecte de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és (1, 0, 2), (2, 0, 1) i (1, 0, 5), són base de l'espai.

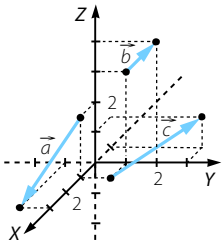
Els vectors formen una base si existeixen tres valors λ_1, λ_2 i λ_3 de manera que:

$\lambda_1 (1, 0, 2) + \lambda_2 (2, 0, 1) + \lambda_3 (1, 0, 5) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat}$$

Els vectors no són linealment independents i no formen una base.

006 Calcula les coordenades i el mòdul d'aquests vectors:



$\vec{a} = (3, -1, 0) - (1, 0, 2) = (2, -1, -2)$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$

$\vec{b} = (0, 2, 4) - (0, 1, 3) = (0, 1, 1)$

$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{c} = (-1, 3, 1) - (1, 1, 0) = (-2, 2, 1)$

$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

007 Donada la igualtat de vectors següent:

$$(1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (4, 4, 4)$$

comprova aquesta desigualtat dels seus mòduls:

$$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| \geq |(4, 4, 4)|$$

$|(1, 2, 3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|(3, 2, 0)| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$

$|(4, 4, 4)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$

$|(1, 2, 3)| + |(3, 2, 0)| = \sqrt{14} + \sqrt{13} \geq 4\sqrt{3} = |(4, 4, 4)|$

008 Demostra que per a tot nombre real λ:

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

$$|(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c)| = \sqrt{(\lambda \cdot a)^2 + (\lambda \cdot b)^2 + (\lambda \cdot c)^2} =$$
$$= \sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2)} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$$
$$= |\lambda| \cdot |(a, b, c)|$$

009 Efectua les operacions amb vectors següents:

$\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$ $\quad \vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ $\quad \vec{u}_3 = (1, 1, 0)$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ $\quad$ b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

a) $\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = (0, 1, 1) + 2(1, 0, 1) + 3(1, 1, 0) = (5, 4, 3)$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (0, 2, 0)$

010 Troba dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ que verifiquin que:

$$\vec{u} - \vec{v} = (0, 0, 1) \qquad \vec{u} + \vec{v} = (1, 0, 0)$$

Quants vectors en l'espai verifiquen aquestes dues condicions?

$$2\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{v}) = (0, 0, 1) + (1, 0, 0) = (1, 0, 1)$$

$$2\vec{u} = (1, 0, 1) \to \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$2\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 0, 0) - (0, 0, 1) = (1, 0, -1)$$

$$2\vec{v} = (1, 0, -1) \to \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són únics.

011 Determina el nombre màxim de vectors independents i escull vectors que ho siguin.

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 0) \qquad \vec{v}_2 = (0, 1, -1) \qquad \vec{v}_3 = (3, 0, -3) \qquad \vec{v}_4 = (1, 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Hi ha tres vectors linealment independents.

$\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$ i $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$ són vectors linealment independents.

012 Comprova si aquestes col·lecions de vectors són base de l'espai o no.

a) $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$ i $\vec{v}_3 = (2, 0, 1)$

b) $\vec{v}_1 = (3, -7, 1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 0)$ i $\vec{v}_3 = (5, -10, 2)$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \to \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Els vectors formen una base.

b) $$\begin{vmatrix} -3 & -7 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to \text{rang} \begin{pmatrix} -3 & -7 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Els vectors no formen una base.

013 Troba un punt C en el segment AB, determinat pels punts $A(-3, 0, 1)$ i $B(0, 6, 5)$, de manera que $\overline{AC}$ sigui la meitat que $\overline{CB}$.

Si $C(c_1, c_2, c_3)$ llavors: $\vec{AC} = (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1)$ i $\vec{CB} = (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

Si $\vec{AC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{CB} \rightarrow (c_1 + 3, c_2, c_3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot (-c_1, 6 - c_2, 5 - c_3)$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + 3 = -\frac{1}{2}c_1 \\ c_2 = \frac{1}{2}(6 - c_2) \\ c_3 - 1 = \frac{1}{2}(5 - c_3) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = \frac{7}{3} \end{array}\right. \rightarrow C\left(-2, 2, \frac{7}{3}\right)$$

014 Troba un punt D, perquè el polígon $ABCD$ sigui un paral·lelogram.

$A(0, 0, 0)$ $B(2, -1, 3)$ $C(-1, 2, 1)$

Resposta oberta.

Per exemple:

Si considerem els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$, el punt D que busquem és:

$D = B + \vec{AC} = C + \vec{AB}$

$\vec{AB} = (2, -1, 3)$ $\vec{AC} = (-1, 2, 1)$

$D = B + \vec{AC} = (2, -1, 3) + (-1, 2, 1) = (1, 1, 4)$

015 Calcula l'equació vectorial de la recta que passa pel punt i té el vector director indicat:

a) $A(2, -1, -1)$ i $\vec{v} = (-2, -4, 4)$ b) $A(1, 1, 1)$ i $\vec{v} = (-2, -2, -2)$

a) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

016 Troba les equacions paramètriques de la recta, si saps que un punt i un vector director són:

a) $A(3, 0, -7)$ i $\vec{v} = (-10, 2, 6)$ b) $A(0, 0, 0)$ i $\vec{v} = (1, 0, 0)$

$$\text{a)} \left.\begin{array}{l} x = 3 - 10t \\ y = 2t \\ z = -7 + 6t \end{array}\right\} \qquad \text{b)} \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$$

017 Calcula l'equació contínua de la recta que passa per cada parella de punts.

a) $A(2, -1, -1)$ i $B(0, -5, 3)$ b) $A(1, 1, 1)$ i $B(-1, -1, -1)$

a) $\vec{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \frac{x - 2}{-2} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z + 1}{4}$

b) $\vec{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 1}{-2}$

018 Troba les equacions cartesianes de la recta que passa per cada parella de punts.

a) $A(3, 0, -7)$ i $B(-7, 2, -1)$ b) $A(0, 0, 0)$ i $B(1, 0, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-10, 2, 6) \rightarrow \dfrac{x-3}{-10} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{6}$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} 2x - 6 = -10y \\ 6x - 18 = -10z - 70 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x + 5y - 3 = 0 \\ 6x + 10z + 52 = 0 \end{matrix}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$

019 Troba l'equació vectorial del pla en cada cas.

a) $A(2, -1, -1)$, $B(0, -5, 3)$ i $C(1, 1, 1)$ b) $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ i $C(1, 2, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$ $\overrightarrow{AC} = (-1, 2, 2)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + \lambda(-2, -4, 4) + \mu(-1, 2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, -2, -2) + \mu(0, 1, 1)$

020 Troba les equacions paramètriques del pla corresponent.

a) $A(3, 0, -7)$, $\vec{u} = (-10, 2, 6)$ i $\vec{v} = (0, 3, 10)$

b) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ i $\vec{v} = (4, 4, 4)$

$$\text{a) } \pi: \left.\begin{matrix} x = 3 - 10\lambda \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = -7 + 6\lambda + 10\mu \end{matrix}\right\} \qquad \text{b) } \pi: \left.\begin{matrix} x = \lambda + 4\mu \\ y = 4\mu \\ z = 4\mu \end{matrix}\right\}$$

021 Troba l'equació general del pla que passa pel punt $P(-1, 0, 2)$ i conté la recta d'equació:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3}$$

El pla està definit per $P(-1, 0, 2)$, el vector director de la recta $\vec{v_2} = (1, -1, 3)$ i el vector $\overrightarrow{AP}$, amb $A(1, 3, -4) \in r$.

$\overrightarrow{AP} = (-2, -3, 6)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 3x - 12y - 5z + 13 = 0$$

022 Troba l'equació general del pla que passa pels punts $A(1, 1, -7)$, $B(5, -2, 9)$ i $C(5, -4, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, -3, 16)$ $\overrightarrow{AC} = (4, -5, 7)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+7 \\ 4 & -3 & 16 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 59x + 36y - 8z - 151 = 0$$

023 Calcula l'equació general dels plans que contenen dos dels eixos de coordenades.

Eix X i eix Y: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z = 0$

Eix X i eix Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = 0$

Eix Y i eix Z: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x = 0$

024 Determina la posició d'aquestes rectes:

$$r: (x, y, z) = (0, -5, 3) + t(1, 1, 1)$$

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$r: \begin{cases} P(0, -5, 3) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s: \begin{cases} Q(3, 0, -2) \\ \vec{v} = (2, 2, 2) \end{cases}$

$\vec{PQ} = (3, 5, -5)$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1$ $\qquad$ $\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2$

Les rectes són paral·leles.

025 Determina les posicions relatives de les rectes següents:

$$r: (x, y, z) = (2, 2, 2) + t(1, 1, 1)$$
$$s: (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$r: \begin{cases} P(2, 2, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$

$s: \begin{cases} Q(0, 0, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, 0) \end{cases}$

$\vec{PQ} = (-2, -2, -2)$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ $\qquad$ $\text{rang} \begin{pmatrix} \cancel{-1} & 1 & -1 \\ \cancel{-1} & 0 & -0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$

Les rectes són secants.

026 Estudia la posició relativa d'aquestes rectes:

$$r:\ \left.\begin{matrix} -x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{matrix}\right\} \qquad s:\ \left.\begin{matrix} x+y-z+2=0 \\ x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Les rectes són secants.

027 Estudia la posició relativa d'aquestes rectes:

$$r:\ \left.\begin{matrix} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{matrix}\right\}$$

$$s:\ \left.\begin{matrix} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Les rectes es creuen.

028 Calcula la posició relativa de la recta i el pla:

$$r:\ \left.\begin{matrix} x+y-z+2=0 \\ -x+3y-z+1=0 \end{matrix}\right\} \qquad \pi:\ x+z+1=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La recta i el pla es tallen en un punt.

029 Troba la posició relativa de la recta i el pla:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \qquad \pi: 2x - 5y + 3z + 3 = 0$$

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x = y+2 \\ -x = z-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x - y - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

La recta i el pla es tallen en un punt.

030 Troba la posició relativa d'aquestes parelles de plans.

a) $\pi_1: -x + 2y - z = 0$
$\pi_2: x - 2y + z + 1 = 0$

b) $\pi_1: x - z + 11 = 0$
$\pi_2: -2y - z + 11 = 0$

a) $\text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són paral·lels.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són secants.

031 Estudia la posició relativa dels plans.

a) $\pi_1: -6x + 5y - 3z + 2 = 0$
$\pi_2: x - y + z = 0$

b) $\pi_1: x - 2y - z + 1 = 0$
$\pi_2: -2x + 4y - 2z + 3 = 0$

a) $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són secants.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són secants.

032 Escriu l'equació vectorial d'un pla que sigui paral·lel al pla que passa pels punts $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 2, 3)$ i $C(2, -1, 4)$.

Quants plans hi ha que verifiquin aquesta condició?

El pla que busquem té com a vectors directors $\vec{AB} = (-1, 1, 1)$ i $\vec{AC} = (2, -2, 2)$, i pot passar per qualsevol punt que no pertanyi al pla que passa per A, B i C.

El punt $D(0, 0, 0)$ no pertany a aquest pla.

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, -2, 2)$

Hi ha infinits plans paral·lels al pla que passa per A, B i C.

033 Troba l'equació del pla que passa per l'origen de coordenades i és paral·lel a les rectes:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3} \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

$$r: \begin{cases} A(1, 3, -4) \\ \vec{u} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} B(0, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 3) \end{cases} \qquad \vec{AB} = (-1, -4, 4)$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 8x - 7y - 5z = 0$$

034 Escriu l'equació de tres plans en l'espai que es tallin a l'origen de coordenades. Comprova que verifiquin la condició de plans que es tallen en un punt.

Resposta oberta. Per exemple: $\left.\begin{matrix} \pi_1: x - y + z = 0 \\ \pi_2: x + y - z = 0 \\ \pi_3: x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Secants en un punt.}$$

035 Dóna l'equació vectorial de tres plans diferents que continguin l'eix X, i comprova que verifiquin la condició de plans concorrents en una recta.

Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{matrix} \pi_1: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1) \\ \pi_2: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(2, -1, 1) \\ \pi_3: (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, -2, 2) \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \pi_1: y - z = 0 \\ \pi_2: y + z = 0 \\ \pi_3: 2y + z = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Els plans verifiquen la condició de ser secants en una recta.

036 Determina la posició relativa d'aquests plans:

$$\pi_1: 6x + 3y - z = 0$$
$$\pi_2: 3x - 2y + z - 3 = 0$$
$$\pi_3: 2y - z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 6 & \cancel{-3} & \cancel{1} & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & \cancel{-2} & \cancel{1} & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Els plans es tallen en un punt.

037 Estudia la posició relativa dels plans:

$$\pi_1: x - z + 2 = 0$$
$$\pi_2: 2x + 2y + 3z + 3 = 0$$
$$\pi_3: 3x + 8y + 7z + 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & -7 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Els plans es tallen en un punt.

038 Donats els vectors $\vec{u} = (3, 5, 1)$ i $\vec{v} = (6, -4, -2)$, efectua les operacions següents.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

d) $-2\vec{u} - \vec{v}$

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = (6, 10, 2) + (18, -12, -6) = (24, -2, -4)$

b) $5\vec{u} - 4\vec{v} = (15, 25, 5) - (24, -16, -8) = (-9, 41, 13)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-3, -5, -1) + (12, -8, -4) = (9, -13, -5)$

d) $-2\vec{u} - \vec{v} = (-6, -10, -2) - (6, -4, -2) = (-12, -6, 0)$

039 Troba dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ que verifiquin simultàniament les condicions següents:

$$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1)$$
$$3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19)$$

$$\left.\begin{matrix} 2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} + \left.\begin{matrix} 4\vec{u} + 2\vec{v} = (-6, 8, -2) \\ 3\vec{u} - 2\vec{v} = (-8, 13, -19) \end{matrix}\right\}$$
$$7\vec{u} = (-14, 21, -21) \rightarrow \vec{u} = (-2, 3, -3)$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4, -1) \rightarrow \vec{v} = (-3, 4, -1) - 2\vec{u}$$
$$\vec{v} = (-3, 4, -1) - 2(-2, 3, -3) = (1, -2, 5)$$

040 Calcula m i n perquè es verifiqui que $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$, en què $\vec{a} = (2, 10, -4)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ i $\vec{c} = (11, 15, -2)$.

$$m(2, 10, -4) + n(-1, 3, -2) = (11, 15, -2) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2m - n = 11 \\ 10m + 3n = 15 \\ -4m - 2n = -2 \end{array}\right\}$$

Resolem les dues primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{r} 6m - 3n = 33 \\ 10m + 3n = 15 \end{array}\right\} \rightarrow 16m = 48 \rightarrow m = 3 \rightarrow n = -5$$

Comprovem que es verifica l'última equació:

$-4 \cdot 3 - 2 \cdot (-5) = -2$

La solució és vàlida: $m = 3$ i $n = -5$.

041 Troba un vector $\vec{t}$ que verifiqui que $2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{t} - \vec{w}$, en què $\vec{u} = (8, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -6)$ i $\vec{w} = (-6, 2, 4)$.

$$2\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (16, -2, 6) - (6, 0, -18) + (-6, 2, 4) = (4, 0, 28)$$

$$\vec{t} = (2, 0, 14)$$

042 Els components de $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ en una base determinada de V_3 són:

$$\vec{u} = (2, 0, -1) \qquad \vec{v} = (-3, 1, 2) \qquad \vec{w} = (4, -2, 7)$$

Troba, en aquesta mateixa base, els components del vector:

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = (4, 0, -2) - (-3, 1, 2) + \frac{1}{3}(4, -2, 7) = \left(\frac{25}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

043 Expressa, en cada cas, el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal de $\vec{u} = (-2, 3, -3)$ i $\vec{v} = (1, -2, 5)$.

a) $\vec{w} = (-9, 14, -17)$

b) $\vec{w} = (10, -16, 22)$

c) $\vec{w} = (-1, 1, -1)$

a) $(-9, 14, -17) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -9 \\ 3a - 2b = 14 \\ -3a + 5b = -17 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -18 \\ 3a - 2b = 14 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -4 \rightarrow a = 4 \rightarrow b = -1$$

Comprovem a l'última equació: $-3 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -17$

Així doncs: $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$

b) $(10, -16, 22) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = 10 \\ 3a - 2b = -16 \\ -3a + 5b = 22 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -20 \\ 3a - 2b = -16 \end{array}\right\} \rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4 \rightarrow b = 2$$

Comprovem a l'última equació: $-3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 22$

Així doncs: $\vec{w} = -4\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $(-1, 1, -1) = a(-2, 3, -3) + b(1, -2, 5)$

$$\left.\begin{array}{r} -2a + b = -1 \\ 3a - 2b = 1 \\ -3a + 5b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + 2b = -2 \\ 3a - 2b = 1 \end{array}\right\} \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 1$$

Comprovem a l'última equació: $-3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 2 \neq -1$

Així doncs, $\vec{w}$ no es pot expressar com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

044 Determina k perquè els tres vectors siguin linealment dependents.

$$\vec{u} = (3, -2, 0) \qquad \vec{v} = (1, 3, 11) \qquad \vec{w} = (2, 4, k)$$

Si els tres vectors són linealment dependents:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 11 \\ 2 & -4 & k \end{pmatrix} < 3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 11 \\ 2 & -4 & k \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 11k - 176 = 0 \rightarrow k = 16$$

045 Demostra que no es poden trobar a, b i c, diferents de zero, de manera que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, en què $\vec{u} = (-2, 0, 4)$, $\vec{v} = (-1, -3, 9)$ i $\vec{w} = (3, 1, 7)$.

$$a(-2, 0, 4) + b(-1, -3, 9) + c(3, 1, 7) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} -2a - b + 3c = 0 \\ -3b + c = 0 \\ 4a + 9b + 7c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 92 \neq 0$$

El sistema és compatible determinat. Com que és un sistema homogeni, l'única solució és: $a = b = c = 0$

046 Demostra que els tres vectors són coplanaris.

$$\vec{u} = (9, 4, 1) \qquad \vec{v} = (-3, 3, -7) \qquad \vec{w} = (2, -2, 6)$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -7 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$$

Els vectors són coplanaris perquè són linealment dependents.

047 Decideix si els trios de vectors següents són bases de l'espai.

a) $\vec{u} = (5, 2, -1)$ $\vec{v} = (4, 0, -2)$ $\vec{w} = (3, 4, 2)$

b) $\vec{u} = (5, -2, 3)$ $\vec{v} = (-2, 4, 2)$ $\vec{w} = (-1, 10, 9)$

c) $\vec{u} = (2, 3, 0)$ $\vec{v} = (0, -1, 3)$ $\vec{w} = (-1, -1, -1)$

d) $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ $\vec{v} = (2, 2, 3)$ $\vec{w} = (4, 3, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Formen una base perquè són linealment independents.

b) $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 0$

No formen una base perquè són linealment dependents.

c) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -0 \\ -0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Formen una base perquè són linealment independents.

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

Formen una base perquè són linealment independents.

048 Quin valor ha de tenir p perquè el vector $\vec{u} = (4, p, 6)$ estigui al mateix pla que $\vec{v} = (2, -1, 5)$ i $\vec{w} = (-5, 3, -13)$?

Perquè el vector $\vec{u}$ estigui al mateix pla que $\vec{v}$ i $\vec{w}$, cal que els tres vectors siguin coplanaris; per tant, han de ser linealment dependents.

$$\begin{vmatrix} -4 & p & 6 \\ -2 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow p - 2 = 0 \rightarrow p = 2$$

049 Quina relació han de complir a i b perquè els tres vectors siguin coplanaris?

$\vec{u} = (a, 2, b)$ $\vec{v} = (3, a, 5)$ $\vec{w} = (1, -b, -1)$

Els vectors són coplanaris si són linealment dependents.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 3 & a & 5 \\ 1 & -b & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -a^2 + 4ab - 3b^2 + 16 = 0$$

050 Digues si l'afirmació següent és certa o falsa, i justifica la resposta amb un exemple il·lustratiu:

Si tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents, aleshores també ho són els vectors: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ i $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$.

(Activitat de Selectivitat)

L'afirmació és certa. Si tres vectors són linealment independents, el determinant que formen les seves coordenades és diferent de 0.
Per les propietats dels determinants, si fem combinacions lineals de les files, el valor del determinant no varia, és a dir, també és diferent de 0.

Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,3)\\ \vec{v}=(1,2,1)\\ \vec{w}=(1,0,1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}2&1&3\\1&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0\rightarrow \text{Són linealment independents.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}+\vec{v}=(3,3,4)\\ \vec{u}-\vec{v}=(1,-1,2)\\ \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,3)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}3&-3&4\\1&-1&2\\2&-1&3\end{vmatrix}=4\neq 0\rightarrow \text{Són linealment independents.}$$

051 Considera els vectors: $\vec{u}=(1,1,m)$ $\quad\vec{v}=(0,m,-1)$ $\quad\vec{w}=(1,2m,0)$

a) Determina el valor de m perquè els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment dependents.

b) Per al valor de m obtingut en l'apartat anterior, expressa el vector $\vec{w}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\begin{vmatrix}1&1&m\\0&m&-1\\1&2m&0\end{vmatrix}=0\rightarrow -m^2+2m-1=0\rightarrow m=1$

b) $(1,2,0)=a(1,1,1)+b(0,1,-1)\rightarrow\left.\begin{array}{r}a=1\\ a+b=2\\ a-b=0\end{array}\right\}\rightarrow b=1\rightarrow \vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

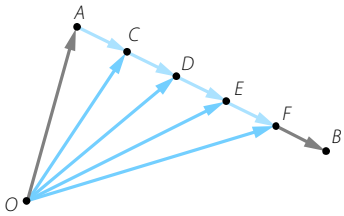
052 Troba un punt C en el segment AB, si saps que $A(-1,4,3)$ i $B(2,10,-6)$, de manera que $\overline{AC}$ sigui la meitat que $\overline{CB}$.

Si $C(c_1, c_2, c_3)$, aleshores:

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CB}\rightarrow(c_1+1,c_2-4,c_3-3)=\frac{1}{2}\cdot(2-c_1,10-c_2,-6-c_3)$$

$$\left.\begin{array}{r}c_1+1=1-\frac{1}{2}c_1\\ \rightarrow c_2-4=5-\frac{1}{2}c_2\\ c_3-3=-3-\frac{1}{2}c_3\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}c_1=0\\ c_2=6\rightarrow C(0,6,0)\\ c_3=0\end{array}\right.$$

053 Determina els quatre punts que divideixen el segment d'extrems $A(2, -6, 3)$ i $B(12, -1, 8)$ en cinc parts iguals.



$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{AB} = (2, -6, 3) + \frac{1}{5}(10, 5, 5) = (4, -5, 4) \rightarrow C(4, -5, 4)$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{AB} = (2, -6, 3) + \frac{2}{5}(10, 5, 5) = (6, -4, 5) \rightarrow D(6, -4, 5)$$

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{AB} = (2, -6, 3) + \frac{3}{5}(10, 5, 5) = (8, -3, 6) \rightarrow E(8, -3, 6)$$

$$\vec{OF} = \vec{OA} + \vec{AF} = \vec{OA} + \frac{4}{5}\vec{AB} = (2, -6, 3) + \frac{4}{5}(10, 5, 5) = (10, -2, 7) \rightarrow F(10, -2, 7)$$

054 Comprova si els següents punts en l'espai estan alineats.

a) $A(3, 3, -5)$, $B(4, -6, 1)$ i $C(2, -4, 5)$ b) $A(-4, 1, 2)$, $B(0, 6, 1)$ i $C(-12, -9, 4)$

a) $\vec{AB} = (1, -9, 6)$ $\vec{AC} = (-1, -7, 10)$

Els vectors no són proporcionals; per tant, els punts no estan alineats.

b) $\vec{AB} = (4, 5, -1)$ $\vec{AC} = (-8, -10, 2)$

Els vectors són proporcionals; per tant, els punts estan alineats.

055 Troba els valors de a i b que fan que els tres punts estiguin alineats: $P(2, -1, a)$, $Q(5, 1, 6)$ i $R(b, -5, 9)$.

Els punts estan alineats si els vectors són proporcionals.

$$\left.\begin{matrix}\vec{PQ} = (3, 2, 6-a) \\ \vec{PR} = (b-2, -4, 9-a)\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{3}{b-2} = \frac{2}{-4} = \frac{6-a}{9-a} \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -4 \end{cases}$$

056 Tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són $A(3, 1, 0)$, $B(4, 5, 2)$ i $C(4, 7, -2)$.

a) Troba el quart vèrtex del paral·lelogram. b) Calcula'n el perímetre.

a) Considerem $D(d_1, d_2, d_3)$ el vèrtex que busquem.

$\vec{AB} = (1, 4, 2)$

Aleshores: $\vec{CD} = (d_1 - 4, d_2 - 7, d_3 + 2) = (1, 4, 2) \rightarrow D(5, 11, 0)$

b) $|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$

$\vec{AC} = (1, 6, -2)$

$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$

El perímetre del paral·lelogram és: $2\sqrt{21} + 2\sqrt{41}$

057 Decideix si els següents grups de punts estan en el mateix pla o no.

a) $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(1, 0, 5)$ i $D(1, 3, -2)$

b) $A(0, 0, -1)$, $B(1, 0, -2)$, $C(0, 1, -2)$ i $D(4, 1, 5)$

a) $\vec{AB} = (2, 1, -1)$ $\quad \vec{AC} = (1, -1, 3)$ $\quad \vec{AD} = (1, 2, -4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow$$ Els punts són coplanaris.

b) $\vec{AB} = (1, 0, -1)$ $\quad \vec{AC} = (0, 1, -1)$ $\quad \vec{AD} = (4, 1, 6)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow$$ Els punts no són coplanaris.

058 Quines condicions han de complir a, b i c perquè els punts $P(3, 5, -7)$, $Q(4, a, -3)$ i $R(b, -7, c)$ estiguin alineats?

Si P, Q i R estan alineats, aleshores $\vec{PQ}$ i $\vec{PR}$ són linealment dependents, és a dir, són proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PQ} = (1, a-5, 4) \\ \vec{PR} = (b-3, -12, c+7) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{b-3} = \frac{a-5}{-12} = \frac{4}{c+7} \rightarrow \left.\begin{array}{l} (a-5)(b-3) = -12 \\ (a-5)(c+7) = -48 \end{array}\right\}$$

059 Troba l'equació de la recta que passa pels punts $A(3, -1, 4)$ i $B(-4, 3, 2)$.

$\vec{AB} = (-7, 4, -2)$

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 3 - 7t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 - 2t \end{array}\right.$$

060 Determina una recta paral·lela a l'eix Y que passi pel punt $(4, -2, 3)$.

Com que és paral·lel a l'eix Y, un vector director de la recta és $(0, 1, 0)$.

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{array}\right.$$

061 El punt $(-1, 2, 7)$ pertany a la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right.$? En cas negatiu, troba l'equació en forma paramètrica de la recta paral·lela a r que passa per aquest punt.

$-1 = -2 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$2 = 3 - \lambda \rightarrow \lambda = 1$

$7 = 2 + 3\lambda \rightarrow \lambda \neq 1 \rightarrow$ El punt no pertany a la recta.

$$r: \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{array}\right.$$

062 Expressa en forma contínua l'equació de la recta que passa pel punt (—5, —4, 0) i és paral·lela a la recta *r*, les equacions paramètriques de la qual són:

$$r:\ \left.\begin{array}{r} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array}\right\}$$

a) El punt (1, —13, —3) és en aquesta recta? b) I el punt (—3, —7, —2)?

$$r:\ \frac{x+5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$$

a) $\frac{1+5}{-2} = \frac{-13+4}{3} = \frac{-3}{1} \rightarrow$ El punt pertany a la recta.

b) $\frac{-3+5}{-2} = \frac{-7+4}{3} \neq \frac{-2}{1} \rightarrow$ El punt no pertany a la recta.

063 Considera els punts $A(-3, 2, 9)$, $B(1, 0, -7)$ i $C(0, 4, -3)$:

a) Troba l'equació de la recta que passa per *A* i *B*.

b) Els tres punts estan alineats?

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -16)$

$$r:\ \left.\begin{array}{r} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = -7 - 16t \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 0 = 1 + 4t \rightarrow t = -\frac{1}{4} \\ 4 = -2t \rightarrow t \neq -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$ *C* no pertany a la recta que passa per *A* i per *B*. Els punts no estan alineats.

064 Calcula el valor que ha de tenir *m* perquè les rectes següents es tallin en un punt.

$$r:\ \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{0} \qquad s:\ \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

$$r:\ \begin{cases} P(m, -10, -3) \\ \vec{v} = (-1, 4, 0) \end{cases} \qquad s:\ \begin{cases} Q(1, 6, -1) \\ \vec{u} = (0, 4, 2) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$\overrightarrow{PQ} = (1\ -m, 16, 2)$

Les rectes es tallen si $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{pmatrix} = 2.$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1-m & 16 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -8m + 32 = 0 \rightarrow m = 4$$

065 Expressa en la forma indicada l'equació de les rectes les equacions implícites de les quals són:

a) $r:\left.\begin{array}{l} x-3y+4z=2 \\ 3x-y+2z=4 \end{array}\right\}$ en forma paramètrica

b) $s:\left.\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\}$ en forma contínua

a) $x=2+3y-4z \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y+4z=2 \\ 8y-10z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4}-t \\ y=-\dfrac{1}{4}+5t \\ z=4t \end{array}\right\}$

b) $y=1-2x+z \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y-z=1 \\ -5x+5z=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5}+t \\ y=-\dfrac{1}{5}-t \\ z=t \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{y+\frac{1}{5}}{-1}=\dfrac{z}{1}$

066 Passa a forma implícita l'equació de la recta:

$$r:\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$$

$$r:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$$

067 Calcula l'equació cartesiana de la recta l'expressió paramètrica de la qual

és $r:\left.\begin{array}{l} x=1-3\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=2+2\alpha \end{array}\right\}$

Existeix algun valor de v tal que el punt (v, v, v) pertanyi a la recta? Raona la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$r:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} x-1=-3y+3 \\ 2x-2=-3z+6 \end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\}$$

$$r:\left.\begin{array}{l} x+3y-4=0 \\ 2x+3z-8=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{P(v,v,v)} \begin{array}{l} v+3v-4=0 \rightarrow v=1 \\ 2+3-8\neq 0 \end{array}$$

Cap punt (v, v, v) verifica les dues equacions; per tant, no existeix un valor de v tal que $P(v, v, v) \in r$.

068 Calcula l'equació de la recta paral·lela a la recta: $r:\left.\begin{matrix} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{matrix}\right\}$ que passsa pel punt (0, 1, 0).

(Activitat de Selectivitat)

$$r:\left.\begin{matrix} z=x+y \\ 3x=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{matrix} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3}+t \\ z=t \end{matrix}\right\} \text{ La recta paral·lela és } s:\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=1+t \\ z=t \end{matrix}\right\}$$

069 Sigui r la recta definida per $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z}{3}$ i s la recta definida per $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$. Troba k si saps que les rectes r i s es tallen en un punt.

$$r:\left\{\begin{matrix} P(2,k,0) \\ \vec{v}=(1,2,3) \end{matrix}\right. \qquad s:\left\{\begin{matrix} Q(-2,1,3) \\ \vec{u}=(-3,-2,-1) \end{matrix}\right. \qquad \vec{PQ}=(-4,1-k,3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -4 & 1-k & -3 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 8k-12=0 \rightarrow k=\frac{3}{2}$$

070 Determina l'equació de la recta que passa pel punt $P(-2,-1,-4)$ i recolza en les rectes següents:

$$r:\left.\begin{matrix} x=4+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{matrix}\right\} \qquad s:\left.\begin{matrix} 2x-y+z+4=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{matrix}\right\}$$

Calculem l'equació del pla que conté el punt P i la recta r:

$Q(4,1,2)\in r \qquad \vec{PQ}=(6,2,6) \qquad \vec{v}_r=(1,1,1)$

$$\pi:\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4x+4z+8=0 \rightarrow \pi: x-z-2=0$$

Calculem l'equació del pla que conté el punt P i la recta s:

$$s:\left.\begin{matrix} 2x-y+z+4=0 \\ -7y+5z+10=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow s:\left.\begin{matrix} x=-1-t \\ y=5t \\ z=-2+7t \end{matrix}\right\} \begin{matrix} R(-1,0,-2)\in s \\ \vec{v}_s=(-1,5,7) \end{matrix} \qquad \vec{PR}=(1,1,2)$$

$$\sigma:\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}=-3x-9y+6z+9=0 \rightarrow \sigma: x+3y-2z-3=0$$

La recta que busquem és m: $\left.\begin{matrix} x-z-2=0 \\ x+3y-2z-3=0 \end{matrix}\right\}$

071 Considera A i B els punts de l'espai de coordenades $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$. Troba l'equació paramètrica de la recta que passa per aquests punts.

Existeixen valors de r i s per als quals el punt C de coordenades $C(3, r+s, r-s)$ pertanyi a la recta que has calculat abans? En cas afirmatiu, calcula els valors de r i s. En cas negatiu, raona la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$

$$m: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3 = t \\ r + s = 1 + t \\ r - s = 2 + t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r + s = 4 \\ r - s = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{9}{2} \\ s = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

072 Troba l'equació contínua de la recta que passa pel punt $P(1, 0, 0)$ i talla les rectes:

$$r_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \qquad r_2: \left.\begin{array}{r} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

Calculem l'equació del pla que conté el punt P i la recta r_1:

$Q(2, 1, 0) \in r_1 \qquad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 0) \qquad \vec{u} = (1, -1, 2)$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y - 2z - 2 = 0 \rightarrow \pi_1: x - y - z - 1 = 0$$

Calculem l'equació del pla que conté el punt P i la recta r_2:

$$\pi_2: \left.\begin{array}{r} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \pi_2: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = -7 + 5t \end{array}\right\} \quad R(0, 4, -7) \in r_2 \qquad \overrightarrow{PR} = (-1, 4, -7)$$
$$\vec{v}_r = (1, -3, 5)$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 4 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -x - 2y - z + 1 = 0 \rightarrow \pi_2: x + 2y + z - 1 = 0$$

La recta és s: $$\left.\begin{array}{r} x - y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{array}\right\} \rightarrow s: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{3}$$

073 Prova que les equacions $\left.\begin{array}{r} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{array}\right\}$ i $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$ representen la mateixa recta.

(Activitat de Selectivitat)

$$r: \left.\begin{array}{r} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

Les dues rectes tenen la mateixa equació, representen la mateixa recta.

074 Considera P i Q els punts de l'espai $P(1, 2, 2)$ i $Q(2, a, a)$. Troba el valor de a perquè la recta que uneix P i Q passi per l'origen de coordenades.

Troba l'equació de la recta com a intersecció de dos plans i en forma paramètrica.

(Activitat de Selectivitat)

$\overrightarrow{PQ} = (1, a-2, a-2)$ $\qquad$ $r: \left\{\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = 2+(a-2)t \\ z = 2+(a-2)t \end{array}\right.$

Si la recta passa per l'origen de coordenades: $\left\{\begin{array}{r} 0 = 1+t \\ 0 = 2+(a-2)t \\ 0 = 2+(a-2)t \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ a = 4 \end{array}\right.$

Així, doncs, l'equació de la recta és:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1+t \\ r: y = 2+2t \\ z = 2+2t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 2x-z=0 \end{array}\right\}$$

075 De totes les rectes que passen pel punt $P(0, 2, -1)$, troba la que talla les rectes d'equacions:

$(x, y, z) = (1, 1, 2) + t(2, -1, 0)$ $\qquad$ $(x, y, z) = (0, 1, 1) + s(-3, 1, 2)$

(Activitat de Selectivitat)

Considerem $A(1+2t, 1-t, 2)$ un punt de la primera recta, i $B(-3s, 1+s, 1+2s)$ un punt de la segona.

Si la recta que busquem passa per A, B i P, aleshores els punts estan alineats, és a dir, $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{BP}$ són proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (-1-2t, 1+t, -3) \\ \overrightarrow{BP} = (3s, 1-s, -2-2s) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{-1-2t}{3s} = \frac{1+t}{1-s} = \frac{-3}{-2-2s}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} (1+2t)(2+2s) = -9s \\ (1+t)(2+2s) = 3(1-s) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4t+11s+4st = -2 \\ 2t+5s+2st = 1 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 4t(1+s) = -2-11s \rightarrow t = -\frac{2+11s}{4(1+s)}$$

$$\rightarrow -\frac{2+11s}{2(1+s)} + 5s - s \cdot \frac{2+11s}{2(1+s)} = 1 \rightarrow s^2 + 5s + 4 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} s = -1 \text{ (no vàlida)} \\ s = -4 \rightarrow t = -\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Així, doncs, $P(0, 2, -1) \in r$ i un vector director és $\overrightarrow{BP} = (12, -5, -6)$.

$$\left.\begin{array}{r} x = 12t \\ r: y = 2-5t \\ z = -1-6t \end{array}\right\}$$

076 Troba l'equació de la recta continguda al pla $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$ que talla els eixos *Y* i *Z*.

(Activitat de Selectivitat)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A(0, 1, 0) \text{ és el punt d'intersecció del pla amb l'eix } Y.$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 6z - 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) \text{ és el punt d'intersecció del pla amb l'eix } Z.$$

Així, doncs, un vector director de la recta continguda en π que talla els eixos *Y* i *Z* és $\overrightarrow{AB} = \left(0, -1, \frac{1}{3}\right)$.

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = \frac{1}{3}t \end{array}\right\}$$

077 Donats els punts $A(-2, -4, -3)$ i $B(2, 6, 5)$, i la recta $r: \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{array}\right\}$, esbrina si existeix alguna recta tal que contingui els punts *A* i *B* i talli la recta *r*. Raona la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

La recta que conté *A* i *B* és:

$\overrightarrow{AB} = (4, 10, 8)$ $\qquad s: \left.\begin{array}{r} x = 2 + 4t \\ y = 6 + 10t \\ z = 5 + 8t \end{array}\right\}$

Calculem un vector director de *r*:

$$r: \left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ 3x - 2z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = -1 + 3t \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, 5, 3)$$

$P(0, -2, -1) \in r$ $\qquad \overrightarrow{AP} = (2, 2, 2)$

Estudiem les posicions relatives de *r* i *s*.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Les rectes no es tallen, es creuen.

078 Troba les equacions paramètriques del pla que passa pels punts $P(3, -1, 5)$, $Q(1, 2, 3)$ i $R(9, -2, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-2, 3, -2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (6, -1, -7)$

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda + 6\mu \\ y = -1 + 3\lambda - \mu \\ z = 5 - 2\lambda - 7\mu \end{array}\right\}$$

079 Troba l'equació implícita del pla que passa pels punts $P(4, 3, 1)$, $Q(6, 2, -3)$ i $R(2, 4, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -4)$ $\qquad$ $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, -3)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z-1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7x + 14y - 70 = 0 \rightarrow \pi: x + 2y - 10 = 0$$

080 Troba les equacions paramètriques del pla paral·lel a les rectes

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ i } s: \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array}\right\} \text{ que passa pel punt } P(8, 9, 1).$$

Els vectors directors de les rectes són els vectors directors del pla.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = 8 - 2\lambda - \mu \\ y = 9 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{array}\right\}$$

081 Escriu en forma paramètrica les equacions del pla $2x - y + 4z = 7$.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -7 + 2\lambda + 4\mu \\ z = \mu \end{array}\right\}$$

082 Escriu en forma implícita l'equació del pla:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda + 3\mu \\ y = 3 + 2\lambda - \mu \\ z = 5 + 2\mu \end{array}\right\}$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y - 7z + 45 = 0 \rightarrow \pi: 4x - 2y - 7z + 45 = 0$$

083 Escriu les equacions paramètriques dels plans cartesians (els plans que contenen dos dels eixos cartesians).

Equacions paramètriques del pla OXY: $\left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$

Equacions paramètriques del pla OXZ: $\left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{matrix}\right\}$

Equacions paramètriques del pla OYZ: $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{matrix}\right\}$

084 Determina l'equació del pla que conté la recta r: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ i passa pel punt $A(4, 0, -1)$.

$P(1, -1, 5) \in r \qquad \overrightarrow{AP} = (-3, -1, 6) \qquad \overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 2)$

Busquem un pla que passi per $A(4, 0, -1)$ i que té com a vectors directors $\overrightarrow{v_r}$ i $\overrightarrow{AP}$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-4 & y & z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 20x + 10z - 70 = 0 \rightarrow \pi: 2x + z - 7 = 0$$

085 Troba els punts en què el pla π: $2x - 3y + 5z - 30 = 0$, talla els eixos coordenats.

$$\left.\begin{matrix} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow x = 15$$

Talla l'eix X en el punt $P(15, 0, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y = -10$$

Talla l'eix Y en el punt $Q(0, -10, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} 2x - 3y + 5z - 30 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow z = 6$$

Talla l'eix Z en el punt $R(0, 0, 6)$.

086 Troba les equacions del pla paral·lel al pla $2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que passa pel punt $(-2, 3, -1)$.

$$\pi: 2x - 2y + 3z - 12 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{r} x = 6 + \lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = 2\mu \end{array}\right\}$$

Els vectors $\vec{u} = (1, 1, 0)$ i $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ també són vectors directors del pla que busquem.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 3z + 13 = 0 \rightarrow \pi': 2x - 2y + 3z + 13 = 0$$

087 Calcula l'equació del pla que conté la recta r: $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ i és paral·lel a la recta s: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\}$.

$$s: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x = -3 - t \\ y = 4t \\ z = 1 + 7t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 4, 7)$$

El punt que busquem passa pel punt $P(-1, -1, -3) \in r$, i té per vectors directors $\vec{v}_r = (-2, 2, -1)$ i $\vec{v}_s = (-1, 4, -7)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 18x + 15y - 6z + 15 = 0 \rightarrow \pi: 6x + 5y - 2z + 5 = 0$$

088 Considera els punts de l'espai:

$$A(0, 0, 1) \qquad B(1, 1, 2) \qquad C(0, -1, -1)$$

a) Troba l'equació del pla ABC.

b) Si D és el punt de coordenades $(k, 0, 0)$, quin valor ha de tenir k perquè els quatre punts A, B, C i D siguin coplanaris?

(Activitat de Selectivitat)

a) $\vec{AB} = (1, 1, 1) \qquad \vec{AC} = (0, -1, -2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

b) Si D pertany al mateix pla, aleshores:

$k - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow k = 1$

089 Calcula l'equació d'una recta que passa pel punt d'intersecció del pla π: $x + y - z + 6 = 0$ amb la recta s: $\frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ i que és paral·lela a la recta r: $\left.\begin{matrix} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$.

(Activitat de Selectivitat)

Calculem la intersecció entre π i s.

$$\left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \\ x + y - z + 6 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow 3t + 2 + t + 1 - t + 6 = 0 \rightarrow t = -3$$

$P(-9, -1, -4)$ és el punt d'intersecció del pla π i la recta s.

Calculem un vector director de r:

$$r: \left.\begin{matrix} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = t \\ y = 4 - 3t \\ z = 13 - 13t \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -3, 13)$$

La recta paral·lela a r que passa per P és m: $\left.\begin{matrix} x = -9 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = -4 - 13t \end{matrix}\right\}$

090 Troba el pla que és paral·lel a la recta: r: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}$ i que passa pels punts: $A(-3, 0, 1)$ $B(2, 2, -3)$.

El pla passa per A i té per vectors $\vec{AB} = (5, 2, -4)$ i $\vec{v}_z = (2, -3, 4)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y & z-1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4x - 28y - 19z + 7 = 0 \rightarrow \pi: 4x + 28y + 19z - 7 = 0$$

091 Considera els punts $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ i $C(1, 0, 0)$.

a) Amb $a = 2$, calcula b perquè els tres punts determinin un pla que passi pel punt $P(2, 0, 1)$. Quina és l'equació d'aquest pla?

b) Calcula els valors de a i b perquè els punts A, B i C estiguin alineats.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\vec{AB} = (1, 1, b - 1)$ $\quad\quad$ $\vec{AC} = (0, -1, -1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & b-1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: (b-2)x + y - z + 2 - b = 0$$

Si el pla conté el punt P, aleshores: $(b-2) \cdot 2 - 1 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 3$

L'equació del pla és: $x + y - z - 1 = 0$

b) A, B i C estan alineats si els vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ són proporcionals.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (a-1, 1, b-1)\\ \vec{AC} = (0, -1, -1)\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} a-1=0\\ b-1=1\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1\\ b=2\end{array}\right.$$

092 Calcula l'equació paramètrica i l'equació cartesiana del pla que conté els punts A, B i C de coordenades $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ i $C(1, 1, 1)$.

Existeix algun valor de u tal que el punt $(3, 2u, u+3)$ pertanyi al pla?

Raona la resposta, i calcula el valor de u si és la resposta és afirmativa.

(Activitat de Selectivitat)

$\vec{AB} = (-1, 1, 1)$ $\qquad$ $\vec{AC} = (0, 1, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1-\lambda\\ \pi:\ y = \lambda+\mu\\ z = \lambda+\mu\end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi:\ y-z=0$$

Si el pla conté el punt $(3, 2u, u+3)$, aleshores: $2u-u-3=0 \rightarrow u=3$

093 Donades les rectes:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

i el punt $P(1, 1, -1)$, volem trobar l'equació de la recta que passa per P i que talla r i s. Per aconseguir-ho:

a) Troba l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla π que conté la recta r i el punt P.

b) Troba el punt M calculant el punt d'intersecció del pla π amb la recta s.

c) Troba l'equació de la recta que passa pels punts P i M.

d) Comprova que la recta que has trobat a l'apartat anterior és la que busquem.

(Activitat de Selectivitat)

a) $Q(2, -1, 0) \in r$ $\qquad$ $\vec{PQ} = (1, -2, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} = 2y+4z+2=0 \rightarrow \pi:\ y+2z+1=0$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x = 1+t\\ s:\ y = -7+2t\\ z = -5+3t\end{array}\right\}$$

$\pi:\ y+2z+1=0 \rightarrow -7+2t-10+6t+1=0 \rightarrow t=2 \rightarrow M(3, -3, 1)$

c) $\vec{PM} = (2, -4, 2)$
$$\left.\begin{array}{l} x = 1+2t\\ m:\ y = 1-4t\\ z = -1+2t\end{array}\right\}$$

d) La recta m passa per P, per a $t=0$, i pel punt M, punt d'intersecció de r i s, per a $t=1$.

094 Determina una recta que sigui paral·lela al pla que passa pels punts de coordenades (1, 1, 0), (1, 0, 1) i (0, 1, 1), que també sigui paral·lela al pla $x + 2y + 3z = 0$, i que no estigui continguda en cap d'aquests plans.

(Activitat de Selectivitat)

El pla que passa per $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ i $C(0, 1, 1)$ és:

$\vec{AB} = (0, -1, 1)$ $\qquad$ $\vec{AC} = (-1, 0, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z + 2 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 2 = 0$$

La recta d'intersecció entre els dos plans és:

$$r: \left.\begin{matrix} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x + y + z - 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 4 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{matrix}\right\}$$

La solució del problema és una recta paral·lela a r. Per exemple:

$$s: \left.\begin{matrix} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{matrix}\right\}$$

095 Determina els extrems d'un segment AB si saps que el punt A pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt B pertany a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{3}$ i que el punt mitjà del segment és (0, 0, 0).

(Activitat de Selectivitat)

El punt B és de la forma $(1 + 2t, 2 - t, 3t)$.

Si el punt mitjà del segment és (0, 0, 0), aleshores el punt A ha de ser de la forma $(-1 - 2t, -2 + t, -3t)$.

Com que aquest punt pertany al pla $2x + y + z = 0$, tenim que:

$$2(-1 - 2t) - 2 + t - 3t = 0 \rightarrow -6t = 4 \rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Així, doncs, els punts són $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$ i $B\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right)$.

096 Troba les condicions que han de satisfer a i b perquè el punt $Q(2, a, b)$ estigui en el mateix pla que els punts $A(1, 3, 1)$, $B(1, 0, -1)$ i $C(0, 0, 2)$.

(Activitat de Selectivitat)

$\vec{AB} = (0, -3, -2)$ $\qquad$ $\vec{AC} = (-1, -3, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -9x + 2y - 3z + 6 = 0 \rightarrow \pi: 9x - 2y + 3z - 6 = 0$$

Si Q pertany al pla, aleshores: $18 - 2a + 3b - 6 = 0 \rightarrow 2a - 3b = 12$

097 Considera la recta $r: (x, y, z) = (t + 1, 2t, 3t)$, el pla $\pi: x - 2y - z = 0$ i el punt $P(1, 1, 1)$. Es demana:

a) Determina l'equació del pla π_1 que passa pel punt P i és paral·lel al pla π.

b) Determina l'equació del pla π_2 que conté la recta r i passa pel punt P.

c) Calcula l'equació paramètrica de la recta intersecció dels plans anteriors, π_1 i π_2.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\left.\begin{array}{l} \pi: \begin{array}{l} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi_1: \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \mu \end{array} \end{array}\right\}$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1: x - 2y - z + 2 = 0$$

b) $Q(1, 0, 0) \in r \qquad \overrightarrow{PQ} = (0, -1, -1) \qquad \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 3)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_2: x + y - z - 1 = 0$$

c) $s: \left.\begin{array}{r} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x - 2y - z + 2 = 0 \\ 3y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{array}\right\}$

098 Considera el punt $A(3, 5, -1)$ i la recta: $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$

Troba el punt B pertanyent a r tal que el vector d'extrems A i B és paral·lel al pla π d'equació $3x - 2y + z + 5 = 0$.

(Activitat de Selectivitat)

El punt B és de la forma $(1 + 2t, -2 + t, -1 + 4t)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2 + 2t, -7 + t, 4t)$

$$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi: \begin{array}{r} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -5 - 3\lambda + 2\mu \end{array} \end{array}\right\}$$

Si el vector d'extrems A i B és paral·lel a π, aleshores els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u} = (1, 0, -3)$ i $\overrightarrow{v} = (0, 1, 2)$ són linealment dependents.

$$\begin{vmatrix} -2 + 2t & -7 + t & 4t \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$$

Si substituïm $t = -1$ a l'expressió de B obtenim $B(-1, -3, -5)$.

099 Estudia les posicions relatives de les parelles de rectes següents.

a) $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z-3$ $\qquad s: x-2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+4$ $\qquad s: \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{matrix}\right\}$

d) $r: \left.\begin{matrix} 2x+z=4 \\ x+3y+z=4 \end{matrix}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} x+y-z=8 \\ 3x-y+3z=18 \end{matrix}\right\}$

e) $r: \left.\begin{matrix} 2x+y-z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{matrix}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} -x+y+2z=-2 \\ 3x-y+3z=11 \end{matrix}\right\}$

f) $r: \left.\begin{matrix} 2x+4y-z=7 \\ -x+y+2z=-2 \end{matrix}\right\}$ $\qquad s: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

a) $r: \begin{cases} P(2,-2,3) \\ \vec{u} = (-1,3,1) \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} Q(2,-4,4) \\ \vec{v} = (1,-1,-2) \end{cases}$ $\qquad \vec{PQ} = (0,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són secants.

b) $r: \begin{cases} P(3,2,-4) \\ \vec{u} = (2,-1,1) \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} Q(-1,5,-1) \\ \vec{v} = (-4,2,-2) \end{cases}$ $\qquad \vec{PQ} = (-4,3,3)$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són paral·leles.

c) $r: \begin{cases} P(3,-2,1) \\ \vec{u} = (-1,2,3) \end{cases}$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} 3x+z=10 \\ 5x-y-z=16 \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x=t \\ y=-26+8t \\ z=10-3t \end{matrix}\right\}$

$s: \begin{cases} Q(0,-26,10) \\ \vec{v} = (1,8,-3) \end{cases}$ $\qquad \vec{PQ} = (-3,-24,9)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 8 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són secants.

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & -3 & 18 \end{pmatrix} = 4$$

Les rectes es creuen.

e) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 & -11 \end{pmatrix} = 3$$

Les rectes són secants.

f) $$r: \left.\begin{matrix} 2x + 4y - z = 7 \\ 6y + 3z = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left\{\begin{matrix} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{matrix}\right.$$

$$r: \begin{cases} P(4, 0, 1) \\ \vec{u} = (-3, 1, -2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 1, -1) \\ \vec{v} = (3, -1, 2) \end{cases} \qquad \vec{PQ} = (-3, 1, -2)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

Les rectes són coincidents.

100 Decideix si les dues rectes es tallen, i en el cas que es tallin, calcula el pla que les conté.

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad \left.\begin{array}{r} x = 3-2\lambda \\ s: y = 1+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-3, 1, -1) \\ \vec{u} = (2, 2, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(3, 1, 0) \\ \vec{v} = (-2, 1, -1) \end{cases} \qquad \vec{PQ} = (6, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són secants.

El pla que les conté és:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + 4y + 6z - 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 4y - 6z + 1 = 0$$

101 Digues si les dues rectes són paral·leles o no.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 13 \\ 2x - y - 7z = 16 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x = 1-3\lambda \\ s: y = 2+\lambda \\ z = -\lambda \end{array}\right\}$$

En cas afirmatiu, determina l'equació del pla que les conté.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 13 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} x = 9 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{array}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(9, 2, 0) \\ \vec{u} = (3, -1, 1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 2, 0) \\ \vec{v} = (-3, 1, -1) \end{cases} \qquad \vec{PQ} = (-8, 0, 0)$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{rang} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són paral·leles.

El pla que les conté és:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -3 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8y - 8z + 16 = 0 \rightarrow \pi: y + z - 2 = 0$$

102 Decideix si aquestes dues rectes es tallen i, en cas afirmatiu, determina'n el punt de tall.

$$r:\begin{cases} x=-4+7\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=10+4\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} P(-4,0,-1) \\ \vec{u}=(7,2,0) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q(1,10,3) \\ \vec{v}=(-1,4,2) \end{cases} \qquad \vec{PQ}=(5,10,4)$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & 10 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes són secants.

$$\left.\begin{aligned} -4+7\lambda &= 1-t \\ 2\lambda &= 10+4t \\ -1 &= 3+2t \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ t = -2 \end{cases} \rightarrow P(3,2,-1) \text{ és el punt de tall.}$$

103 Decideix les posicions relatives de les següents parelles formades per un pla i una recta.

a) $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=2 \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$ $\qquad \pi: 2x-3y+z-2=0$

b) $r:\begin{cases} 2x+y-3z+3=0 \\ 5x+5y-7z+1=0 \end{cases}$ $\qquad \pi: x+3y-z-5=0$

c) $r:\begin{cases} -4x+y-2z+3=0 \\ 2x+4y+z+4=0 \end{cases}$ $\qquad \pi:\begin{cases} x=-1-\lambda+\mu \\ y=2+2\lambda-\mu \\ z=3-\mu \end{cases}$

a) $r:\left.\begin{aligned} \frac{x-3}{-1} &= \frac{z+1}{3} \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{aligned} 3x-9 &= -z-1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{aligned} 3x+z-8 &= 0 \\ y-2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

La recta i el pla es tallen en un punt.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -3 \\ 5 & 5 & -7 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 2$

La recta està continguda en el pla.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - y - z + 3 = 0 \rightarrow \pi: 2x + y + z - 3 = 0$

$\begin{vmatrix} \cancel{-2} & \cancel{1} & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{1} & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & -4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{1} & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 & -3 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & -1 & -4 \end{pmatrix} = 3$

La recta i el pla són paral·lels.

104 Estudia les posicions relatives de les parelles de plans:

a) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ z = 1 + 5\mu \end{array}\right\}$ $\pi': -5x + 5y + 4z - 12 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 4z - 1 = 0$ $\pi': 2x + 5y - 3z + 2 = 0$

c) $\pi: \left.\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 4\mu \end{array}\right\}$ $\pi': x - y + z + 2 = 0$

a) $\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10x - 10y - 8z - 22 = 0 \rightarrow \pi: 5x - 5y - 4z - 11 = 0$

$\text{rang} \begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 \\ -5 & \cancel{-5} & -4 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{vmatrix} \cancel{-5} & -11 \\ -5 & -12 \end{vmatrix} = -115 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -5 & -5 & -4 & -11 \\ -5 & \cancel{-5} & -4 & -12 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són paral·lels.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = 2$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$

Els plans són secants.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -x + y - z = 0 \rightarrow \pi: x - y + z + 2 = 0$

Les equacions de π i π' són iguals, és a dir, els plans són coincidents.

Si ho fem per rangs:

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

Els plans són coincidents.

105 **Estudia les posicions relatives dels grups de plans següents:**

a) $\pi: 4x + y + 3z + 2 = 0$
$\pi': -3x + 5y + 4z - 7 = 0$
$\pi'': y + 3z - 6 = 0$

b) $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$
$\pi': 2x + y - z + 5 = 0$
$\pi'': 7x - 4y + 7z + 7 = 0$

c) $\pi: 6x - 3y + 9z - 1 = 0$
$\pi': -x + 2y - z + 1 = 0$
$\pi'': 4x - 2y + 6z + 5 = 0$

d) $\pi: 2x - 3y + z = 0$
$\pi': 2x - y + 4z + 5 = 0$
$\pi'': 6x - 5y + 9z - 1 = 0$

a) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ -0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 \\ -0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\text{rang} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & 4 & -7 \\ -0 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 3$

Els plans es tallen en un punt.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & -7 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 7 & -4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \\ 7 & -4 & -7 & -7 \end{pmatrix} = 2$

Com que no hi ha dos plans coincidents, els tres plans es tallen en una recta.

c) $\begin{vmatrix} -6 & 3 & -9 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} -6 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 51 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} = 3$

Com que π i π' són paral·lels:

$$\frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{9}{6} \neq \frac{-1}{7}$$

Tenim dos plans paral·lels que tallen el tercer.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -5 & 9 \end{pmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 6 & -5 & -1 \end{vmatrix} = -44 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -0 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix} = 3$

Com que no hi ha plans paral·lels, els plans es tallen dos a dos.

106 Determina la posició relativa de les rectes següents:

$$r_1:\left.\begin{array}{r}7x+5y-7z-12=0\\2x+3z+11=0\end{array}\right\} \qquad r_2:\left.\begin{array}{r}5x-5y-z-16=0\\3x-2y-7=0\end{array}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix}7 & -5 & -7\\ 2 & -0 & 3\\ 5 & -5 & -1\end{vmatrix} = 260 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}7 & -5 & -7\\ 2 & -0 & 3\\ 5 & -5 & -1\\ 3 & -2 & -0\end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix}7 & -5 & -7 & -12\\ 2 & -0 & 3 & -11\\ 5 & -5 & -1 & -16\\ 3 & -2 & -0 & -7\end{vmatrix} = -552 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}7 & -5 & -7 & -12\\ 2 & -0 & 3 & -11\\ 5 & -5 & -1 & -16\\ 3 & -2 & -0 & -7\end{pmatrix} = 4$$

Les rectes es creuen.

107 Determina si el pla $\pi: 2x+3y-4=0$ talla o no el segment d'extrems $A(2,1,3)$ i $B(3,2,1)$.

(Activitat de Selectivitat)

Calculem l'equació de la recta que passa per A i per B.

$\overrightarrow{AB} = (1,1,-2)$

$$r:\left.\begin{array}{l}x=2+t\\ y=1+t\\ z=3-2t\end{array}\right\} \rightarrow r:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2}$$

$$\rightarrow r:\left.\begin{array}{r}x-2=y-1\\ -2x+4=z-3\end{array}\right\} \rightarrow r:\left.\begin{array}{r}x-y-1=0\\ 2x+z-7=0\end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -0 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -0 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix} = 3$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & -0 & 1 & -7\\ 2 & -3 & 0 & -4\end{pmatrix} = 3$$

La recta i el pla es tallen en un punt; en calculem la intersecció.

$$2(2+t)+3(1+t)-4=0 \rightarrow t=-\frac{3}{5} \rightarrow P\left(\frac{7}{5},\frac{2}{5},\frac{21}{5}\right)$$

Aquest punt no està situat entre A i B; per tant, el pla no talla el segment.

108 Considera r la recta d'equació $\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$ i la recta s donada per $\left.\begin{matrix}3x-2y+z=2\\-x+2y-3z=2\end{matrix}\right\}$.

a) Determina la posició relativa de totes dues rectes.

b) Troba l'equació del pla que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.

(Activitat de Selectivitat)

a) $s:\left.\begin{matrix}3x-2y+z=2\\y-2z=2\end{matrix}\right\}\rightarrow s:\left.\begin{matrix}x=2+t\\y=2+2t\\z=t\end{matrix}\right\}$ $\qquad s:\begin{cases}Q(2,2,0)\\\vec{v}=(1,2,1)\end{cases}$

$r:\begin{cases}P(5,-2,0)\\\vec{u}=(2,-1,4)\end{cases}$ $\qquad \vec{PQ}=(-3,4,0)$

$$\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&-2&1\end{pmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix}-2&-1&4\\-1&-2&1\\-3&-4&0\end{vmatrix}=35\neq 0\rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&-2&1\\-3&-4&0\end{pmatrix}=3$$

Les rectes es creuen.

b) $\pi:\begin{vmatrix}x-5&y+2&z\\2&-1&4\\1&2&1\end{vmatrix}=0\rightarrow \pi: 9x-2y-5z-49=0$

109 Considera r i s les rectes donades per:

$$r:\left.\begin{matrix}2x-y=m\\z+2y=3\end{matrix}\right\} \qquad s:\left.\begin{matrix}x+y=2\\x+2z=3\end{matrix}\right\}$$

a) Troba m perquè les dues rectes es tallin.

b) Per a $m=1$, troba l'equació del pla que conté les rectes r i s.

(Activitat de Selectivitat)

a) El rang de la matriu de coeficients i de l'ampliada ha de ser 3.

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&-2&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0\rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&-2&1\\1&-1&0\\1&-0&2\end{pmatrix}=3$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&0&m\\0&-2&1&3\\1&-1&0&2\\1&-0&2&3\end{vmatrix}=5m-5\rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}2&-1&0&m\\0&-2&1&3\\1&-1&0&2\\1&-0&2&3\end{pmatrix}=3\rightarrow m=1$$

b) $r: \left.\begin{matrix} 2x-y=1 \\ z+2y=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left\{\begin{matrix} x=t \\ y=-1+2t \\ z=5-4t \end{matrix}\right.$

$s: \left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x+2z=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left\{\begin{matrix} x=3-2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{matrix}\right.$

El pla que busquem passa pel punt $A(0, -1, 5) \in r$ i té com a vectors directors els vectors directors de les rectes r i s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 10x+7y+6z-23=0$$

110 Estudia, segons els valors del paràmetre k, la posició relativa de les rectes següents:

$$x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2} \qquad \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2$$

(Activitat de Selectivitat)

$$r: \begin{cases} P(k, -1, 0) \\ \vec{u}=(1, 2k-1, 2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(0, 2, -2) \\ \vec{v}=(k+1, -1, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(-k, 3, -2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 \\ k+1 & -1 \end{vmatrix} = -k(2k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = -2k-1$$

$$\begin{vmatrix} 2k-1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k+1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 & -2 \\ k+1 & -1 & -1 \\ -k & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2k^2+7k+3 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$2k^2+7k+3=0 \rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$: el rang de la matriu formada per $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\overrightarrow{PQ}$ és 3 i el de la matriu determinada per $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és 2; per tant, les rectes es creuen.
- Si $k=-3$: els rangs de les dues matrius valen 2; per tant, les rectes són secants.
- Si $k=-\frac{1}{2}$: el rang de la matriu formada per $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\overrightarrow{PQ}$ és 2, i el de la matriu determinada per $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és 1; així, doncs, les rectes són paral·leles.

111 Considera les rectes: $r\colon \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$ $\qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x=1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\}$

a) Estudia'n la posició relativa.

b) Calcula l'equació del pla que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.

(Activitat de Selectivitat)

a) $r\colon \begin{cases} P(0,1,2) \\ \vec{u}=(1,-1,-3) \end{cases}$ $\qquad s\colon \begin{cases} Q(1,3,1) \\ \vec{v}=(1,2,1) \end{cases}$ $\qquad \vec{PQ}=(1,2,-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Les rectes es creuen.

b) $\pi\colon \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\colon 5x-4y+3z-2=0$

112 Donades les rectes següents: $\dfrac{x-a}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ $\qquad \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{array}\right\}$

calcula el valor de a de manera que les dues rectes es tallin.
Determina'n el punt de tall.

(Activitat de Selectivitat)

$$s\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+z=1 \end{array}\right\} \rightarrow s\colon \left.\begin{array}{r} x=t \\ y=1-3t \\ z=1-2t \end{array}\right\} \qquad s\colon \begin{cases} Q(0,1,1) \\ \vec{v}=(1,-3,-2) \end{cases}$$

$$r\colon \begin{cases} P(a,-1,-1) \\ \vec{u}=(-2,-1,2) \end{cases} \qquad \vec{PQ}=(-a,2,2)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Les rectes es tallen si la matriu formada per $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{PQ}$ té rang 2.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -a & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 10-8a=0 \rightarrow a=\frac{5}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5}{4}-2\lambda=t \\ -1-\lambda=1-3t \\ -1+2\lambda=1-2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{4} \\ t=\dfrac{3}{4} \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{3}{4},-\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right) \text{ és el punt de tall.}$$

113 Considera r_1 i r_2 les rectes d'equacions: r_1: $\left.\begin{matrix} x-2z-1=0 \\ y-z-2=0 \end{matrix}\right\}$ r_2: $\left.\begin{matrix} x+y+z-1=0 \\ -2y+2z-a=0 \end{matrix}\right\}$

Determina el valor de a perquè r_1 i r_2 siguin coplanàries.

(Activitat de Selectivitat)

Les rectes són coplanàries si no es creuen. Així, doncs, la matriu formada per les dues rectes no pot tenir rang 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -a \end{vmatrix} = -4a - 16 = 0 \rightarrow a = -4$$

114 Considera la recta r: $\left.\begin{matrix} x = 2+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+3t \end{matrix}\right\}$, el pla π: $2x-4y-2z=0$ i el punt $P(1, 1, 1)$.

a) Determina l'equació del pla π_1 que passa pel punt P i és paral·lel al pla π.

b) Determina l'equació general del pla π_2 que conté la recta r i passa pel punt P.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\left.\begin{matrix} x = \lambda \\ \pi: \ y = \mu \\ z = \lambda - 2\mu \end{matrix}\right\}$ π_1: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_1: x-2y-z+2=0$

b) r: $\begin{cases} Q(2, 2, 3) \\ \vec{u} = (1, 2, 3) \end{cases}$ $\qquad \vec{PQ} = (1, 1, 2)$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi_2: x+y-z-1=0$$

115 Calcula a perquè la recta: r: $\left.\begin{matrix} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=-4 \end{matrix}\right\}$ sigui paral·lela al pla π: $ax-6y+4z=5$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \\ -6 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ a & -6 & -4 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

La recta és paral·lela al pla si la matriu de coeficients té rang 2.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -6 & -4 \end{vmatrix} = 2a - 52 = 0 \rightarrow a = 26$$

116 Considera π el pla d'equació $2x + 3y + 4z = a$ i r la recta que conté el punt $P(1, 1, -1)$ el vector de direcció de la qual és $\vec{v} = (1, 2, -2)$. Existeix algun valor de a per al qual la recta estigui continguda en el pla? Raona la resposta en cas negatiu. En cas afirmatiu, troba el valor de a.

(Activitat de Selectivitat)

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

La recta està continguda en el pla si la matriu ampliada té rang 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -0 & 1 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

117 Per a quins valors del paràmetre m la recta: $x = y + 1 = \dfrac{11 - mz}{3}$ és paral·lela al pla $2x + y + z = 9$? Determina el punt d'intersecció de la recta i el pla per a $m = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$r: \left.\begin{matrix} x = y + 1 \\ 3x = 11 - mz \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x - y = 1 \\ 3x + mz = 11 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -0 & 11 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -0 & m & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 3$$

La recta és paral·lela al pla si la matriu de coeficients té rang 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -0 & m \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3m = 0 \rightarrow m = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -0 & m \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Calculem la intersecció per a $m = 2$.

Si $m = 2 \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = t \\ y = -1 + t \\ z = \dfrac{11}{2} - \dfrac{3}{2}t \end{matrix}\right\}$ I, substituint en el pla:

$2t - 1 + t + \dfrac{11}{2} - \dfrac{3}{2}t = 9 \rightarrow t = 3 \rightarrow P(3, 2, 1)$ és el punt d'intersecció.

118 Estudia la posició relativa del pla $\pi: 5x + \lambda y - 2z + 1 = 0$ i la recta $r: \left.\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{matrix}\right\}$ segons els valors del paràmetre λ.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & -0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 5 & \lambda & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & \lambda & -2 \\ 2 & -1 & -0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4\lambda - 8$$

- Si $\lambda \neq -2$

  El rang de la matriu de coeficients és 3 i coincideix amb el de la matriu ampliada; per tant, la recta i el pla es tallen.

- Si $\lambda = -2$

  El rang de la matriu de coeficients és 2, diferent del de la matriu ampliada; així, doncs, la recta i el pla són paral·lels.

119 Considera els plans:

$$\pi_1: 2x + 3y + z = 2$$
$$\pi_2: x + y - z = 1$$

a) Determina la posició relativa dels plans.

b) Calcula una recta que estigui continguda en el pla $\pi_2: x + y - z = 1$, que sigui paral·lela a la intersecció d'aquests dos plans i que passi pel punt $(5, -3, 1)$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Els plans són secants.

b) $r: \left.\begin{matrix} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 1 - 4t \\ y = 3t \\ z = -t \end{matrix}\right\}$

El punt $(5, -3, 1)$ pertany a aquesta recta ($t = -1$); per tant, aquesta recta és la que compleix les condicions de l'exercici.

120 Considera les rectes:

$$r_1: \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ y+z=2 \end{matrix}\right\} \qquad r_2: \left.\begin{matrix} y=1 \\ x+y+z=6 \end{matrix}\right\} \qquad r_3: \left.\begin{matrix} x-y=1 \\ y-z=3 \end{matrix}\right\}$$

Et demanem:

a) Demostra que les rectes r_1 i r_2 es tallen en un únic punt.

b) Troba les equacions en forma contínua de la recta que passa pel punt d'intersecció de r_1 i r_2 i que és paral·lela a r_3.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$

Les rectes r_1 i r_2 es tallen en un punt.

b) $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ y+z=2 \\ y=1 \\ x+y+z=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow P(4, 1, 1)$ és el punt d'intersecció de r_1 i r_2.

$r_3: \left.\begin{matrix} x=4+t \\ y=3+t \\ z=t \end{matrix}\right\}$ La recta és $s: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

121 Estudia si existeix algun punt que pertanyi alhora als tres plans següents. Calcula'n els punts en comú (si existeixen).

$$\pi_1: x-y+z=0 \qquad \pi_2: z=2y \qquad \left.\begin{matrix} x=1+\lambda \\ \pi_3: y=1+\lambda+\mu \\ z=1+2\lambda-\mu \end{matrix}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

$\pi_3: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3x+y+z+1=0 \rightarrow \pi_3: 3x-y-z-1=0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$

Els tres plans es tallen en un punt.

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3x-y-z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2y-4z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 3z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{6} \\ y=-\frac{1}{6} \\ z=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

El punt d'intersecció és: $P\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

122 Discuteix, segons els valors de a, la posició relativa dels plans següents i indica les figures que determinen (no és necessari resoldre-ho).

$\pi_1: (a+1)x+y+z=3 \qquad \pi_2: x+2y+az=4 \qquad \pi_3: x+ay+2z=2a$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3-a^2+6a$$

$$-a^3-a^2+6a=0 \rightarrow -a(a^2+a-6)=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \\ a=-3 \end{array}\right.$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{-3, 0, 2\}$: el sistema format per les equacions dels tres plans és compatible determinat, és a dir, els plans es tallen en un punt.

- Si $a=-3$: $\left.\begin{array}{r} -2x+y+z=3 \\ x+2y-3z=4 \\ x-3y+2z=-6 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu de coeficients és 2.}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu ampliada és 3.}$$

Com que no hi ha plans paral·lels, els plans es tallen dos a dos.

- Si $a=0$: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+2y=4 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu de coeficients és 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu ampliada és 3.}$$

Com que no hi ha plans paral·lels, els plans es tallen dos a dos.

• Si $a = 2$: $\left.\begin{matrix} 3x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{matrix}\right\}$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow$ El rang de les dues matrius és 2.

Dos plans coincideixen i tallen el primer en una recta.

123 Determina a i b perquè els plans:

$x + y + z = 2 \qquad 2x + 3y + z = 3 \qquad ax + 10y + 4z = b$

es tallin en una recta r. Dóna algun tipus d'equacions per a r (les que vulguis).

(Activitat de Selectivitat)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Els plans es tallen en una recta si el rang de la matriu de coeficients i de l'ampliada és 2. Així, doncs:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 14 - 2a = 0 \rightarrow a = 7$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & b \end{vmatrix} = b - 11 = 0 \rightarrow b = 11$

$r: \left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

124 En l'espai, considerem els tres plans d'equacions:

$\pi_1: x + 2y + z = 1 \qquad \pi_2: px + y + pz = 1 \qquad \pi_3: px + y + 2z = 1$

en què p és un paràmetre real.

a) Esbrina per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Troba aquest punt quan $p = 1$.

b) Hi ha algun valor de p que fa que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriu l'equació vectorial d'aquesta recta.

c) Troba quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = \frac{1}{2}$.

(Activitat de Selectivitat)

a) Els plans es tallen en un punt si el rang de la matriu de coeficients i de l'ampliada és 3.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2 = 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix} p = \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{matrix}\right.$

- Si $p \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$: el sistema és compatible determinat, és a dir, els tres plans es tallen en un únic punt.
- Si $p = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

El punt d'intersecció és $P(1, 0, 0)$.

b) Si $p = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Com que la segona i la tercera equació són iguals, el rang de les dues matrius és 2.

Un pla talla dos plans coincidents en una recta.

$$r: \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow r: (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1, 0, 1)$$

c) Si $p = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu de coeficients és 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rang de la matriu ampliada és 3.}$$

Com que els dos primers plans són paral·lels, el tercer els talla en dues rectes paral·leles.

125 Troba l'equació del pla π que passa pel punt $P(3, -1, 4)$ i és paral·lel a les rectes:

$$r_1: \left.\begin{array}{l} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \qquad r_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$r_1: \left.\begin{array}{l} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow r_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{array}\right\}$$

El pla que busquem passa per $(3, -1, 4)$ i té com a vectors directors els vectors directors de r_1 i r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3x - 3y - 3z + 18 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 6 = 0$$

126 Troba les equacions paramètriques d'una recta si saps que talla la recta r d'equacions $x = y = z$, és paral·lela al pla π d'equació $3x + 2y - z = 4$ i passa pel punt $A(1, 2, -1)$.

(Activitat de Selectivitat)

Determinem els vectors directors de π.

$$\pi: 3x + 2y - z = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -4 + 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Calculem l'equació del pla paral·lel a π que passa per A.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi': 3x + 2y - z - 8 = 0$$

Trobem el punt d'intersecció de la recta r amb aquest pla.

$r: x = y = z$

$\pi: 3x + 2y - z - 8 = 0 \rightarrow 3x + 2x - x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$

El punt d'intersecció del pla amb la recta $r: x = y = z$ és $P(2, 2, 2)$.

La recta que es demana passa per A i per P.

$\overrightarrow{AP} = (1, 0, 3)$

$$r': \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 3t \end{array}\right\}$$

127 Estudia i resol, segons els valors de λ, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x-y&=\lambda\\ y+3z&=\lambda\\ x-y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Si les dues primeres equacions representen una recta r i les dues últimes una altra recta s, interpreta geomètricament els resultats que has obtingut.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0 & \lambda\\ 0 & -1 & 3 & \lambda\\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 14\lambda - 14 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 1$: el sistema és incompatible i les rectes es creuen.
- Si $\lambda = 1$: el sistema és compatible determinat; és a dir, les rectes es tallen en un punt.

128 Estudia la posició relativa dels quatre plans següents:

$$\left.\begin{aligned} 7x+8y-z&=0\\ x-y&=-4\\ 2x+3y-5z&=-1\\ x+y&=0 \end{aligned}\right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & -1\\ 1 & -1 & -0\\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1\\ 1 & -1 & -0\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & -1 & -0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & 1 & -0\\ 1 & -1 & -0 & -4\\ 2 & -3 & -5 & -1\\ 1 & -1 & -0 & -0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 & -0\\ 1 & -1 & -0 & -4\\ 2 & -3 & -5 & -1\\ 1 & -1 & -0 & -0 \end{pmatrix} = 4$$

Els quatre plans no tenen una intersecció comuna. Estudiem les posicions relatives dels tres primers plans.

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & -1\\ 1 & -1 & -0\\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1\\ 1 & -1 & -0\\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & -0\\ 1 & -1 & -0 & -4\\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Els tres primers plans es tallen en un punt. Com que el quart pla no és paral·lel a cap dels altres tres, aquest pla talla en una recta cadascun dels altres plans.

129 Considera les rectes:

$$r: x-3=y-4=\frac{z-5}{2} \qquad s: \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-m}{2}$$

en què $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, segons els valors del paràmetre m, les posicions relatives de les dues rectes. En cas que les rectes r i s es tallin, calcula'n el punt de tall.

b) Quan siguin coplanàries, determina l'equació general del pla que les conté.

c) Estudia la posició relativa del pla de l'apartat anterior amb el pla que passa pels tres punts: $A(3, 4, 5)$, $B(5, 4, -3)$ i $C(1, 2, 1)$.

Indicació: No cal construir el pla que passa per aquests tres punts.

(Activitat de Selectivitat)

a) $r: \begin{cases} P(3, 4, 5) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} Q(5, 4, m) \\ \vec{v} = (-2, -1, 2) \end{cases}$

$\vec{PQ} = (2, 0, m-5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = m+3$$

- Si $m+3 \neq 0 \rightarrow m \neq -3$:

  El rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada és 3; les rectes es creuen.

- Si $m+3=0 \rightarrow m=-3$:

  El rang de les dues matrius és 2; les rectes són secants.

  Calculem en aquest cas la intersecció entre les dues rectes.
  Per fer-ho, igualem les equacions paramètriques de les dues rectes.

$$\left.\begin{array}{l} 3+\lambda = 5-2t \\ 4+\lambda = 4-t \\ 5+2\lambda = -3+2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ t = 2 \end{cases} \rightarrow C(1, 2, 1) \text{ és el punt de tall.}$$

b) Les rectes són coplanàries si són secants, és a dir, si $m=-3$.

El pla que busquem passa per $P(3, 4, 5) \in r$ i té com a vectors directors els vectors directors de r i s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 4x-6y+z+7=0$$

c) $A(3, 4, 5) \in r$

$B(5, 4, -3) \in r$

$C(1, 2, 1) \qquad 1-3=2-4=1-5 \rightarrow C \in r$

Els punts A, B i C pertanyen a les rectes r i s, per tant, també són al pla.
El pla que passa per aquests tres punts és coincident amb l'anterior.

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 Respon aquestes qüestions.

a) Estan alineats els punts $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 2)$ i $C(3, 0, 1)$? Justifica la resposta.

b) Si estan alineats, determina l'equació de la recta que els conté. Si no n'estan, determina l'equació del pla que passa pels tres punts.

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (2, 0, 2)$

Els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ no són proporcionals; per tant, els punts A, B i C no estan alineats.

b) $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 2z - 4 = 0 \rightarrow \pi: x + 5y - z - 2 = 0$

2 Troba les equacions paramètriques de la recta donada per $r: \left.\begin{matrix} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{matrix}\right\}$.

Existeix algun valor de s tal que el punt $(-3, s, s)$ pertanyi a la recta? Raona la resposta, tant en cas afirmatiu com negatiu.

$$r: \left.\begin{matrix} 3x + y + z = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left\{\begin{matrix} x = -3t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -3 = -3t \\ s = 5t \\ s = 4t \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \rightarrow t = -1 \\ \rightarrow s = -5 \\ \rightarrow -5 \neq -4 \end{matrix} \rightarrow \text{No existeix cap valor de } s \text{ tal que } (-3, s, s) \in r.$$

3 Calcula l'equació d'una recta que passa pel punt d'intersecció del pla $\pi: x + y - z + 6 = 0$ amb la recta $s: \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ i és paral·lela a la recta $r: \left.\begin{matrix} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$.

$$s: \left\{\begin{matrix} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{matrix}\right.$$

Calculem la intersecció entre s i π.

$\pi: x + y - z + 6 = 0 \rightarrow 3t + 2 + t - (-1 + t) + 6 = 0 \rightarrow t = -3$

$P(-9, -1, -4)$ és el punt d'intersecció del pla π i de la recta s.

$$r:\left.\begin{matrix}3x+y-4=0\\4x-3y+z-1=0\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{matrix}x=t\\y=4-3t\\z=13-13t\end{matrix}\right\}$$

La recta que busquem és: $r':\left.\begin{matrix}x=-9+t\\y=-1-3t\\z=-4-13t\end{matrix}\right\}$

4 Considera un pla $\pi: x+y+mz=3$ i la recta $r:\ x=y-1=\dfrac{z-2}{2}$.

a) Troba m perquè r i π siguin paral·lels.

b) Troba m perquè r i π siguin perpendiculars.

c) Existeix algun valor de m per al qual la recta r estigui continguda en el pla π?

$$r:\left.\begin{matrix}x=y-1\\2x=z-2\end{matrix}\right\}\rightarrow r:\left.\begin{matrix}x-y=-1\\2x-z=-2\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}=2\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}1&-1&0\\2&0&-1\\1&-1&m\end{vmatrix}=2+2m \qquad \begin{vmatrix}1&-1&-1\\2&0&-2\\1&-1&3\end{vmatrix}=8\neq 0$$

a) Si $2+2m=0\rightarrow m=-1$:
El rang de la matriu de coeficients és 2, i el de la matriu ampliada és 3. La recta r i el pla π són paral·lels.

b) Perquè siguin perpendiculars, el vector director de la recta $\vec{d}=(1,1,2)$ ha de ser paral·lel al vector normal del pla $\vec{n}=(1,1,m)$;
per tant: $\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{m}\rightarrow m=2$

b) El rang de la matriu ampliada és 3 per a qualsevol valor de m; per tant, no hi ha cap valor per al qual la recta r estigui continguda en el pla π.

5 Estudia la posició relativa dels plans:

$\pi: x+y+2z=2 \quad \beta: 2x+my+2mz=2+m \quad \alpha: mx+2y+(2+m)z=0$

segons els valors de m.

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&m\end{vmatrix}=m-2$$

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\2&m&2m\\m&2&2+m\end{vmatrix}=m^2-4m+4 \qquad \begin{vmatrix}1&1&2\\2&m&2+m\\m&2&0\end{vmatrix}=4-m^2$$

- Si $m\neq 2$: el rang de la matriu de coeficients i el de la matriu ampliada és 3; els plans es tallen en un únic punt.
- Si $m=2$: el rang de la matriu de coeficients i el de l'ampliada és 1; els plans són coincidents.

6 Considera les rectes r: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-k}{1}$ i s: $\left.\begin{matrix} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\}$:

a) Troba el valor de k perquè les dues rectes estiguin contingudes en el mateix pla.

b) Per al valor de k obtingut en l'apartat anterior, determina l'equació general del pla que les conté.

a) r: $\left.\begin{matrix} x-1=-y-1 \\ x-1=-z+k \end{matrix}\right\} \to r$: $\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=k+1 \end{matrix}\right\}$

Les rectes són coplanàries si no es creuen, és a dir, si la matriu ampliada no té rang 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -0 & 1 & k+1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to k-4=0 \to k=4$$

Si $k=4$, les rectes estan contingudes en el mateix pla.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Si $k=4$, les rectes es tallen en un punt.

Calculem el punt d'intersecció entre r i s.

$$\left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x+z=5 \\ x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases}$$

El punt d'intersecció entre r i s és $P(-2, 2, 7)$.

Determinem un vector director de s.

$$s: \left.\begin{matrix} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{matrix}\right\} \to s: \left.\begin{matrix} x=t \\ y=-2-2t \\ z=1-3t \end{matrix}\right\} \qquad \vec{v}=(1,-2,-3)$$

El pla que busquem passa per $P(-2, 2, 7) \in r \cap s$ i té com a vectors directors els vectors directors de r i s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -x-2y+z-5=0 \to \pi: x+2y-z+5=0$$

7 Sigui r la recta definida per $\frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}$ i s la recta definida per $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$.

a) Troba k si saps que les rectes r i s es tallen en un punt.

b) Determina l'equació del pla que conté les rectes r i s.

a) $r:\begin{cases}P(2,k,0)\\ \vec{u}=(3,4,5)\end{cases}$ $s:\begin{cases}Q(-2,1,3)\\ \vec{u}=(-1,2,3)\end{cases}$ $\vec{PQ}=(-4,1-k,3)$

$$\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}=10\neq 0\rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=2$$

Les rectes es tallen si $\text{rang}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 3\\ -4 & 1-k & 3\end{pmatrix}=2$.

$$\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 3\\ -4 & 1-k & 3\end{vmatrix}=8+14k=0\rightarrow k=-\frac{4}{7}$$

b) El pla que busquem passa per $Q(-2,1,3)\in s$ i té com a vectors directors els vectors directors de r i s.

$$\pi:\begin{vmatrix}x+2 & y-1 & z-3\\ 3 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2x-14y+10z-12=0\rightarrow \pi: x-7y+5z-6=0$$

8 Calcula el valor de a perquè la recta $r:\begin{matrix}5x-y+z=0\\ x-y-z=-4\end{matrix}\Big\}$ sigui paral·lela al pla $\pi: ax-6y+4z=5$.

Perquè la recta i el pla siguin paral·lels, el rang de la matriu de coeficients ha de ser 2, i el de la matriu ampliada, 3.

$$\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ a & -6 & 4\end{vmatrix}=2a-52 \qquad \begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -4\\ -6 & 4 & 5\end{vmatrix}=18\neq 0$$

El rang de la matriu ampliada és 3 per a qualsevol valor de a. El rang de la matriu de coeficients és 2 si es compleix que:

$$2a-52=0\rightarrow a=26$$