

# 3 Polinomis i fraccions algebraiques

## INTRODUCCIÓ

Els polinomis apareixen en molts contextos: fórmules econòmiques, químiques, físiques... Per aquest motiu és molt important comprendre el concepte de polinomi i altres conceptes que hi estan associats.

Després de comprendre cada un d'aquests conceptes i practicar-hi, s'estudiarà com operar amb polinomis. Les dificultats poden sorgir en la multiplicació (col·locació correcta dels termes) i en la divisió (determinació de cada terme del quocient i resta dels productes obtinguts).

Convé seguir els exemples resoltos, deixar clar el procés seguit i insistir en la necessitat de col·locar correctament cada terme per operar sense cometre errors.

També és important que els alumnes aprenguin a deduir per ells mateixos el desenvolupament de les fórmules de les igualtats notables.

## RESUM DE LA UNITAT

- Un polinomi és una suma de monomis.
- Un polinomi reduït no té monomis semblants. El seu grau és el grau del terme de grau més gran.
- El valor numèric d'un polinomi, per a  $x = a$ , s'obté substituint la variable  $x$  per  $a$  i operant.
- Sumem dos polinomis sumant els termes semblants de tots dos.
- Restem dos polinomis sumant al primer polinomi l'oposat del segon.
- Multipliquem dos polinomis multiplicant cada un dels monomis d'un per tots els monomis de l'altre.
- Divisió de polinomis:  $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- Igualtats notables.

OBJECTIUS	CONTINGUTS	PROCEDIMENTS
1. Reconèixer el grau, els termes i els coeficients d'un polinomi.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grau, terme independent i coeficients d'un polinomi.</li> <li>• Polinomi ordenat.</li> <li>• Polinomi reduït.</li> <li>• Polinomi complet.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificació del grau, el terme independent i els coeficients d'un polinomi.</li> <li>• Reducció de polinomis.</li> <li>• Ordenació dels termes d'un polinomi.</li> <li>• Distinció de polinomis complets i incomplets.</li> </ul>
2. Determinar el valor numèric d'un polinomi.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Valor numèric d'un polinomi.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Càlcul del valor numèric d'un polinomi.</li> </ul>
3. Operar amb polinomis: sumes i restes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suma i resta de polinomis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Suma i resta de polinomis.</li> </ul>
4. Operar amb polinomis: multiplicació.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicació de polinomis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Multiplicació de polinomis: aplicació de la propietat distributiva.</li> </ul>
5. Operar amb polinomis: divisió.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisió de polinomis.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Divisió de polinomis.</li> <li>• Comprovació de les divisions.</li> </ul>
6. Identificar i desenvolupar igualtats notables.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quadrat d'una suma.</li> <li>• Quadrat d'una diferència.</li> <li>• Producte d'una suma per una diferència.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificació i desenvolupament de les igualtats notables.</li> </ul>



- 2 Redueix el polinomi i ordena'l, de grau més gran a grau més petit.

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$$P(x) = \boxed{\phantom{3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5}}$$

- Té \_\_\_\_\_ termes.
- El terme independent és \_\_\_\_\_
- El grau del polinomi és \_\_\_\_\_
- Com és el polinomi, complet o incomplet? \_\_\_\_\_

- 3 Redueix el polinomi i ordena'l, de grau més gran a grau més petit.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$$P(x) = \boxed{\phantom{3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3}}$$

- Té \_\_\_\_\_ termes.
- El terme independent és \_\_\_\_\_
- El grau del polinomi és \_\_\_\_\_
- Com és el polinomi, complet o incomplet? \_\_\_\_\_

- 4 Digues si els polinomis següents són complets o incomplets. Completa la taula

POLINOMI	COMPLET	INCOMPLET	FALTEN ELS TERMES
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

- 5 Donat el polinomi  $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$ , indica:

- a) Si el polinomi és ordenat.
- b) Si el polinomi està reduït.
- c) Si el polinomi és complet.
- d) El grau del polinomi.
- e) El terme independent.

# 3

## OBJECTIU 2

### DETERMINAR EL VALOR NUMÈRIC D'UN POLINOMI

NOM: \_\_\_\_\_ CURS: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

El **valor numèric** d'un polinomi  $P(x)$ , per a un valor de la variable  $x = a$ , s'obté substituint la variable  $x$  per  $a$  i operant.

#### EXEMPLE

En un polinomi, per exemple  $P(x) = 2x^2 + 1$ , s'hi pot introduir qualsevol valor a substituint la  $x$ :

Per a  $x = 2$ :  $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$

$$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$$

$$P(2) = 8 + 1$$

$$P(2) = 9 \quad \text{El valor del polinomi quan introduïm el valor 2 és 9.}$$

Per a  $x = 10$ :  $P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$

$$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$$

$$P(10) = 200 + 1$$

$$P(10) = 201 \quad \text{El valor del polinomi quan introduïm el valor 10 és 201.}$$

#### 1 Calcula el valor numèric dels polinomis per a $x = 1$ .

a)  $P(x) = x + 1$

$$x = 1$$

$$P(\quad) = \square + 1$$

b)  $P(x) = x^2 + 1$

c)  $P(x) = x^3 + 1$

d)  $P(x) = x^4 + 1$

#### 2 Troba el valor numèric de cada polinomi per al valor de la variable indicat.

a)  $A(x) = x + 1$ , per a  $x = 1$

c)  $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$ , per a  $x = 1$

b)  $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$ , per a  $x = -1$

d)  $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ , per a  $x = -2$

NOM: \_\_\_\_\_ CURS: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

- La **suma** de dos polinomis es calcula sumant els termes semblants de tots dos.
- La **resta** de dos polinomis s'obté sumant el primer i el polinomi oposat del segon.
- Recorda que la regla bàsica de les sumes i les restes de polinomis és que **només es poden sumar i restar termes semblants**.

**EXEMPLE**

Suma els polinomis següents:  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$  i  $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Es pot fer de dues maneres:

- **En línia:** només se sumen els termes semblants.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** s'han d'ordenar els polinomis.

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + Q(x) = \quad 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

**EXEMPLE**

Resta els polinomis següents:  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$  i  $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Es pot fer de dues maneres:

- **En línia:** el signe negatiu davant del parèntesi afecta a tots els termes.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** s'han d'ordenar els polinomis com s'indica

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 5x^2 \quad + 5 \\ - Q(x) = \quad \quad - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

- 1 Donats els polinomis  $P(x) = x^3 - 2x + 1$  i  $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ , troba  $P(x) + Q(x)$  i  $P(x) - Q(x)$ , resolent les operacions de les maneres estudiades: en línia i en columna.

# 3

---

## 2 Calcula la suma i la resta d'aquests polinomis.

a)  $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

b)  $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

c)  $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

d)  $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

e)  $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ + Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ - Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

NOM: \_\_\_\_\_ CURS: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

- El **producte** de dos polinomis es troba **multiplicant cada un dels monomis d'un dels polinomis per tots els monomis de l'altre i sumant** (o restant) els polinomis obtinguts en aquestes multiplicacions.
- Per multiplicar dos polinomis cal aplicar la **propietat distributiva**.

**EXEMPLE**

**Multiplica els polinomis següents:  $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$  i  $Q(x) = x^2 + 3$**

Resoldrem l'exercici multiplicant en línia:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) = \\
 &= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3} \\
 &= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 \\
 &= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
 \end{aligned}$$

Es multipliquen tots els monomis d'un polinomi per tots els monomis de l'altre polinomi.

Només se sumen termes semblants.

**$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$**

**1 Multiplica els polinomis següents.**

a)  $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$  i  $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1) \\
 &= \boxed{\phantom{00000}} - \boxed{\phantom{00000}} - \boxed{\phantom{00000}} = \boxed{\phantom{00000}} - \boxed{\phantom{00000}} + \boxed{\phantom{00000}} = \\
 &=
 \end{aligned}$$

Multiplica els monomis.

Suma els termes.

**$P(x) \cdot Q(x) =$**

b)  $P(x) = x^3 - 1$  i  $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓ CURRICULAR

## EXEMPLE

**Multipliqua els polinomis següents:  $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$  i  $Q(x) = x^2 + 3$**

Resoldrem l'exercici multiplicant en columna:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} \\
 \times Q(x) = \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} x^2 + 3 \\
 \hline
 \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \quad \leftarrow \text{Producte de 3 per } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
 + \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} 7x^5 + 2x^4 + \phantom{x^3 - 7x^2} \quad \leftarrow \text{Producte de } x^2 \text{ per } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21 \quad \leftarrow \text{Suma de monomis semblants.}
 \end{array}$$

**2** Multipliqua els polinomis següents:  $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$  i  $Q(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \phantom{5x^2 - 3x + 4} \\
 \times Q(x) = \phantom{5x^2 - 3x + 4} 3x + 2 \\
 \hline
 \phantom{5x^2 - 3x + 4} 15x^2 + 6x + 8 \quad \leftarrow \text{Producte de 2 per } 5x^2, 3x, 4. \\
 + \phantom{5x^2 - 3x + 4} 15x^3 - 9x^2 - 6x + 8 \quad \leftarrow \text{Producte de } 3x \text{ per } 5x^2, 3x, 4. \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) = \phantom{15x^3 - 9x^2 - 6x + 8} \quad \leftarrow \text{Suma de monomis semblants.}
 \end{array}$$

**3** Calcula el producte dels polinomis  $R(x) = x^3 - 1$  i  $S(x) = x + 3$ , utilitzant la propietat distributiva.

**4** Troba el producte dels polinomis següents:

a)  $R(x) = x^3 - 1$  i  $S(x) = x$

b)  $R(x) = x^4 - x + 1$  i  $S(x) = x^2 + 1$

NOM: \_\_\_\_\_ CURS: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

- Per dividir dos polinomis,  $P(x)$  i  $Q(x)$ , s'ha de tenir en compte que el grau del polinomi  $P(x)$  ha de ser més gran o igual que el grau del polinomi  $Q(x)$ .
- Donats dos polinomis  $P(x)$  i  $Q(x)$ , hi ha dos polinomis  $C(x)$  i  $R(x)$  que compleixen que:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$P(x)$  és el polinomi **dividend**.

$Q(x)$  és el polinomi **divisor**.

$C(x)$  és el polinomi **quocient**.

$R(x)$  és el polinomi **residu**.

- Si el residu de la divisió és nul, és a dir, si  $R(x) = 0$ :

La **divisió** és **exacta**.

El polinomi  $P(x)$  és **divisible per  $Q(x)$** .

- En cas contrari, diem que la **divisió** és **entera**.

**EXEMPLE**

Divideix els polinomis següents:  $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$  i  $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 \\ \hline x^2 + 5 \end{array}$$

S'ha de triar un monomi que multiplicat per  $x^2$  ens doni  $5x^3$ :

$$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3. \text{ En aquest cas, } \bigcirc = 5x.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ - \cancel{5x^3} \phantom{+ 3x^2} \phantom{+ 5x} \phantom{- 7} \\ \hline -25x \phantom{+ 3x^2} \phantom{+ 5x} \phantom{- 7} \\ \phantom{-25x} + 3x^2 - 20x - 7 \end{array}$$

Multipliquem  $5x$  per cada un dels termes del polinomi quocient ( $x^2, 5$ ), canviem de signe els resultats i els col·loquem a la columna que els correspon. A continuació, fem la suma.

Hem de buscar un monomi que multiplicat per  $x^2$  ens doni  $3x^2$ , en aquest cas  $3$ .

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ - \cancel{5x^3} \phantom{+ 3x^2} \phantom{+ 5x} \phantom{- 7} \\ \hline -25x \phantom{+ 3x^2} \phantom{+ 5x} \phantom{- 7} \\ \phantom{-25x} + 3x^2 - 20x - 7 \\ - \phantom{-25x} \phantom{+ 3x^2} + 3x^2 - 20x - 7 \\ \hline \phantom{-25x} \phantom{+ 3x^2} - 3x^2 - 20x - 14 \\ \phantom{-25x} \phantom{+ 3x^2} - 3x^2 - 20x - 14 \\ \hline \phantom{-25x} \phantom{+ 3x^2} - 20x - 22 \end{array}$$

Multipliquem  $3$  per cada un dels termes del polinomi quocient ( $x^2, 5$ ), canviem de signe els resultats i els col·loquem a la columna que els correspon. A continuació, fem la suma.

Hem de buscar un monomi que multiplicat per  $x^2$  ens doni  $20x$ , però no n'hi ha cap. Per tant, la divisió acaba.

Polinomi dividend:  $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomi divisor:  $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomi quocient:  $C(x) = 5x + 3$

Polinomi residu:  $R(x) = -20x - 22$

En aquest cas, la divisió és entera, ja que el residu obtingut és diferent de zero.

# 3

---

**1** Calcula les divisions de polinomis, i digues si són exactes o enteres.

a)  $P(x) = x - 1$ ,  $Q(x) = x$

c)  $P(x) = x^2 - 1$ ,  $Q(x) = x + 1$

b)  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ ,  $Q(x) = x - 2$

d)  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ,  $Q(x) = x$

**2** Efectua aquestes divisions i comprova que  $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ .

a)  $P(x) = x^3 - 1$ ,  $Q(x) = x$

c)  $P(x) = x^3 - 1$ ,  $Q(x) = x^2 - 2$

b)  $P(x) = x^3 - 1$ ,  $Q(x) = x + 1$

d)  $P(x) = x^3 + 1$ ,  $Q(x) = x^3$

NOM: \_\_\_\_\_ CURS: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

**QUADRAT D'UNA SUMA**

- El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer terme, més el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**EXEMPLE**

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4x + y)^2 = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$$

**1 Desenvolupa les igualtats següents:**

a)  $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b)  $(3x^3 + 3)^2 =$

c)  $(2x + 3y)^2 =$

**QUADRAT D'UNA DIFERÈNCIA**

- El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer terme, menys el doble producte del primer pel segon, més el quadrat del segon:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**EXEMPLE**

$$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$$

**2 Desenvolupa les igualtats.**

a)  $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b)  $(5x^4 - 2)^2 =$

c)  $(4x^3 - a^2)^2 =$

## PRODUCTE D'UNA SUMA PER UNA DIFERÈNCIA

- El producte d'una suma per una diferència és igual al quadrat del primer menys el quadrat del segon:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Això es pot fer com una multiplicació normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

## EXEMPLE

$$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$$

$$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$$

### 3 Desenvolupa els productes següents:

a)  $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b)  $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c)  $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d)  $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

### 4 Desenvolupa els productes.

a)  $(x + 5)^2 =$

b)  $(2y - 7)^2 =$

c)  $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d)  $(abc + 1)^2 =$

e)  $(7 - 3x)^2 =$

f)  $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g)  $(3xy + x^3)^2 =$

### 5 Desenvolupa:

a)  $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b)  $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$