PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ troba totes les matrius $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de manera que $AP = PA$.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$AP = PA \to \left.\begin{array}{r} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = c \\ 0 = c \end{array}\right.$$

Les matrius P són de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ amb $a, b \in \mathbb{R}$.

2 Resol: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ i $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Troba els valors de x, y i z per als quals A no té inversa.
b) Determina els valors de a per als quals el sistema $B \cdot A = C$ té solució.
c) Resol el sistema anterior quan sigui possible.

a) A no té inversa si $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y(y - yz) = y^2(1 - z)$$

La inversa no existeix si $y = 0$ o $z = 1$.

b) $BA = C \rightarrow (a \quad 2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2) \rightarrow \left.\begin{aligned} ax + 2y + 3 &= 4 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} ax + 2y &= 1 \\ ay + 3z &= 0 \\ ax + 2y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 3 & 0 \\ a & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3a + 6$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow$ rang (A) = rang $(A^*) = 3$ = nre. d'incògnites
  Sistema compatible determinat
- Si $a = 0 \rightarrow$ rang $(A) = 2 \neq$ rang $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $a \neq 0$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 6 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{3a + 6}{3a^2} = \frac{a + 2}{a^2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{3a}{3a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

4 Considera el sistema $\left.\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ y + z &= 2a \\ x + 2z &= a^2 \end{aligned}\right\}$ en què a és un paràmetre real.

a) Discuteix el sistema d'acord amb el valor de a.
b) Resol el sistema per a $a = 0$.
c) Resol el sistema per a $a = 1$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{rang}\,(A) = 2$

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{rang}\,(A^*) = 3 \neq \text{rang}\,(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}\,(A) = \text{rang}\,(A^*) = 2 <$ nre. d'incògnites
  Sistema compatible indeterminat

b) Per a $a = 0 \rightarrow$ El sistema és incompatible, no té solució.

c) Per a $a = 1$ considerem el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 - z \\ y &= 2 - z \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

5 Donat el sistema dependent del paràmetre α: $\left.\begin{aligned} \alpha x + y + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) Determina, de manera raonada, els valors de α per als quals el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
b) Resol el sistema quan és compatible determinat.
c) Troba, de manera raonada, la solució del sistema quan $\alpha = 0$.

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ \alpha+2 & \alpha & 1 \\ \alpha+2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to$ rang $(A) =$ rang $(A^*) = 3 =$ nre. d'incògnites
  Sistema compatible determinat
- Si $\alpha = -2 \to$ rang $(A) = 2 \neq$ rang $(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible
- Si $\alpha = 1 \to$ rang $(A) =$ rang $(A^*) = 1 <$ nre. d'incògnites
  Sistema compatible indeterminat

b) Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to |A| = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2 \to z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0 \to x = y = z = \dfrac{1}{2}$

6 **Un país importa 21.000 vehicles de tres marques, *A*, *B* i *C* al preu de 10.000, 15.000 i 20.000 € respectivament. El total de la importació puja 332 milions d'euros. Cal dir també que hi ha 21.000 vehicles comptant només els de la marca *B* i α vegades els de la *A*.**

a) Planteja un sistema d'equacions amb les condicions del problema en funció del nombre de vehicles de cada marca.

b) Estableix el nombre de vehicles de cada marca si suposem que $\alpha = 3$.

c) Estudia si existeix algun valor de α per al qual la situació no es pugui donar en el camp dels nombres reals.

a) Considerem x, y, z els vehicles de cada marca. Així, doncs:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10.000x + 15.000y + 20.000z &= 332.000.000 \\ \alpha x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10x + 15y + 20z &= 332.000 \\ \alpha x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\}$$

b) $\text{Si } \alpha = 3 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10x + 15y + 20z &= 332.000 \\ 3x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10x + 5y &= 88.000 \\ 3x + y &= 21.000 \end{aligned}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 21.000 \\ 10x + 5y &= 88.000 \\ 5x &= 17.000 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3.400 \\ y &= 10.800 \\ z &= 6.800 \end{aligned}\right.$$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 20 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 0 & 21.000 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\alpha - 10 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 10 & 15 & 332.000 \\ \alpha & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 17.000\alpha - 17.000$$

$\text{Si } \alpha = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \text{rang } (A) = 2 \neq \text{rang } (A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

7 **Determina raonadament els valors del paràmetre *m* que fan que el sistema tingui més d'una solució.**

Com que es tracta d'un sistema homogeni, perquè el sistema tingui més d'una solució, la matriu dels coeficients ha de tenir rang 2, és a dir, el determinant ha de ser nul. Així, doncs:

$$\begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & 1 & m+4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^3 + 8m^2 + 17m + 1 = 0 \rightarrow \left\{\begin{aligned} m &= -5 \\ m &= -2 \\ m &= -1 \end{aligned}\right.$$