

# Vectors i coordenades en el pla

## PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Expliqueu raonadament algun mètode per decidir si tres punts del pla donats per les seves coordenades,  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  i  $C(c_1, c_2)$ , estan alineats o no ho estan. Decidiu, tot aplicant el mètode que hagueu explicat, si els punts  $(-2, -3)$ ,  $(-3, 0)$  i  $(6, 2)$  estan alineats o no.

Perquè estiguin alineats hem d'agafar dos vectors entre els tres punts i han de ser paral·lels, per exemple  $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$  o  $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$ , i això significa que les seves coordenades han de ser proporcionals:

$$\vec{AB} \parallel \vec{AC} \rightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \parallel (c_1 - a_1, c_2 - a_2) \rightarrow \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} = \frac{c_1 - a_1}{c_2 - a_2}$$

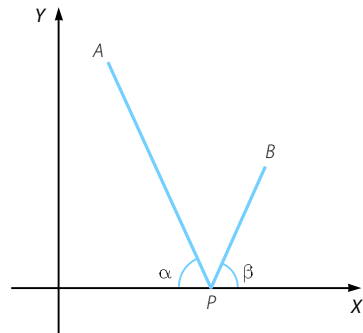
En l'exemple:

$$\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \stackrel{?}{=} \frac{c_1 - a_1}{c_2 - a_2} \rightarrow \frac{-3 - (-2)}{0 - (-3)} \neq \frac{6 - (-2)}{2 - (-3)}; \text{ en conseqüència, no estan alineats.}$$

- 2 L'eix  $OX$  representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt  $A(1, 6)$  ha de tocar una bola situada al punt  $B(5, 2)$  després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebot a la banda, els angles  $\alpha$  i  $\beta$  de la figura són iguals).

Determineu:

- El punt exacte  $P$  on la bola hauria de tocar amb la banda.
- Les coordenades del vector  $\vec{AP}$ .
- Les coordenades del vector  $\vec{PB}$ .
- L'angle entre les trajectòries  $AP$  i  $PB$ .



- Busquem el punt  $B'$  simètric a  $B$  respecte de l'eix d'abscisses:  $B'(5, -2)$ .

Els punts  $A(1, 6)$ ,  $P(x, 0)$  i  $B'(5, -2)$  han d'estar alineats, o sigui que

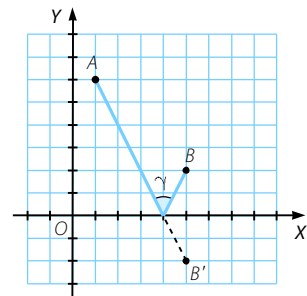
$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{0-6}{-2-6} \rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{6}{8} \rightarrow x = 4. \text{ El punt és } P(4, 0)$$

- El vector  $\vec{AP} = (3, -6)$

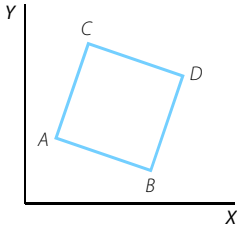
- El vector  $\vec{PB} = (1, 2)$

- Angle:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|} = \frac{(-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2}{\sqrt{42} \sqrt{5}} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{210}} \rightarrow \gamma = 51^\circ 36' 23'' \end{aligned}$$



- 3 Els punts  $A = (1, 2)$  i  $D = (5, 4)$  representen els vèrtexs oposats d'un quadrat, tal com s'indica a la figura.



- Calculeu el punt mitjà  $M$  de la diagonal  $AD$  del quadrat ( $M$  serà el centre del quadrat).
- Escriviu l'equació de la recta que passa per  $M$  i és perpendicular a la diagonal  $AD$  (aquesta recta serà l'altra diagonal del quadrat).
- Calculeu les coordenades dels altres dos vèrtexs  $B$  i  $C$  del quadrat.

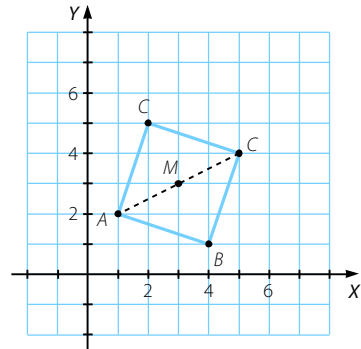
a) Punt  $M = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (3, 3)$

b) Recta: El vector  $\overrightarrow{AD} = (4, 2)$ ; per tant, un vector perpendicular és  $\vec{n} = (2, -4)$ , el seu pendent és:  $m = \frac{-4}{2} = -2$  i la recta serà  $y - 3 = -2(x - 3)$ .

c) Vèrtexs: El vector  $\overrightarrow{AD} = (4, 2)$  i el vector  $\overrightarrow{CB}$  són perpendiculars i tenen el mateix mòdul; per tant, el vector  $\overrightarrow{CB} = (2, -4)$ . Si  $C(c_1, c_2) \rightarrow B(c_1 + 2, c_2 - 4)$  i  $M(3, 3)$ ,  $M$  és el seu punt mitjà, per tant:

$$\begin{cases} \frac{c_1 + c_1 + 2}{2} = 3 \rightarrow c_1 = 2 \\ \frac{c_2 + c_2 - 4}{2} = 3 \rightarrow c_2 = 5 \end{cases}$$

i les vèrtexs són:  $C(2, 5)$  i  $B(4, 1)$



- 4 Els punts  $A = (2, 5)$ ,  $B = (6, 8)$  i  $C = (22, d)$  estan alineats. Calculeu el valor de  $d$ .

S'ha de complir que  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ :

$\overrightarrow{AB} = (6 - 2, 8 - 5) = (4, 3)$  i  $\overrightarrow{AC} = (22 - 2, d - 5) = (20, d - 5)$

$$\frac{4}{20} = \frac{3}{d-5} \rightarrow 4d - 20 = 60 \rightarrow d = 20$$

- 5 Considereu els punts del pla  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, 8)$  i  $C(k, k + 4)$ ,  $k$  real. Calculeu el valor de  $k$  perquè  $A$ ,  $B$  i  $C$  estiguin alineats.

S'ha de complir que  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ :

$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 8 - 2) = (-4, 6)$  i  $\overrightarrow{AC} = (k - 3, k + 4 - 2) = (k - 3, k + 2)$

$$\frac{-4}{k-3} = \frac{6}{k+2} \rightarrow -4k - 8 = 6k - 18 \rightarrow k = 1$$

## LITERATURA I MATEMÀTIQUES

*Viatge al centre de la Terra*

Acabat l'esmorzar, tragué el meu oncle de la butxaca un petit quadern destinat a les observacions: examinà, successivament, els diversos instruments i anotà les dades següents

DILLUNS 1 de juliol

Cronòmetre: 8 h. 17 m. del matí.

Baròmetre: 29 p. 71.

Termòmetre: 6°.

Direcció: ESE.

Aquesta última dada es referia a la direcció de la galeria obscura i fou subministrada per la brúixola.

—Ara, Axel —exclamà el professor entusiasmat—, és quan anem a sepul-tar-nos realment en les entranyes del globus. Aquest és, doncs, el moment precís que comença el nostre viatge. [...]

Tota la dificultat del camí consistia en no lliscar-se amb massa rapidesa per aquell pendent de 45° d'inclinació sobre més o menys. [...]

—Ah, fill meu! Per fi et vas convencent! Així que això et sembla esplèn-did! Ja veuràs altres coses millors! Anem! Anem! Prosseguim sense vacil-lar la nostra marxa! Millor hagués d'haver dit el nostre lliscament, ja que ens deixàvem anar sense fatiga per pendents inclinats. Allò era el *facilis descensus Avernì*, de Virgili. La brúixola, que consultava jo amb freqüència, marcava invariablement l'adreça SE. Aquella senda de lava no es desviava cap a un costat ni altre; posseïa la inflexibilitat de la lí-nia recta. No obstant això, la calor no augmentava d'una manera sen-sible, el que venia a confirmar les teories de Devy, i, en més d'una ocasió, vaig consultar amb sorpresa el termòmetre. A les dues hores de marxa, només marcava 10°, és a dir, que havia experimentat una pu-jada de 4°, la qual cosa m'induí a pensar que la nostra marxa era més horitzontal que vertical. Gens més fàcil que conèixer amb tota exacti-tud la profunditat arribada; el professor amidava amb la major escri-polositat els angles de desviació i inclinació del camí; però es reservava el resultat de les seves observacions. A la nit, a això de les vuit, va donar el senyal d'alt.

JULES VERNE [text adaptat]