100 La lliga de futbol d'un país la juguen 21 equips a anada i tornada. Aquest any, els partits guanyats valien 3 punts, els empatats, 1 punt, i els perduts, 0 punts. En aquestes condicions, l'equip campió de lliga va aconseguir 70 punts.

Fins a l'any passat, els partits guanyats valien 2 punts i, la resta, igual. Amb el sistema antic, el campió actual hauria aconseguit 50 punts.

Quants partits va guanyar, va empatar i va perdre l'equip campió?

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z els partits que va guanyat, empatar i perdre l'equip campió, respectivament.

Així, doncs:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ 2x+y=50 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 3x+y=70 \\ -x=-20 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=10 \\ z=10 \end{array}\right.$$

L'equip campió va guanyar 20 partits, en va empatat 10 i en va perdre, també, 10.

101 Les edats, en anys, d'un nen, el pare i l'avi verifiquen les condicions següents:

- L'edat del pare és α vegades la del fill.
- El doble de l'edat de l'avi més l'edat del nen i més la del pare és 182 anys.
- El doble de l'edat del nen més la de l'avi és 100.

a) Estableix les edats de tots tres si suposem que $\alpha = 2$.

b) Per a $\alpha = 3$, què passa amb el problema plantejat?

c) Encara amb $\alpha = 3$, què passa si en la segona condició la suma és de 200 en lloc de 182?

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z les edats del nen, del pare i de l'avi, respectivament.

Així, doncs:

$$\left.\begin{array}{r} y=\alpha x \\ 2z+x+y=182 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha x-y=0 \\ x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+2z=182 \\ \alpha x-y=0 \\ 2x+z=100 \end{array}\right\}$$

a) Si $\alpha = 2 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 182 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 182 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 100 & 1 \end{vmatrix} = 36 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 36 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 64$$

El fill té 18 anys, el pare en té 36 i l'avi en té 64.

b) Si $\alpha = 3 \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{rang } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 182 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = -36 \neq 0 \rightarrow \text{rang } (A^*) = 3 \neq \text{rang } (A) = 2$$

Sistema incompatible

c) $\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ 2z + x + y = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - y = 0 \\ x + y + 2z = 200 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 200 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + z = 100 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 100 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rang } (A^*) = 2 = \text{rang } (A) < \text{ nre. d'incògnites}$$

Sistema compatible indeterminat

102 **En una capsa hi ha monedes de tres menes: de 2 €, d' 1 € i de 50 cèntims.**

Sabem que, en total, hi ha 33 monedes i que el valor conjunt de totes és de 40 €. Pots determinar el nombre de cada tipus de monedes?

Si la resposta és afirmativa, troba la quantitat de cadascun dels tipus de monedes.

Si la resposta és negativa, troba, almenys, dos conjunts diferents de 33 monedes dels tipus descrits i de manera que el valor total sigui de 40.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de monedes de 2 €, 1 € i 50 cèntims que hi ha a la capsa, respectivament.

Així, doncs:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Els rangs de la matriu de coeficients i de la matriu ampliada són iguals a 2; com que el sistema té tres incògnites, és compatible indeterminat. És a dir, el sistema té infinites solucions de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ 2x + y + 0{,}5z = 40 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 33 \\ -x + 0{,}5z = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 7 + 0{,}5\lambda \\ y = 26 - 1{,}5\lambda \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Resposta oberta. Dues solucions possibles són 8 monedes de 2 €, 23 d'1 € i 2 de 50 cèntims; o bé, 9 monedes de 2 €, 20 d'1 € i 4 de 50 cèntims.