PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 En una clínica dental col·loquen tres tipus de pròtesis, P_1, P_2 i P_3, en dos models diferents, M_1 i M_2. El nombre de pròtesis que tenen fetes està reflectit a la matriu A. El preu, en euros, de cada pròtesi està reflectit a la matriu B.

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Troba, si és possible, les matrius $C = A \cdot B$ i $D = B \cdot A$.

b) Quina informació proporcionen els elements c_{12} de la matriu C i l'element d_{22} de D?

c) Quin element de C o D proporciona el valor total de totes les pròtesis del tipus P_2?

a) $$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.060 & 5.750 & 7.260 \\ 4.920 & 4.840 & 6.480 \\ 4.290 & 4.100 & 5.240 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.370 & 8.430 \\ 7.330 & 9.770 \end{pmatrix}$$

b) L'element c_{12} expressa el preu del total de pròtesis de tipus P_1 si es venguessin al preu de les pròtesis de tipus P_2.

L'element d_{22} expressa el preu del total de pròtesis del model M_2.

c) El valor total de totes les pròtesis de tipus P_2 l'expressa l'element c_{22}.

2 Els preus, en euros, de les entrades a un parc temàtic per a adults (AD) i nens i jubilats (NJ) en temporada alta (TA), temporada mitjana (TM) i temporada baixa (TB) són a la matriu P. El nombre de visitants, en milers, d'aquest parc al llarg d'un any és a la matriu N.

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{AD} \\ \text{NJ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{TA} & \text{TM} & \text{TB} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ \text{TA} \\ \text{TM} \\ \text{TB} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{AD} & \text{NJ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Troba, si és possible, les matrius $R_1 = P \cdot N$ i $R_2 = N \cdot P$.

b) A quants euros puja la recaptació total corresponent als nens i jubilats? I la que correspon a la temporada baixa?

c) Quin element de R_1 o de R_2 ens proporciona informació sobre la recaptació total corresponent als adults?

d) A quants euros puja la recaptació total?

a) $R_1 = P \cdot N = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.250 & 22.400 \\ 16.375 & 17.400 \end{pmatrix}$

$R_2 = N \cdot P = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.500 & 19.000 & 12.400 \\ 14.750 & 11.500 & 7.600 \\ 5.125 & 4.000 & 2.650 \end{pmatrix}$

b) La recaptació total corresponent als nens i jubilats puja 17.400 €. La recaptació total corresponent a la temporada baixa puja 2.650 €.

c) Aquesta informació ve donada per l'element a_{11} de la matriu R_1.

d) La recaptació total puja 38.650 €, que es correspon amb la suma dels elements de la diagonal principal de qualsevol de les dues matrius, R_1 o R_2.

3 **Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Resol l'equació matricial $AX + B^t = B$, on X és una matriu quadrada d'ordre 2.**

$AX + B^t = B \rightarrow AX = B - B^t \rightarrow X = A^{-1}(B - B^t)$

Calculem la matriu inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = 3F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = 4F_1 - F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = \frac{1}{12}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{8}F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(B - B^t) \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

4 **Troba una matriu A que verifiqui: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right]$$

Calculem la matriu inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 = \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{3}F_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5 Determina la matriu X en l'equació matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + BC)$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2X = \frac{1}{2}(A + BC) \rightarrow X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2}(A + BC)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 3F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = \frac{1}{4}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = (A^2)^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot (A + BC)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & \frac{11}{2} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$