b) Si sumem les equacions, tenim que:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + Y^{-1} = C \to Y^{-1} = C - X \to Y = (C - X)^{-1}$$

$$C - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \to Y = (C - X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

104 F_1, F_2, F_3 i F_4 són les files d'una matriu quadrada P d'ordre 4×4, el determinant de la qual val 3. Calcula de manera raonada el valor del determinant de la inversa de P, el valor del determinant de la matriu αP, on α denota un nombre real no nul, i el valor del determinant de la matriu les files de la qual són $2F_1 - F_4$, F_3, $7F_2$ i F_4.

(Activitat de Selectivitat)

$$|P| = 3 \to |P^{-1}| = \frac{1}{|P|} = \frac{1}{3} \qquad |\alpha P| = \alpha^4 |P| = 3\alpha^4$$

$$\begin{aligned} \det(2F_1 - F_4, F_3, 7F_2, F_4) &= 7\det(2F_1 - F_4, F_3, F_2, F_4) = -7\det(2F_1 - F_4, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -7\det(2F_1, F_2, F_3, F_4) = -14\det(F_1, F_2, F_3, F_4) = \\ &= -14 \cdot 3 = -42 \end{aligned}$$

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 Considera $P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix}$. Troba dues arrels d'aquest polinomi de grau quatre.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3-3x & x-3 & 0 \\ 3-3x & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)\left[x(x-3)^2 - 2(x-3)(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)^2 + (x-1)(x-3)\left[x(x-3) - 2(3-3x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)\left[(x-3) + (x^2 - 3x - 6 + 6x)\right] =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^2 + 4x - 9)$$

per tant, $x = 1$ i $x = 3$ són dues arrels del polinomi.

2 Utilitza les propietats dels determinants per desenvolupar aquest:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia les propietats que has fet servir.

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

En primer lloc, utilitzem la propietat següent: si tots els elements d'una columna de la matriu estan multiplicats per un mateix nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre. Tot seguit, a les dues últimes files hi restem la primera fila de la matriu, per la propietat que diu que el determinant no varia si a una fila hi sumem una combinació lineal de les altres. Finalment, el determinant és nul perquè té dues files iguals.

3 Si tenim en compte que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, calcula el valor del determinant següent sense desenvolupar-lo:

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 = -21$$

4 Troba els valors de k perquè la matriu

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & -6 \\ -k & 1 & 2 & -3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$$

a) No tingui inversa.

b) Tingui rang 3.

a) $\begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} =$

$$= -k \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k+4 & 5 & 7 \\ k+4 & k+5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k-3 & -2 & 0 \\ k-3 & k-2 & 0 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} k-3 & -2 \\ k-3 & k-2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k[(k-3)(k-2) + 2(k-3)] = 3k^2(k-3)$$

Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El determinant és nul. La matriu no té inversa.

b) Si $k = 0$ o si $k = 3 \rightarrow$ El menor d'ordre 4 és igual a 0.
Comprovem si hi ha un menor d'ordre 3 no nul.

- Si $k = 0$:

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ El rang de la matriu és 3.

- Si $k = 3$:

$\begin{vmatrix} -4 & -5 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rang de la matriu és 3.

5 **Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Determina el rang de M segons els valors del paràmetre a.

b) Determina per a quins valors de a existeix matriu inversa de M. Calcula aquesta matriu inversa per a $a = 2$.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2a^3 = 2a(1 - a^2)$

b)
- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ El menor d'ordre 3 és diferent de 0. El rang de la matriu és 3.
- Si $a = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rang de la matriu és 2.
- Si $a = 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ El rang de la matriu és 2.
- Si $a = -1 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rang de la matriu és 2.

6 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ i $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Prova que la matriu T té inversa, T^{-1}, i calcula aquesta inversa T^{-1}.

b) Donada l'equació amb matriu incògnita B, $A = T^{-1}BT$, calcula el determinant de B.

c) Troba els elements de la matriu B considerada a l'apartat b).

a) $|T| = -1 \neq 0 \rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = T^{-1}BT \rightarrow B = TAT^{-1} \rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot \dfrac{1}{|T|} = |A| = 2$

c) $B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7 **Demostra, sense desenvolupar el determinant, que el seu valor és múltiple de 15.**

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Apliquem les propietats dels determinats i substituïm l'última columna per una combinació lineal de les tres columnes: $C_1 \cdot 100 + C_2 \cdot 10 + C_3 \rightarrow C'_3$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 0 \\ 3 & 7 & 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \\ 8 & 2 & 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 450 \\ 3 & 7 & 375 \\ 8 & 2 & 825 \end{vmatrix}$$

Finalment, traiem factor comú a la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 450 \\ 3 & 7 & 375 \\ 8 & 2 & 825 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 15 \cdot 30 \\ 3 & 7 & 15 \cdot 21 \\ 8 & 2 & 15 \cdot 55 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 30 \\ 3 & 7 & 21 \\ 8 & 2 & 55 \end{vmatrix} = 15 \cdot k$$