PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

1 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Troba A^{10}.

b) Calcula la matriu inversa de B.

c) En el cas particular $k = 0$, troba B^{10}.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ per a $n \geq 3 \rightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & k & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - kF_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t-k^2 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - (t-k^2)F_3 \\ F_2 = F_2 - kF_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En general: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 Considera A la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per a cada nombre natural n, troba A^n.

Calcula $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9I$$

3 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, troba les matrius X que verifiquin $XC + A = C + A^2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

La matriu C té inversa perquè és de rang 3.

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$\rightarrow X = CC^{-1} = I \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Troba les matrius A i B, si saps que verifiquen aquestes equacions matricials:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= M \\ -A + B &= N \end{aligned}\right\}, \text{ en què } M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ i } N = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -A + B &= \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ + \quad -2A + 2B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 19 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 11 & 39 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 26/5 & 0 & 19/5 \\ 52/5 & 13/5 & -26/5 \\ 26/5 & 11/5 & 39/5 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\
- & -3A + 3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} \\
\hline
 & 5A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 & 6 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 10 & -11 \\ -33 & 8 & 24 \\ -19 & -9 & -26 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$A = \begin{pmatrix} -19/5 & 10/5 & -11/5 \\ -33/5 & 8/5 & 24/5 \\ -19/5 & -9/5 & -26/5 \end{pmatrix}$$

5 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprova que verifica que $A^3 - I = 0$, amb I com a matriu identitat i 0 com a matriu nul·la.

b) Calcula A^{13}.

c) Sobre la base dels apartats anteriors i sense recórrer al càlcul d'inverses, troba la matriu X que verifica la igualtat $A^2X + I = A$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per tant, es verifica que $A^3 - I = 0$.

b) $A^3 = I \rightarrow A^{12} = I \rightarrow A^{13} = A^{12}A = A$

c) $A^2X + I = A \rightarrow A^2X = A - I \rightarrow A^3X = A(A - I)$

$$X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Considera A, B i I les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudia si hi ha cap valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ per al qual es verifiqui que $(A - \lambda I)^2 = B$.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda \\ 1-2\lambda & 2-2\lambda+\lambda^2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualem element a element i resolem les equacions que en resulten.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda^2+2=6 \\ 1-2\lambda=-3 \\ -2\lambda=-4 \\ 2-2\lambda+\lambda^2=2 \\ \lambda^2+1=5 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 2$$

7 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} m & -0 & 0 \\ 0 & -0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$:

a) Estudia, segons els valors de m, el rang de A.

b) Per a $m = -1$, calcula la matriu X que verifica $XA + A = 2I$, en què I és la matriu unitat d'ordre 3.

a) $\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Si $m = 0 \rightarrow$ rang $A = 1$, només hi ha una fila amb elements diferents de 0.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ rang $A = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Existeix A^{-1} perquè rang $(A) = 3$.

$XA + A = 2I \rightarrow XA = 2I - A \rightarrow X = (2I - A)A^{-1}$

$$\rightarrow X = 2A^{-1} - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

8 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, amb a un nombre real.

a) Descompon la matriu A en una suma d'una matriu simètrica i una d'antisimètrica.

b) Calcula el valor del paràmetre a per tal que $A^2 + A = \begin{pmatrix} 28 & 2 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}$.

a) Podem descompondre una matriu en dues altres, una de simètrica i una altra d'antisimètrica, de la manera següent: $A = M_1 + M_2 = \dfrac{A + A^t}{2} + \dfrac{A - A^t}{2}$; per tant:

$$M_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Fem els càlculs:

$$A^{2^2} + A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a - 2 & 2 \\ -1 & a^2 - a - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 2 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}$$

I obtenim que: $\left.\begin{matrix} a^2 + a - 2 = 28 \\ a^2 - a - 2 = 18 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} (1)\ a = -6 & a = 5 \\ (2)\ a = 5 & a = -4 \end{matrix}\right.$

Així, doncs, la solució és $a = 5$.