I.E.S Vescomtat de Cabrera

Examen Selectivitat 2n BATXILLERAT.

1.**MATRIUS**.

Nom ______________________________

Donades les matrius:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Trobeu una matriu X tal que A·X=B.
b) Calculeu B^{100}.

Raoneu les respostes.

a) Tenim $A \cdot X = B$ i volem trobar la matriu X.

Començo aïllant X (*)

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} B \Rightarrow X = A^{-1} B$ (*)

. Haurem de treballar amb la inversa de la matriu A. Per tant, mirarem si A té inversa.

Perquè una matriu quadrada tingui inversa el rang de la matriu ha de ser igual a la dimensió de la matriu. (*)

Buscaré el rang fent Gauss

$$\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = 3F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

El rang $(A) = 2$, ja que Gauss ens diu que el rang serà igual al nombre de files de la matriu que no siguin totalment nul·les.

rang $(A) = 2 = \dim(A) \Rightarrow$ A té inversa. (*)

Buscarem la inversa fent Gauss-Jordan, és a dir, partim $(A \mid I)$ i fent servir les transformacions que ens permet Gauss obtenim $(I \mid A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = 3F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 = -F_2]{F_1 = F_1/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$ Per tant $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (*)

(1) Ara ja trobem X multiplicant les matrius A^{-1} i B, cosa que podem fer ja que el nombre de columnes d'A^{-1} coincideix amb el nombre de files de B. (*)

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$ (*)

b) Hem de calcular B^{100} ho farem per inducció (*)

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix}$$

(1)

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$ (*)

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$ (*)

$$\Longrightarrow B^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$$

(*) = 1 punt.