

Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Comprova que verifica que $A^2 - I = 0$, amb I la matriu identitat i 0 la matriu nul·la.
 b) Calcula A^{12} .
 c) Tenint en compte els apartats anteriors i sense recórrer al càlcul d'inverses, troba la matriu X que verifica la igualtat $A^2X + I = A$.

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, es verifica que $A^2 - I = 0$.

$$b) A^2 = I \rightarrow A^2 = I \rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A = A$$

$$c) A^2X + I = A \rightarrow A^2X = A - I \rightarrow A^2X = A(A - I)$$

$$X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$