



Unitat 6. Moviment ondulatori

Activitats

1. Un oscil·lador harmònic d'amplitud A té una freqüència angular ω .

a) Quina és la fase inicial si es comença a comptar el temps quan l'elongació del mòbil és la meitat de l'amplitud?

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= \frac{A}{2} \\ y(0) &= A \sin \varphi \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{A}{2} = A \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = 0,5 \rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) I si és la quarta part?

$$\frac{A}{4} = A \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\varphi = 14,48^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 0,2527 \text{ rad}$$

2. Escriu l'equació del moviment harmònic simple d'un mòbil que es mou en l'eix X si la seva amplitud és de 15 cm, la seva freqüència val 4 Hz i en l'instant inicial el mòbil es troba en el punt mitjà de la seva amplitud.

$$A = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$

$$f = 4 \text{ Hz}$$

$$t_0 = 0 \rightarrow x = \frac{0,15}{2} = 0,075 \text{ m}$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ rad/s}$$

$$0,075 = 0,15 \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{0,075}{0,15} = 0,5 \rightarrow$$

$$\varphi = 30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$x = 0,15 \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. Un cos descriu un moviment harmònic simple d'equació $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Quina serà l'equació de la seva velocitat en funció del temps? Quant val la constant de fase si per a $t = 0$ la velocitat del cos és nul·la?

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Si } v = 0 \rightarrow \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

4. L'equació del moviment d'un cos que descriu un moviment harmònic és, en unitats del SI: $x = 10 \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Quant valen l'amplitud i el període del moviment?

$$A = 10 \text{ m}; \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \rightarrow T = 2 \text{ s}$$

b) I la velocitat del cos per a $t = 2 \text{ s}$?

$$v = 10 \pi \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v = 10 \pi \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

c) En quin estat de vibració es troba el mòbil en l'instant inicial?

5. La velocitat i l'acceleració màximes d'un cos que oscil·la verticalment amb l'ajut d'una molla valen, respectivament 1,29 m/s i 13,87 m/s². En quins punts es donen aquests valors màxims? Quines són les equacions del moviment, de la velocitat i de l'acceleració d'aquest cos, si es comença a comptar el temps quan l'elongació del cos és la tercera part de l'amplitud?

$$v_{\max} = A \omega = 1,29 \text{ m/s} \rightarrow \text{es dona en el punt d'elongació nul·la, } y = 0$$

$$a_{\max} = A \omega^2 = 13,87 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{es dona en el punt d'elongació mínima, } y = -A$$

Amb els valors de $v_{\max}$ i de $a_{\max}$ podem calcular ω i A :

$$\frac{A \omega^2}{A \omega} = \frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{13,87}{1,29} \rightarrow \omega = 10,75 \text{ rad/s}$$

$$A \omega = 1,29 \text{ m/s} \rightarrow A = \frac{1,29}{\omega} = \frac{1,29}{10,75} = 0,12 \text{ m}$$

$$\text{Si } t_0 = 0 \text{ i } y_0 = \frac{A}{3} \rightarrow y_0 = A \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = \frac{A}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \varphi_0 = \frac{1}{3} \rightarrow \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 0,34 \text{ rad}$$

Per tant:

$$y(t) = 0,12 \sin(10,75t + 0,34) \text{ m}$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = 0,12 \cdot 10,75 \cos(10,75t + 0,34) \rightarrow$$

$$\rightarrow v(t) = 1,29 \cos(10,75t + 0,34) \text{ m/s}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -1,29 \cdot 10,75 \sin(10,75t + 0,34) \rightarrow$$

$$\rightarrow a(t) = -13,87 \sin(10,75t + 0,34) \text{ m/s}^2$$



6. L'agulla d'una màquina de cosir oscil·la entre dos punts separats una distància vertical de 20 mm. Suposant que fa un moviment harmònic simple de freqüència 30 Hz, quina és la seva acceleració màxima en unitats del SI?

$$A = 10 \text{ mm}$$

$$\omega = 2 \pi f = 2 \pi 30$$

$$a_{\text{màx}} = -\omega^2 A \rightarrow a_{\text{màx}} = (2 \pi \cdot 30)^2 \cdot 10^{-2} = 355,3 \text{ m/s}^2$$

7. Un cos que penja d'una molla oscil·la de manera que ve descrit per l'equació del moviment següent, tenint en compte que l'elongació es mesura en cm i el temps en s:

$$y(t) = 15 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{\pi}{5}\right),$$

- a) Calculeu la velocitat i l'acceleració màximes, el període i la freqüència.

Expressem l'amplitud en unitats del SI: $A = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$

$$v_{\text{màx}} = A \omega = 0,15 \cdot \frac{4\pi}{3} = 0,63 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{màx}} = A \omega^2 = 0,15 \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 = 2,63 \text{ m/s}^2$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{2\pi} = 0,67 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = 1,5 \text{ s}$$

- b) Determineu l'elongació quan la velocitat té un valor de 0,58 m/s.

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -0,15 \cdot \frac{4\pi}{3} \sin\left(\frac{4\pi}{3}t + \frac{\pi}{5}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v(t_1) = -0,2\pi \sin\left(\frac{4\pi}{3}t_1 + \frac{\pi}{5}\right) = 0,58 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{4\pi}{3}t_1 + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{0,58}{-0,2\pi} = -0,92 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4\pi}{3}t_1 + \frac{\pi}{5} = \arcsin(-0,92) = -1,18 \text{ rad}$$

$$y(t_1) = 0,15 \cos\left(\frac{4\pi}{3}t_1 + \frac{\pi}{5}\right) =$$

$$= 0,15 \cos(-1,18) = 0,06 \text{ cm}$$

8. Una molla té una constant elàstica de 75 N/m. Una massa que penja d'aquesta molla oscil·la amb una freqüència de 3,5 Hz quan la separem 2,5 cm de la posició d'equilibri. Quin és el valor d'aquesta massa?

$$\left. \begin{array}{l} k = 75 \text{ N/m} \\ f = 3,5 \text{ Hz} \end{array} \right\}$$

$$\omega = 2 \pi f = 2 \cdot \pi \cdot 3,5 = 7 \pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{75}{(7\pi)^2} = 0,1551 \text{ kg} = 155,1 \text{ g}$$

9. Una massa puntual penja d'un fil inextensible de massa negligible. Posem la massa a oscil·lar amb moviment vibratori harmònic simple. Escolliu la resposta correcta a aquestes qüestions:

- A. La massa està sotmesa a la màxima acceleració:

- a) En els instants en què l'elongació és màxima.
b) En el punt central de l'oscil·lació.
c) En els instants en què la velocitat és màxima.

La resposta correcta és la a). Derivant dues vegades l'expressió de l'arc en funció del temps s'obté l'acceleració que és proporcional a l'arc. Per tant, és màxima quan aquest també ho és.

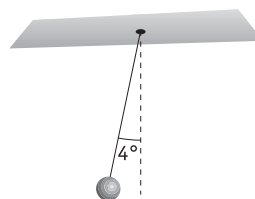
- B. Si l'amplitud de l'oscil·lació disminuís, la freqüència del moviment:

- a) No variaria.
b) Augmentaria.
c) Disminuiria.

La resposta correcta és la a). En l'estudi vàlid per a petites amplituds d'oscil·lació, la freqüència és independent de l'amplitud.

10. Construïm un pèndol amb una petita massa que penja d'un fil. Si el separem un angle de 4° de la posició d'equilibri, es posa a oscil·lar amb un període de 2,3 s.

- a) Quina és la longitud del fil?



$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{T^2}{4 \pi^2} g = l$$

$$l = \frac{2,3^2 \cdot 9,8}{4 \pi^2} = 1,31 \text{ m}$$



- b) Escriviu l'equació del moviment suposant que en l'instant inicial el cos està passant per la posició d'equilibri.

$$s = l \sin \Theta = 1,31 \sin 4^\circ = 0,09 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,31}} = 2,73 \text{ rad/s} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$x_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$s(t) = 0,09 \sin 2,73 t$$

11. Un oscil·lador harmònic està format per una molla ideal de massa negligible i una partícula puntual unida a l'extrem de la molla, de massa $m = 40 \text{ g}$. El període d'oscil·lador és de 2 s .

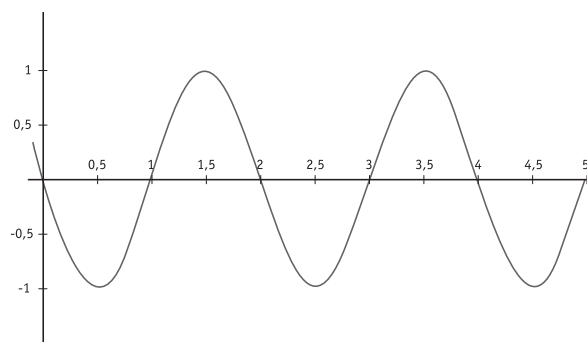
- a) Si l'amplitud de les oscil·lacions és de 10 cm , quina velocitat màxima adquireix la massa m ?

$$v_{\text{màx}} = A\omega = A \frac{2\pi}{T} \rightarrow v_{\text{màx}} = 31,4 \text{ cm/s}$$

- b) Representeu en una gràfica l'acceleració de l'oscil·lació en funció del temps, i indiqueu en els eixos les escales corresponents.

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin \omega t, \text{ amb } A\omega^2 = 0,1 \cdot \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 = 0,99 \text{ m/s}^2$$



- c) Quant hauria de valer la massa m perquè la freqüència de l'oscil·lador es multipliqués per dos?

$$m\omega^2 = k; \text{ si } \omega \rightarrow 2\omega, m \rightarrow \frac{m}{4} = 10 \text{ g}$$

12. Un gronxador efectua 5 oscil·lacions en 16 s amb un angle de separació respecte de la vertical de 10° . Si en el gronxador hi ha un nen de massa 25 kg , determineu:

- a) La freqüència d'oscil·lació.

Amb les dades de l'enunciat calculem la freqüència:

$$f = \frac{5 \text{ osc}}{16 \text{ s}} = 0,31 \text{ Hz}$$

- b) La longitud del gronxador.

Amb l'expressió de la freqüència d'un pèndol calculem la longitud del gronxador:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow$$

$$\rightarrow l = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{9,8}{4\pi^2 \cdot 0,31^2} = 2,54 \text{ m}$$

- c) L'energia mecànica.

L'energia mecànica coincideix amb l'energia potencial al punt més alt de la trajectòria (ja que en aquest punt no hi ha energia cinètica). Per tant:

$$E = E_{p \text{ màx}} = mgy = mgl(1 - \cos \alpha) = 25 \cdot 9,8 \cdot 2,54(1 - \cos 10^\circ) = 9,45 \text{ J}$$

13. Doneu exemples d'ones mecàniques i dieu si són longitudinals o transversals.

Per exemple: ones transversals en una superfície d'un líquid, ones en una corda, que poden ser tan transversals o longitudinals, i les ones sonores propagant-se en l'aire que són ones longitudinals.

14. Supposeu que amb una mà subjecteu l'extrem d'una corda i que l'altre extrem està fixat a una paret. Expliqueu quins moviments amb la mà i el canell s'han de fer per:

- a) Originar un pols en la corda.

Per produir un pols cal fer un cop sec a l'extrem de la corda amb un moviment ràpid del canell.

- b) Originar un tren d'ones en la corda.

Per produir un tren d'ones, cal mantenir un moviment continu del canell amunt i avall.

15. Quines magnituds físiques són pertorbades pel pas d'una ona electromagnètica?

Els camps elèctric i magnètic a cada punt de l'espai on arriba l'ona electromagnètica.

16. Definiu la velocitat de fase d'una ona, el front d'ona i el raig.

■ **Velocitat de fase d'ona:** velocitat a la que es propaga la pertorbació en un medi determinat.

■ **Front d'ona:** conjunt de punts del medi als quals arriba la pertorbació en un instant de temps determinat.

■ **Raig:** qualsevol línia recta que sigui perpendicular a un front d'ona determinar.



17. Com es pot generar una ona cilíndrica? Expliqueu-ho detalladament.

Per generar una ona cilíndrica cal fer oscil·lar alhora tots els punts que estiguin situats sobre una mateixa recta i de tal manera que l'ona es transmeti en l'espai al llarg d'un medi homogeni, per tal que es conservi la forma de l'ona.

18. A distàncies prou grans d'un focus emissor d'ones esfèriques, com són els fronts d'ona?

A distàncies prou grans del centre, les superfícies esfèriques es poden assimilar localment a plans ja que els diferents fronts d'ona esfèrics tenen poca curvatura. És una bona aproximació considerar-los fronts d'ona plans.

19. Per a una ona harmònica que vibra amb una freqüència de 120 Hz i una amplitud de 2 cm, la distància mínima entre dos punts que estan en fase és de 2 mm, quina serà la velocitat de fase de l'ona?

$$v = \lambda f = 0,002 \cdot 120 = 0,24 \text{ m/s}$$

20. Una ona harmònica de freqüència 550 Hz es propaga a una velocitat de 300 m/s. Quina és la distància mínima entre dos punts que en tot moment es troben en el mateix estat de vibració?

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{300}{550} = 0,55 \text{ m}$$

21. L'equació d'una ona transversal, en unitats del SI, és:

$y = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$. Determineu el període, la longitud d'ona, la freqüència i la velocitat de fase.

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow T = 2 \text{ s}; f = \frac{1}{T} = 0,5 \text{ Hz}$$

$$\lambda = 4 \text{ m}; v = \lambda f = 2 \text{ m/s}$$

22. L'equació d'una ona harmònica transversal és (en unitats del SI): $y = 0,4 \sin \pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$. Quant valdran l'elongació i la velocitat transversals del punt $x = 0$ a l'instant $t = 6 \text{ s}$?

L'elongació a $x = 0$ a l'instant $t = 6 \text{ s}$ és:

$$y = 0,4 \sin \pi \left(\frac{6}{2} - 0 \right) = 0,4 \sin 3\pi = 0$$

La velocitat és:

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{0,4}{2} \pi \cos \left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x}{4} \right)$$

Per tant, a $x = 0$ a l'instant $t = 6 \text{ s}$ val:

$$v = 0,2 \pi \cos \left(\frac{\pi 6}{2} - 0 \right) = -0,2 \pi \text{ m/s} \rightarrow -0,63 \text{ m/s}$$

23. Una ona harmònica descrita per l'equació

$$y(x, t) = 2 \cos \pi (x - 2t)$$

en unitats del SI, viatja per un medi elàstic.

A. La velocitat de propagació de l'ona és de:

a) 0,5 m/s

b) 1 m/s

c) 2 m/s

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ m/s. L'opció correcta és la c).}$$

B. La distància mínima entre dos punts en el mateix estat de perturbació és de:

a) 0,5 m

b) 2 m

c) 5 m

La distància mínima val: $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = 2 \text{ m}$. L'opció correcta és la b).

C. L'amplitud de la perturbació és de:

a) 0,5 m

b) 1 m

c) 2 m

L'amplitud de la perturbació és $A = 2 \text{ m}$. L'opció correcta és la c).

D. La freqüència angular (o pulsació) és de:

a) $2\pi \text{ rad/s}$

b) 2 rad/s

c) $\frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$

La pulsació és: $\omega = 2\pi \text{ rad}$. L'opció correcta és la a).

E. La velocitat màxima d'oscil·lació d'un punt afectat per la perturbació és de:

a) $\pi \text{ m/s}$

b) $2\pi \text{ m/s}$

c) $4\pi \text{ m/s}$

La velocitat és: $v = \frac{dy}{dt} = 4\pi \sin(\pi x - 2\pi t)$ que dona lloc a un valor màxim de $v_{\text{màx}} = 4\pi \text{ m/s}$. L'opció correcta és la c).



■ Activitats finals

□ Qüestions

1. Quina característica distingeix un moviment harmònic d'un moviment vibratori qualsevol?

Un moviment vibratori qualsevol és aquell moviment periòdic en el qual el mòbil es mou al voltant d'una posició d'equilibri i repeteix una vegada i una altra la seva trajectòria. El moviment harmònic és el més senzill que es dona a la natura i resulta de projectar un moviment circular uniforme sobre un eix que passi pel centre de la circumferència i que estigui contingut en el pla que la defineix.

2. Un mòbil descriu un moviment harmònic d'equació $x = A \sin \omega t$. Quina serà la seva velocitat en l'instant en què l'elongació sigui màxima ($x = A$)?

$v = 0$, ja que $v = A \omega \cos \omega t = A \omega \cos 90^\circ = 0$

3. Quin és l'angle de desfasament que hi ha entre la velocitat i l'acceleració del moviment harmònic simple? Raoneu la resposta.

Si tenim en compte que la velocitat i l'acceleració es poden expressar per les equacions:

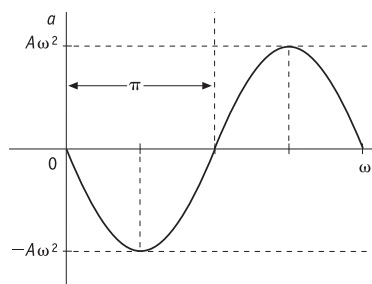
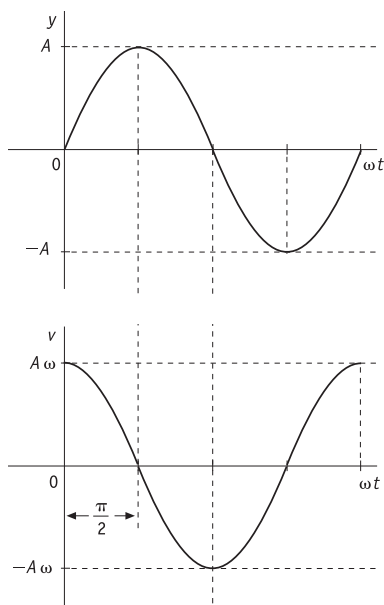
$$v(t) = A \omega \cos \omega t = A \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a(t) = -A \omega^2 \sin \omega t = A \omega^2 \sin (\omega t + \pi)$$

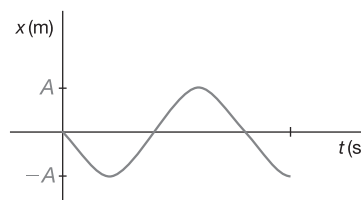
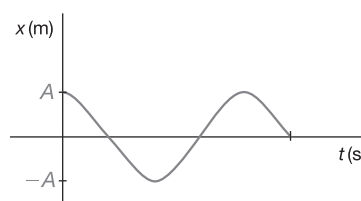
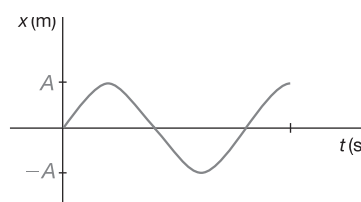
Aleshores podem comprovar que l'angle de desfasament $\Delta\varphi$ és:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Això també es pot comprovar si observem els gràfics v - t i a - t que s'obtenen en representar les funcions anteriors.



4. A la figura hi ha representats tres moviments harmònics simples. Escriviu les equacions del moviment i calculeu el desfasament entre aquests.



1: $x = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$

2: $x = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right)$

3: $x = A \sin (\omega t + \pi) = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \pi \right)$

Càlcul dels angles de desfasament $\Delta\varphi$:

Entre 1 i 2: $\Delta\varphi = \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) - \omega t = \frac{\pi}{2}$

Entre 1 i 3: $\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \omega t = \pi$

Entre 2 i 3: $\Delta\varphi = (\omega t + \pi) - \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

També es pot comprovar si s'observen els gràfics on representem les tres funcions harmòniques.



5. La freqüència angular d'un oscil·lador harmònic és el triple que la d'un altre. Digueu quina relació hi ha entre:

$$\omega_1$$

$$\omega_2 = 3 \omega_1$$

- a) Els períodes.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{2\pi}{T_1} \\ \omega_2 &= \frac{2\pi}{T_2} = 3\omega_1 \end{aligned} \right\}$$

$$3 \left(\frac{2\pi}{T_1} \right) = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow 3T_2 = T_1$$

- b) Les freqüències.

$$\omega_1 = 2\pi f_1$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 3\omega_1$$

$$3(2\pi f_1) = 2\pi f_2 \rightarrow f_2 = 3f_1$$

- c) Les amplituds.

L'amplitud d'un oscil·lador harmònic no està relacionada amb la freqüència angular, ja que el seu valor depèn de les condicions inicials en què se n'estudia el moviment.

Raoneu les respostes.

6. Pengem dos cossos diferents de dues molles que tenen la mateixa constant elàstica. Raoneu com són entre ells els períodes d'oscil·lació dels cossos en els casos següents:

L'expressió que lliga la constant elàstica amb la massa i el període és $T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- a) Un dels cossos té una massa quatre vegades més gran que l'altre, però estan separats la mateixa distància de la posició d'equilibri.

Si la constant elàstica dels dos oscil·ladors és la mateixa i la massa del primer és quatre vegades la del segon:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \\ m_2 = 4m_1 \end{aligned} \right\}$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{4m_1}{k}} = 4\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2T_1$$

$$\rightarrow T_2 = 2T_1$$

Així doncs, el període del segon oscil·lador és la meitat del període del primer.

- b) Els cossos són iguals, però l'amplitud d'oscil·lació d'un cos és el doble que la de l'altre.

Ara estem considerant que tant les masses dels oscil·ladors com les seves constants elàstiques són les mateixes per a tots dos. Si tenim en compte que l'amplitud no està relacionada amb les magnituds anteriors i recordeu l'expressió anterior que relaciona el període amb la massa i la constant elàstica, hem de concloure que els períodes d'oscil·lació de tots dos casos també són iguals.

7. Disposem de dues molles idèntiques, fixades al sostre. Pengem una massa *A* a la primera molla i una massa *B* a la segona, i les deixem oscil·lar amb un moviment harmònic simple.

- a) Si $m_A = 2m_B$, determineu la relació entre els períodes d'oscil·lació.

$$\left. \begin{aligned} k &= m_A \omega_A^2 \\ k &= m_B \omega_B^2 \end{aligned} \right\} \quad \frac{m_A}{m_B} = \left(\frac{\omega_A}{\omega_B} \right)^2 = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^2 \rightarrow T_A = \sqrt{2} T_B$$

- b) Expliqueu com afecta l'amplitud de l'oscil·lació al valor del període.

En el moviment harmònic simple, el període és independent de l'amplitud del l'oscil·lació. No l'afecta.

8. Tenim dos pèndols de la mateixa longitud, però la massa d'un és el doble de la de l'altre. Com són els períodes entre ells?

El període d'oscil·lació d'un pèndol ve donat per l'expressió

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Per tant, podem comprovar que la massa no influeix en el valor del període. Així, si les longituds dels dos pèndols són iguals, els seus períodes també són iguals.

9. Tenim dos pèndols de la mateixa massa, però la longitud d'un és quatre vegades la de l'altre. Com són els períodes entre ells?

El període d'oscil·lació d'un pèndol ve donat per l'expressió

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\left. \begin{aligned} l_1 \\ l_2 = 4l_1 \end{aligned} \right\} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4l_1}{g}} =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2T_1 \rightarrow T_2 = 2T_1$$

10. En el moment que un pèndol simple passa per la posició més baixa, la tensió i el pes, coincideixen? Raoneu-ho.

En aquesta posició, $T - p = m \frac{v^2}{l}$. Si tenim en compte que l'acceleració centrípeta és positiva, deduïm que:

$$T - p > 0 \rightarrow T > p.$$

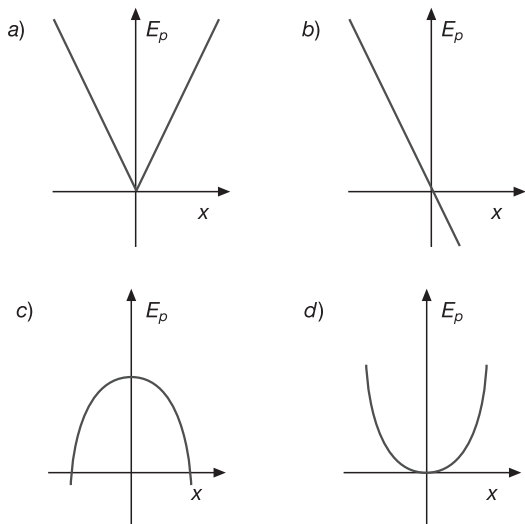
11. Volem resoldre un problema proposat per Galileu. Una corda està penjada dalt d'una torre alta, de manera que l'extrem superior és invisible i inaccessible, però l'extrem inferior sí que es veu. Com trobaríeu la longitud de la corda?

Sabem que el període d'oscil·lació d'un pèndol simple és

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Si fem oscil·lar la corda i mesurem el període d'oscil·lació, segons aquesta expressió tenim:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} \rightarrow l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 g$$

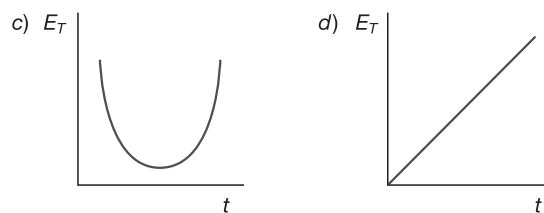
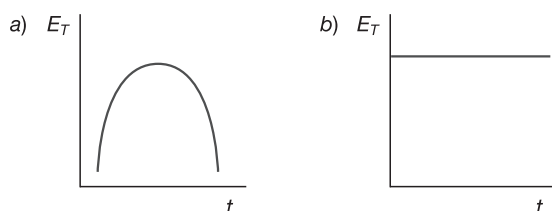
12. Quina de les gràfiques següents pot representar l'energia potencial d'un objecte lligat a una molla en funció del seu desplaçament de la posició d'equilibri? Raoneu la resposta.



$$U = \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow \text{paràbola amb les branques cap amunt.}$$

La solució correcta és la a).

13. Quina de les gràfiques següents representa millor la variació de l'energia mecànica d'un oscil·lador harmònic simple en funció del temps? Raoneu la resposta.



L'opció correcta és la b) perquè l'energia mecànica d'un oscil·lador és constant.

14. Proposeu dos experiments en els quals es demostrï que en la propagació d'una ona no hi ha transport net de matèria.

El primer experiment consisteix a col·locar un suro petit sobre la superfície en repòs d'un líquid i generar una ona llançant un objecte sobre la superfície a una determinada distància del suro. Així, veurem que, en arribar la pertorbació al suro, aquest es posa a oscil·lar en direcció vertical sense que es desplaci en la direcció en què avança l'ona, és a dir, en direcció horitzontal.

Un segon experiment, semblant a l'anterior, consisteix a fer passar un fil o una corda pel forat d'una volandera. Si fem oscil·lar la corda en un pla vertical, observarem que la volandera es posa a oscil·lar en direcció vertical sense que es desplaci en la direcció en què avança l'ona.

15. En què es diferencia una ona longitudinal d'una ona transversal? Expliqueu-ho detalladament.

En una ona longitudinal la direcció d'oscil·lació de les partícules del medi és la mateixa que la direcció de propagació de l'ona, mentre que en una ona transversal aquestes direccions són perpendiculars. Un exemple d'ona longitudinal és el so; un exemple d'ona transversal és l'ona produïda en una corda.

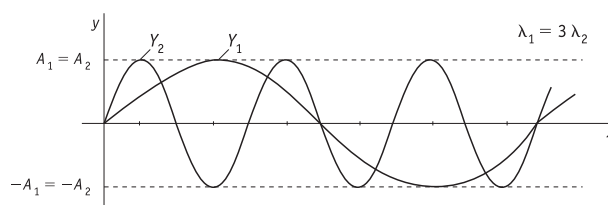
16. Com es poden classificar les ones si tenim en compte el temps que dura la pertorbació? Expliqueu-ho detalladament.

Si la pertorbació que origina l'ona dura un interval de temps molt petit, gairebé instantani, tenim un **pols**. En aquest cas l'energia que es transmet amb l'ona es proporciona durant aquest temps petit.

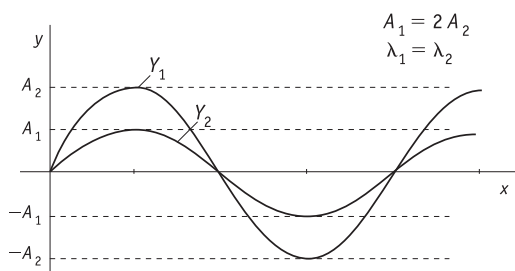
Si la pertorbació que origina l'ona dura un temps relativament gran, tenim un **tren d'ones**. En aquest cas l'energia que es transmet amb l'ona és proporcionada de manera contínua durant l'interval de temps que dura la pertorbació i es genera una successió de polsos.

17. Dibuixeu dues ones transversals:

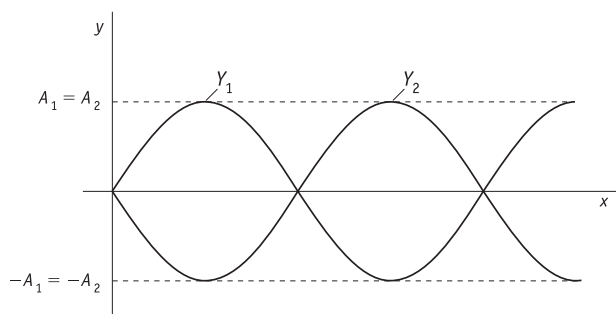
- a) De la mateixa amplitud, però una amb una longitud d'ona una triple que la de l'altra.



- b) De la mateixa longitud d'ona, però una amb la meitat d'amplitud que l'altra.



- c) De la mateixa amplitud i la mateixa longitud d'ona, però desfasades 180°.



18. Per a una ona que es desplaça sobre l'eix X cap a l'esquerra, com s'expressa l'equació d'ona?

Si una ona es desplaça cap a l'esquerra, podem considerar que la seva velocitat de fase és negativa. Per tant, si anomenem v el valor absolut d'aquesta velocitat, tenim que:

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{-v} \right) =$$

$$= A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \rightarrow y(x, t) = A \sin (\omega t + kx)$$

19. Escriviu l'equació de la quantitat de moviment que transmet una ona en el cas d'una ona harmònica.

Recordem que l'equació d'una ona harmònica és:

$$y(x, t) = A \sin (\omega t - kx).$$

Si derivem aquesta equació respecte del temps, obtenim la velocitat d'una partícula del medi situada a una distància x del focus:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos (\omega t - kx)$$

Finalment, si multipliquem aquesta velocitat per la massa m de la partícula del medi que ocupa la posició x , obtenim la quantitat de moviment en mòdul, p , que transmet l'ona:

$$p = mv = m A \omega \cos (\omega t - kx) = p_0 \cos (\omega t - kx)$$

en què $p_0 = m A \omega$ és el valor màxim de la quantitat de moviment que aconsegueix la partícula.

20. Si disminuïm la freqüència d'una ona, com variarà la longitud d'ona si es transmet a través del mateix medi? Raoneu la resposta.

Si l'ona no canvia el seu medi de transmissió, la seva velocitat de fase no varia encara que variï la seva freqüència. Per tant, si recordem l'expressió que relaciona la freqüència, la velocitat de fase i la longitud d'ona, $v = \lambda f$, podem comprovar que, en disminuir la freqüència f , la longitud d'ona λ augmenta per tal que la velocitat de fase v es mantingui constant.

21. Expliqueu detalladament què vol dir que una ona és doblement periòdica.

En tota ona s'ha de considerar una doble periodicitat: en el temps i en l'espai. En el temps, perquè qualsevol partícula del medi oscil·la al pas de l'ona, i sabem que un moviment oscil·latori és un tipus particular de moviment periòdic. En l'espai, perquè l'ona es va repetint periòdicament a intervals regulars de longitud d'ona d'acord amb el seu valor de longitud d'ona. Aquesta doble periodicitat queda reflectida, per exemple, en l'equació d'ona harmònica, en la qual la periodicitat temporal ve donada pel valor del període T , mentre que la periodicitat espacial ve donada pel valor de la longitud d'ona:

$$y(x, t) = A \sin (\omega t - kx) = A \sin 2\pi$$

Aquesta doble periodicitat d'una ona també queda reflectida si tenim en compte que l'expressió que lliga la velocitat de fase v , la longitud d'ona λ i el període T ve donada per

$$v = \frac{\lambda}{T}. \text{ D'altra banda, es defineix la velocitat de fase com la relació entre la distància que recorre l'ona des del focus fins a un punt determinat situat a una distància } x \text{ del focus i el temps que triga a fer-ho, } v = \frac{x}{t}.$$

Per tant, si comparem ambdues expressions, comprovem que, en el temps d'un període, l'ona avança una longitud igual a la longitud d'ona, mentre que, perquè l'ona recorri una longitud igual a la longitud d'ona, ha de transcórrer el temps d'un període.

22. Dos diapasons emeten sons les freqüències dels quals estan en la relació 2:1. Raoneu quin tipus de relació tenen:

- a) Els seus períodes.

La relació entre les freqüències dels dos diapasons és 2:1. Això vol dir que la freqüència f del primer so és el doble de la freqüència f' del segon so: $f = 2f'$.

Si tenim en compte la relació que lliga la freqüència i el període, $f = \frac{1}{T}$, trobem que:

$$f = 2f' \rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2f'} = \frac{1}{2} \frac{1}{f'} \rightarrow T = \frac{T'}{2}$$

Per tant, els períodes estan en la relació 1:2, és a dir, que el període del primer so és la meitat del període del segon so.



b) Les seves longituds d'ona.

Si tenim en compte la relació que lliga la velocitat de fase, la freqüència i la longitud d'ona, i considerem que els dos sons es transmeten a la mateixa velocitat del so v , comprovem que:

$$f = 2f' \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{v'}{2f'} = \frac{1}{2} \frac{v}{f'} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda'}{2}$$

Per tant, les longituds d'ona també estan en la relació 1:2, és a dir, que la longitud d'ona del primer so és la meitat de la longitud d'ona del segon so.

23. Un tren d'ones travessa un punt d'observació. En aquest punt, el temps transcorregut entre dues crestes consecutives és de 0,2 s. De les afirmacions següents, escolliu la que sigui correcta i justifiqueu la resposta.

- a) La longitud d'ona és de 5 m.
- b) La freqüència és de 5 Hz.
- c) El període és de 0,4 s.
- d) Cap de les afirmacions anteriors no és correcta.

De l'enunciat es dedueix que $T = 0,2$ s. Així:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Hz.}$$

És a dir, l'afirmació b) és correcta. Per tant, ni la c) ni la d) són correctes. Pel que fa a l'afirmació a), no tenim prou dades per a trobar la longitud d'ona ja que desconexem la velocitat de propagació i $\lambda = vT$.

□ Problemes

1. Un oscil·lador harmònic comença el seu moviment des d'un extrem a 10 cm del punt d'equilibri i tarda 0,25 s a arribar al centre. Calculeu:

a) El període del moviment.

$$T = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ s}$$

b) El nombre d'oscil·lacions que fa en 1 min.

$$f = \frac{1}{T} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 60 \text{ vibracions} \cdot \text{min}^{-1}$$

c) La pulsació.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s}$$

d) La posició quan han passat 0,5 s de l'inici del moviment.

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \varphi) = 0,1 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \\ y &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\ t &= 0,5 \text{ s} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow x &= 0,1 \sin\left(2\pi \cdot 0,5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0,1 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

2. Una partícula vibra amb una velocitat màxima de 20 m/s. Calculeu la freqüència i l'acceleració màxima si l'amplitud d'aquest moviment és de 10 cm.

$$v_m = 20 \text{ m/s}$$

$$A = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$v_m = A\omega \rightarrow \omega = \frac{v_m}{A} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200}{2\pi} = 31,83 \text{ Hz}$$

$$a = -\omega^2 A = -200^2 \cdot 0,1 = -4000 \text{ m/s}^2$$

3. Un cos vibra amb una amplitud de 4 cm i una freqüència de 50 Hz. Trobeu:

a) La velocitat màxima de la vibració.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{màx}} = A\omega = 0,04 \cdot 100\pi = 4\pi = 12,57 \text{ m/s}$$

b) La velocitat quan l'elongació val 1 cm.

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow y = 0$$

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = 0,04 \sin(100\pi t + \varphi) = 0,04 \sin(100\pi t)$$

$$0,01 = 0,04 \sin(100\pi t) \rightarrow \frac{0,01}{0,04} = \sin(100\pi t)$$

$$\rightarrow 0,25 = \sin(100\pi t) \rightarrow$$

$$\rightarrow 14,48 \text{ rad} = 100\pi t \rightarrow t = \frac{14,48}{100\pi} = 0,046 \text{ s}$$

$$v = 0,04 \cdot 100\pi \cdot \cos(100\pi \cdot 0,046) = 12,16 \text{ m/s}$$

c) El nombre de vibracions en 1 min.

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = \\ &= 3000 \text{ vibracions/min} \end{aligned}$$

4. El moviment d'una partícula ve donat per l'equació

$$x = 8 \sin \frac{\pi}{2} t, \text{ en cm. Calculeu:}$$

a) L'amplitud del moviment.

$$A = 8 \text{ cm}$$

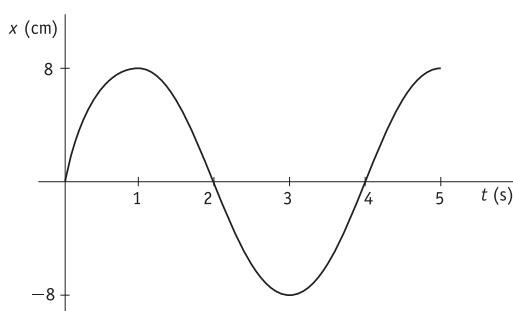
b) El període.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = 4 \text{ s}$$



- c) La posició de la partícula en els instants de temps $t = 0$, $t = 1$ s, $t = 2$ s, $t = 3$ s, $t = 4$ s i $t = 5$ s, i representeu-les en una gràfica.

t (s)	x (cm)
0	0
1	8
2	0
3	-8
4	0
5	8



5. Un objecte de massa 3 kg penja d'una molla. Des de la seva posició d'equilibri l'estirem cap avall una distància de 25 cm i, des d'aquest punt i trobant-se inicialment en repòs, el deixem oscil·lar lliurement. El període d'oscil·lació és d'1 s. Determineu:

- a) Les constants A , ω , φ , en unitats del SI, de l'equació $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ que descriu el moviment de l'objecte.

$$A = 0,25 \text{ m}$$

$$t = 0, y = -A \rightarrow \varphi = \pi \text{ } (\varphi = 0 \text{ també és correcte)}$$

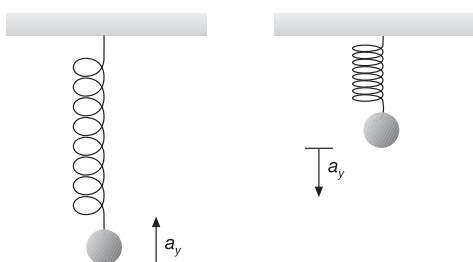
$$T = 1 \text{ s} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s} \rightarrow 6,28 \text{ rad/s}$$

- b) El valor màxim de l'acceleració de l'objecte, la seva direcció i sentit, i els punts de la trajectòria en què s'assoleix.

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{valor màxim } a_{y\text{màx}} = \omega^2 A \rightarrow a_{y\text{màx}} = \pi^2 \text{ m/s}^2$$

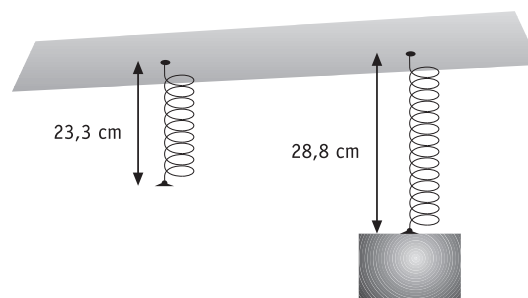
S'assoleix als dos extrems de la trajectòria.



- c) La constant recuperadora de la molla.

$$\left. \begin{array}{l} m \cdot a_y = -ky \\ a_y = -\omega^2 y \end{array} \right\} k = m\omega^2 \rightarrow k = 118,43 \text{ N/m}$$

6. Un oscil·lador harmònic es construeix fixant l'extrem superior d'una molla, penjant-hi una massa de 23 g de l'extrem inferior i separant la massa 7,5 cm de la seva posició d'equilibri. Prèviament hem mesurat la longitud en repòs de la molla sense la massa i amb la massa penjada, i hem obtingut uns resultats de 23,3 cm i 28,8 cm, respectivament.



- a) Escriviu l'equació del moviment d'aquest oscil·lador suposant que comencem a comptar el temps quan la massa passa per la posició d'equilibri i amb velocitat positiva.

$$F = k\Delta y \rightarrow mg = k\Delta y$$

$$k = \frac{mg}{\Delta y} = \frac{0,023 \cdot 9,8}{0,0288 - 0,0233} = 4,025 \text{ N/m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4,025}{0,023}} = 13,23 \text{ rad/s}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = A \sin(\omega t + \varphi) \\ y = 0 \\ A = 0,075 \text{ m} \end{array} \right\} y(t) = 0,075 \sin 13,23 t$$

- b) Quines són la velocitat i l'acceleració màximes?

$$v_{\text{màx}} = A \cdot \omega = 0,075 \cdot 13,23 = 0,99 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{màx}} = A \cdot \omega^2 = 0,075 \cdot 13,23^2 = 13,13 \text{ m/s}^2$$

7. Pengem un cos de 15 g de massa d'una molla de constant elàstica 5 N/m. Quin és el període de les oscil·lacions que es produeixen en separar el cos de la seva posició d'equilibri i deixar-lo anar?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,015}{5}} = 0,34 \text{ s}$$

8. Hem mesurat la constant elàstica d'una molla pel mètode dinàmic, que consisteix a penjar una massa i comptar el temps que triga a fer una sèrie d'oscil·lacions; quan la massa és de 42 g, veiem que fa 20 oscil·lacions en un temps de 12,5 s.



- a) Calculeu la constant elàstica de la molla i la freqüència de les oscil·lacions.

$$T = \frac{12,5}{20} = 0,625 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,625} = 1,6 \text{ Hz}$$

$$k = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0,042 \cdot \left(\frac{2\pi}{0,625} \right)^2 = 4,24 \text{ N/m}$$

- b) Escriviu l'equació del moviment quan separem la molla una longitud de 2,5 cm de la seva posició d'equilibri, suposant que el cos inicialment es troba en un punt d'elongació màxima. Calculeu també la velocitat i l'acceleració màximes.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4,24}{0,042}} = 10,05 \text{ rad/s}$$

Per tant, l'equació del moviment és:

$$y(t) = 2,5 \cdot 10^{-2} \sin(10,05t + \varphi_0)$$

La velocitat és:

$$v = \frac{dy}{dt} = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10,05 \cos(10,05t + \varphi_0)$$

El valor màxim de la velocitat és:

$$v_{\text{màx}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10,05 \cdot 1 = 0,25 \text{ m/s}$$

L'acceleració ve donada per:

$$a = \frac{dv}{dt} = -2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10,05^2 \sin(10,05t + \varphi_0)$$

El valor màxim de l'acceleració és:

$$a_{\text{màx}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10,05^2 \cdot 1 = 2,53 \text{ m/s}^2$$

9. Un cos de 92 g de massa està enganxat a una molla i experimenta un moviment harmònic simple, de manera que en l'instant inicial l'elongació és la sisena part de l'amplitud, mentre que la velocitat i l'acceleració són, respectivament, $-0,38 \text{ m/s}$ i $5,42 \text{ m/s}^2$.

D'acord amb les dades, la velocitat inicial és positiva, mentre que l'acceleració inicial és negativa; aquesta situació només és possible quan l'elongació inicial també és negativa. Per calcular A , ω i φ_0 resollem les equacions que s'obtenen de l'elongació, la velocitat i l'acceleració en l'instant inicial prenent valors absoluts, i, en donar l'equació del moviment, tindrem en compte el signe negatiu de l'elongació inicial:

- a) Escriviu les equacions del moviment, de la velocitat i de l'acceleració.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(0) = \frac{A}{6}$$

$$\frac{A}{6} = A \sin \varphi \rightarrow \varphi = \sin^{-1} \frac{1}{6} = 9,59^\circ = 0,17 \text{ rad}$$

$$v(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow v(0) = -0,38 \text{ m/s}$$

$$-0,38 = A \omega \cos \varphi \rightarrow -0,38 = A \omega \cos 9,59^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow -0,38 = A \cdot \omega \cdot 0,986 \rightarrow A \omega = -0,385$$

$$a(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow a(0) = 5,42 \text{ m/s}^2$$

$$-5,42 = A \omega^2 \sin \varphi \rightarrow -5,42 = A \omega^2 \frac{1}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow -32,52 = A \omega^2$$

$$-32,52 = -0,385 \omega \rightarrow \omega = \frac{32,52}{0,385} = 84,38 \text{ rad/s}$$

$$A = -\frac{0,385}{84,38} = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$x(t) = -4,5 \cdot 10^{-3} \sin(84,38t + 0,17) \text{ m}$$

$$v(t) = -0,38 \cos(84,38t + 0,17) \text{ m/s}$$

$$a(t) = 32,52 \sin(84,38t + 0,17) \text{ m/s}^2$$

- b) Determineu la constant elàstica de la molla i escriviu l'expressió de la força recuperadora en funció del temps.

$$k = \omega^2 m = 84,38^2 \cdot 0,092 = 655,04 \text{ N/m}$$

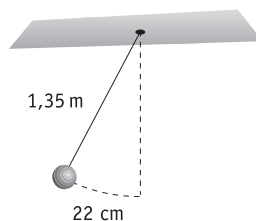
$$F(t) = ma(t) = 2,94 \sin(84,38t + 0,17) \text{ N}$$

10. Construïm un pèndol senzill amb una petita esfera de 35 g de massa i una corda de 45 cm de longitud. Determineu el període, la freqüència i la freqüència angular de les oscil·lacions que es produeixen en deixar anar el pèndol des d'una posició que forma 3° amb la vertical.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,45}{9,8}} = 1,35 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = 0,74 \text{ Hz}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,45}} = 4,67 \text{ rad/s}$$

11. Separem un pèndol una longitud d'arc de 22 cm respecte de la posició d'equilibri. Si la longitud del pèndol és d'1,35 m i la massa que hi penja és de 2 kg, calculeu:



- a) El període i la freqüència angular de les oscil·lacions que es produeixen.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,35}{9,8}} = 2,33 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,33} = 2,69 \text{ rad/s}$$

- b) La velocitat màxima del pèndol.

$$v_{\text{màx}} = A \omega = 0,22 \cdot 2,69 = 0,59 \text{ m/s}$$



12. Un pèndol oscil·la amb un moviment harmònic simple quan se separa un angle de 5° respecte de la vertical. Si el pèndol passa per la posició d'equilibri a una velocitat de $0,38 \text{ m/s}$, determineu la seva equació del moviment sabent que comencem a comptar el temps quan es troba a la cinquena part de la seva amplitud. Quan valen el període i la freqüència d'aquest pèndol?

$$v_0 = 0,38 \text{ m/s}$$

$$E_{c\text{màx}} = E_{p\text{màx}} \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = m g h_{\text{màx}} \rightarrow$$

$$h_{\text{màx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{0,38^2}{2 \cdot 9,8} = 7,37 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$y + h_{\text{màx}} = l \rightarrow l \cos \theta + h_{\text{màx}} = l \rightarrow$$

$$l = \frac{h_{\text{màx}}}{1 - \cos \theta} = \frac{7,37 \cdot 10^{-3}}{1 - \cos 5} = 1,94 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,94}} = 2,25 \text{ rad/s}$$

$$S = l \cdot \theta = 1,94 \cdot \frac{\pi}{36} = 0,17 \text{ m}$$

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow S \sin \varphi_0 = \frac{S}{5} \rightarrow \varphi_0 \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) = 0,20 \text{ rad}$$

Per tant:

$$s(t) = 0,17 \sin(2,25t + 0,20)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{2,25} = 2,79 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} \rightarrow f = \frac{1}{2,79} = 0,36 \text{ Hz}$$

13. Un cos d' $1,6 \text{ kg}$ de massa està lligat a una molla que l'obliga a descriure un moviment harmònic simple donat per l'equació $x(t) = 0,03 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{10}\right)$, en què x s'expressa en metres. Determineu l'energia cinètica i l'energia potencial del cos quan passa pel punt d'elongació $x = 2,2 \text{ cm}$.

$$x(t) = 0,03 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \omega^2 m = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot 1,6 = 0,44 \text{ N/m}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,44 \cdot 0,22^2 = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$E_T = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,44 \cdot 0,03^2 = 1,98 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$E_c = E_T - E_p = 1,98 \cdot 10^{-4} - 1,06 \cdot 10^{-4} = 9,2 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

14. Una molla horitzontal està unida per l'extrem de l'esquerra a la paret i per l'extrem de la dreta a una partícula de massa 2 kg . Separem la partícula una distància de 25 cm cap a la dreta de la seva posició d'equilibri i la deixem anar. En aquest moment comencem a comptar el temps. La partícula descriu un moviment harmònic simple amb un període de $0,75 \text{ s}$. Quan la partícula es trobi a $0,10 \text{ m}$ a la dreta del punt central de l'oscil·lació i s'estigui movent cap a la dreta, determineu:

a) L'energia cinètica de la partícula.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,75} = 8,38 \text{ rad/s}$$

$$k = m \omega^2 = 2 \cdot 8,38^2 = 140 \text{ N/m}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} k A^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \\ &= \frac{1}{2} 140 \cdot (0,25^2 - 0,10^2) = 3,7 \text{ J} \end{aligned}$$

Solució alternativa: $x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0)$

El sentit positiu de les X és cap a la dreta. La posició d'equilibri correspon a $x = 0$.

Condicions inicials:

$$t = 0; A = A \cos(0 + \theta_0) \rightarrow \cos \theta_0 = 1 \rightarrow \theta_0 = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 8,38 \text{ rad/s}$$

Per $x_1 = 0,10 \text{ m}$:

$$0,10 = 0,25 \cos \omega t \rightarrow \omega t = \pm 1,16 \text{ rad}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega \sin \omega t = \pm 1,16 \text{ rad}$$

Per $x_1 = 0,10 \text{ m}$ (i es mou cap a la dreta):

$$v_1 = -0,25 \cdot 8,38 \sin(-1,16) = 1,92 \text{ m/s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,92^2 = 3,7 \text{ J}$$

b) L'energia mecànica del sistema.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_{\text{màx}}^2 = \frac{1}{2} m (A \omega)^2 \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (0,25 \cdot 8,38)^2 = 4,4 \text{ J}$$

Solució alternativa:

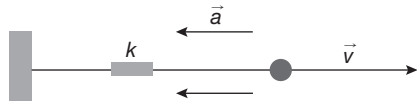
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 0,25^2 = 4,4 \text{ J}$$



- c) La força resultant que actua sobre la partícula. Doneu-ne el mòdul, la direcció i el sentit.

$$F = ma = m\omega^2 x \rightarrow F = 2 \cdot 8,38^2 \cdot 0,10 = 14,04 \text{ N}$$



15. Fem oscil·lar amb una amplitud de 15 cm un dels extrems d'una corda, de manera que en 15 s fa 20 oscil·lacions. Si l'altre extrem està a 4 m de distància, mesurada horitzontalment, i la pertorbació triga 2,6 s a arribar:

En primer lloc, calculem la freqüència amb les dades de les oscil·lacions que fa en 15 s.

$$f = \frac{20 \text{ osc.}}{15 \text{ s}} = 1,33 \text{ Hz}$$

- a) Calculeu la velocitat de fase de l'ona.

Calculem la velocitat de fase amb les dades de la distància entre extrems i el temps que tarda la pertorbació a arribar d'un extrem a l'altre:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4}{2,6} = 1,54 \text{ m/s}$$

- b) Calculeu el nombre d'ona.

Apliquem les expressions $v = \lambda f$ i $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$v = \lambda f \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,54}{1,33} = 1,15 \text{ m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,15} = 5,44 \text{ rad/m}$$

- c) Escriviu l'equació d'ona suposant que en l'instant inicial el focus es troba en l'estat d'oscil·lació $y = A$.

Si per $t = 0$ i $x = 0$, tenim $y = A = 0,15 \text{ m}$, tenint en compte el valor de k calculat abans i, a més a més, que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1,33 = 8,38 \text{ rad/s}$$

obtenim:

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = 0,15 \cdot \cos(8,38t - 5,44x)$$

16. Una noia pilota una llanxa situada damunt de la superfície d'un llac i, amb el seu moviment, origina sobre l'aigua 15 oscil·lacions durant un temps de 25 s. Si l'ona superficial que es produeix triga 18 s a arribar a la riba del llac, que es troba a 30 m, quina és la longitud d'ona de l'ona generada?

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{15 \text{ osc.}}{25 \text{ s}} = 0,6 \text{ Hz} \\ v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 \text{ m}}{18 \text{ s}} = 1,67 \text{ m/s} \end{aligned} \right\}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1,67}{0,6} = 2,78 \text{ m}$$

17. A l'aigua de mar el so es transmet amb una velocitat aproximada de 1530 m/s. Quina és la freqüència que correspon a un so de longitud d'ona 2,5 m? Trieu la resposta correcta:

- a) 3825 Hz b) $1,63 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ c) 612 Hz

$$\left. \begin{aligned} v &= 1530 \text{ m/s} \\ \lambda &= 2,5 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1530}{2,5} = 612 \text{ Hz}$$

Per tant l'opció correcta es la c).

18. L'oïda humana només és sensible als sons que tenen una freqüència compresa entre 20 Hz i 20 000 Hz. A quines longituds d'ona del so és sensible l'oïda humana, si suposem que la velocitat en l'aire és de 345 m/s?

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 20 \text{ Hz} \\ v &= 345 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{345}{20} = 17,25 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{màx}} &= 20\,000 \text{ Hz} \\ v &= 345 \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda' = \frac{v}{f_{\text{màx}}} = \frac{345}{20\,000} = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

19. Una ona sonora de 440 Hz té una longitud d'ona de 77 cm. Quina serà la longitud d'ona d'una ona sonora de 200 Hz que es propagui en el mateix medi?

$$v = \lambda_1 f_1 = 0,77 \cdot 440 = 339 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$\lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{339}{200} = 1,69 \text{ m} = 169 \text{ cm}$$

20. En una cubeta d'ones generem ones de 20 Hz de freqüència i de 2 cm d'amplitud, de manera que tarden 5 s per a recórrer 10 m.

- A. La velocitat màxima de vibració dels punts de la superfície de l'aigua és:

- a) 2 m/s

- b) $0,8\pi \text{ m/s}$

- c) 4 m/s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20 = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$v = \frac{\omega}{k} \rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{40\pi}{2} = 20\pi \text{ m}$$

$$y(x, t) = 0,02 \sin(40\pi t - 20\pi x)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 0,02 \cdot 40\pi \cos(40\pi t - 20\pi x) = \\ &= 0,8\pi \cos(40\pi t - 20\pi x) \end{aligned}$$

El valor màxim de la velocitat anterior es dona quan $\cos(40\pi t - 20\pi x) = 1$, i, per tant, aquest valor de la velocitat és $0,8\pi \text{ m/s}$. Així doncs, la resposta correcta és la b).



També podem arribar al mateix resultat si recordem que el valor màxim de la velocitat del moviment harmònic simple, que és el moviment que assoleixen els punts de la superfície de l'aigua al pas de l'ona, és:

$$v_{\max} = A\omega = 0,02 \cdot 40\pi = 0,8\pi \text{ m/s}$$

B. La diferència de fase entre dos punts sobre la superfície de l'aigua situats en la mateixa direcció de propagació de l'ona i separats per una distància de 5 cm, en un instant determinat és:

a) $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

b) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $\pi \text{ rad}$

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = k(x_1 - x_2) = k\Delta x = 20\pi \cdot 0,05 = \pi \text{ rad}$$

Per tant, la resposta correcta és la c).

21. L'equació d'una ona que es propaga per una corda és $y(x, t) = 8 \sin(\pi(100t - 8x))$, on x i y es mesuren en centímetres i t en segons. Calculeu el temps que trigarà l'ona a recórrer 25 m.

Busquem primer la velocitat de fase de l'ona. A partir de l'expressió de l'equació d'ones deduïm:

$$k = 8\pi \text{ rad/cm} = 8\pi \cdot 10^2 \text{ rad/m}; \omega = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$\text{Aleshores: } v = \frac{\omega}{k} = \frac{100\pi}{8\pi \cdot 10^2} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

L'ona trigarà a recórrer 25 m un temps igual a:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{25}{12,5 \cdot 10^{-2}} = 200 \text{ s}$$

22. L'ona produïda sobre la superfície d'un líquid arriba a dos objectes que hi suren damunt i que estan separats una distància d'1,3 m. Els objectes es posen a oscil·lar i fan 16 oscil·lacions en 4 s, de manera que els moviments harmònics simples dels dos objectes estan en fase, i entre ells hi ha 3 longituds d'ona. Amb quina velocitat es propaga l'ona sobre la superfície d'aquest líquid?

Com que els dos objectes estan separats una distància d'1,3 m i entre els dos hi ha 3 longituds d'ona aleshores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\Delta x}{3} = \frac{1,3}{3} = 0,43 \text{ m} \\ f &= \frac{16 \text{ osc.}}{4 \text{ s}} = 4 \text{ Hz} \end{aligned} \right\}$$

$$v = \lambda f = 0,43 \cdot 4 = 1,73 \text{ m/s}$$

23. La funció de l'ona generada en una corda és:

$$y(x, t) = 0,6 \sin 2\pi \left(\frac{t}{1,25} - \frac{x}{0,5} \right)$$

en què les distàncies s'expressen en metres, i el temps en segons. Calculeu:

Llegim els valors de A , T i λ directament de la funció d'ona.

a) La freqüència.

$$T = 1,25 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ Hz}$$

b) La velocitat de fase.

$$\lambda = 0,5 \rightarrow v = \lambda f = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4 \text{ m/s}$$

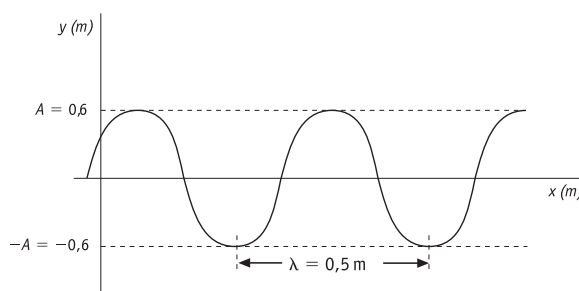
c) L'amplitud.

$$A = 0,6 \text{ m}$$

d) La longitud d'ona.

$$\lambda = 0,5 \text{ m}$$

e) Esquematitzeu els dos últims resultats sobre un dibuix que representi la forma de la corda.



24. Determineu la diferència de fase que hi ha entre dos punts d'un medi en el qual es propaga una ona amb una velocitat de fase de 120 m/s i un període de 0,05 s, si sabeu que els punts estan a unes distàncies de 8 m i 12 m, respectivament, del focus.

Amb les dades que es donen de T i v calculem ω i k :

$$T = 0,05 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 20 = 40\pi \text{ rad/s}$$

$$v = 120 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{40\pi}{120} = \frac{\pi}{3} \text{ rad/m}$$

La diferència de fase és:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_2) - (\omega t - kx_1) = \\ &= k(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{3} (12 - 8) = \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned}$$



25. L'equació d'un moviment ondulatori està determinada per la funció $y(x, t) = 7 \cdot 10^{-2} \cos\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right)$, en què totes les magnituds expressades en unitats del SI. Determineu:

Llegim els valors de A , ω i k directament de la funció d'ona.

- a) L'amplitud i la velocitat d'un punt que és a una distància d'11 m del focus.

L'amplitud és: $A = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

La velocitat de qualsevol punt on arriba l'ona és:

$$v(x, t) = \frac{dy(x, t)}{dt} = -7 \cdot 10^{-2} \frac{1}{4} \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right) = -1,75 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6}\right)$$

La velocitat d'un punt tal que $x = 11 \text{ m}$ val:

$$v(11, t) = -1,75 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{t}{4} - \frac{11}{6}\right) = -1,75 \cdot 10^{-2} \sin\left(\frac{t}{4} - 1,83\right)$$

- b) La freqüència angular i el període.

$$\omega = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi \text{ s}$$

- c) El nombre d'ona i la longitud d'ona.

$$k = \frac{1}{6} \text{ m} = 0,167 \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi \text{ m}$$

- d) La freqüència i la velocitat de fase.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8\pi} = 0,04 \text{ Hz}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{0,25}{0,167} = 1,5 \text{ m/s}$$

(o bé, $v = \lambda f = 12\pi \cdot 0,04 = 1,5 \text{ m/s}$)

26. Donada la funció d'ona següent, en què les distàncies s'expressen en metres i el temps en segons, calculeu la velocitat i l'acceleració d'un punt que dista 3 m de l'origen de coordenades quan ha passat un temps de 8 s.

$$y(x, t) = 0,03 \sin\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)$$

Quina és la velocitat de fase d'aquest moviment ondulatori?

$$v(x, t) = \frac{dy}{dt} = 0,03 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right) = 0,0118 \cos\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)$$

$$v(3, 8) = 0,0118 \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot 8 - \frac{\pi}{5} \cdot 3\right) = -9 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$a(x, t) = \frac{dv}{dt} = 0,0118 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \left[-\sin\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)\right] = -4,63 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{8}t - \frac{\pi}{5}x\right)$$

$$a(3, 8) = -4,63 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot 8 - \frac{\pi}{5} \cdot 3\right) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{5}} = 0,625 \text{ m/s}$$

27. Una ona es propaga en el sentit negatiu de les x amb longitud d'ona de 20 cm. El focus emissor vibra amb una freqüència de 25 Hz, una amplitud de 3 cm i inicialment es troba en un estat d'elongació màxima. Determineu:

- a) La velocitat de propagació de l'ona.

$$v = \lambda f = 0,2 \cdot 25 = 5 \text{ m/s}$$

- b) L'equació d'ona.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 25 = 50\pi \text{ rad/s}$$

$$A = 3 \text{ m}$$

Per tant, l'equació d'ona és:

$$y(x, t) = 0,03 \cos(10\pi x + 50\pi t)$$

- c) L'instant en què un punt que es troba a 2,5 cm de l'origen assoleix, per primera vegada, una velocitat nul·la.

Busquem per a quin valor de t mínim el punt situat a $x = 2,5 \text{ cm} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ tenim una velocitat nul·la:

$$v(2,5 \cdot 10^{-2}, t) = 1,5\pi \sin(\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-1} - 50\pi t) = 0$$

$$\rightarrow \sin(\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-1} - 50\pi t) = 0$$

$$\rightarrow \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-1} - 50\pi t = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{\pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-1}}{50\pi} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$



28. En una corda s'ha generat una ona d'equació:

$$y(x, t) = 1,5 \sin 2\pi \left(\frac{t}{4} - \frac{x}{6} \right)$$

en què les distàncies s'expressen en metres i el temps en segons. Representant 3 longituds d'ona, dibuixeu la forma de la corda en els instants de temps següents:

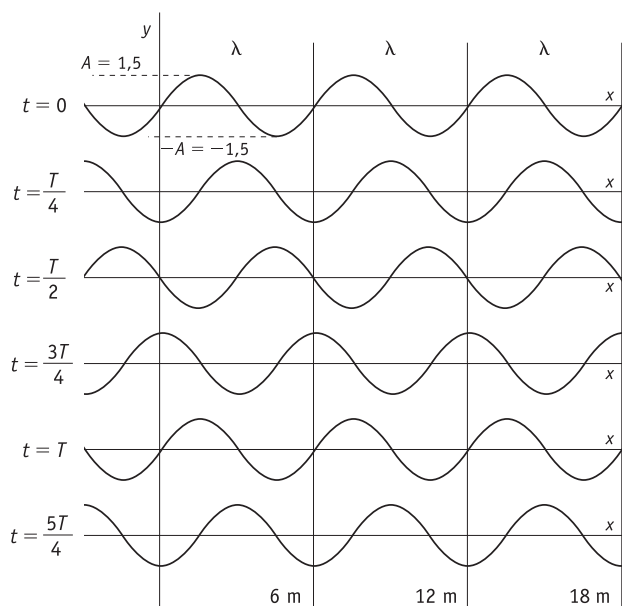
$$t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T, t = \frac{5T}{4}$$

Per dibuixar la forma de la corda en els instants de temps indicats, cal obtenir les funcions de x que resulten de substituir els temps indicats en l'equació d'ona, tenint en compte que

$$T = \frac{1}{f} = 0,25 \text{ s (ho llegim directament de l'equació d'ona)}.$$

A continuació, donem valors a x en les equacions obtingudes, fins a un valor màxim de $x_{\text{màx}} = 3\lambda = 3 \cdot 6 = 18 \text{ m}$, ja que en l'enunciat se'n diu que cal representar 3 longituds d'ona, i $\lambda = 6 \text{ m}$ (ho llegim directament de l'equació d'ona).

Per fer aquestes representacions gràfiques s'aconsella fer servir un programa informàtic (per exemple EXCEL) i obtindrem els gràfics següents:



29. Un filferro de 74 cm està enganxat per un extrem a un cos de 250 g de massa. El cos penja d'una molla situada en posició vertical i de constant elàstica 35 N/m, i, quan fem oscil·lar el cos separant-lo 5,2 cm de la posició d'equilibri, es genera una ona harmònica transversal al filferro que tarda 1,2 a arribar a l'altre extrem. Determineu

a) L'equació de l'ona al filferro si considerem que es comença a comptar el temps quan el focus (punt de contacte del filferro amb el cos) es troba a 2 cm de la posició d'equilibri.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{35}{0,25}} = 11,83 \text{ rad/s}$$

$$v_{\text{fase}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,74}{1,2} = 0,62 \text{ m/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{11,83}{0,62} = 19,08 \text{ rad/m}$$

$$y(0, 0) = A \sin (\omega \cdot 0 - k \cdot 0 + \varphi_0) = 0,02 \rightarrow$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{0,02}{A} = \frac{0,02}{0,052} \rightarrow$$

$$\varphi_0 = \arcsin \left(\frac{0,02}{0,052} \right) = 0,39 \text{ rad}$$

Per tant,

$$y(x, t) = 0,052 \sin (11,83 t - 19,08 x + 0,39)$$

b) L'elongació i la velocitat d'un punt del filferro que dista 23 cm del focus en l'instant $t = 0,5 \text{ s}$. Quines són la velocitat i l'acceleració màximes d'aquest punt?

$$y(0,23, 0,5) = 0,052 \sin (11,83 \cdot 0,5 - 19,08 \cdot 0,23 + 0,39) = 0,049 \text{ m}$$

$$v(0,23, 0,5) = 0,052 \cdot 11,83 \cos (11,83 \cdot 0,5 - 19,08 \cdot 0,23 + 0,39) = -0,21 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{màx}} = A \cdot \omega = 0,052 \cdot 11,83 = 0,62 \text{ m/s}$$

$$a_{\text{màx}} = A \cdot \omega^2 = 0,052 \cdot 11,83^2 = 7,28 \text{ m/s}^2$$