

Unitat 2. Camp gravitatori

Activitats

1. Justifica el fet que a prop de la superfície terrestre el camp associat a la força pes és un camp uniforme.

Per a altures petites es pot negligir la curvatura de la Terra i considerar que la intensitat del camp gravitatori és perpendicular a l'horitzontal. També es pot suposar, sense fer massa error, que és constant i de valor igual a g . Per tant, el camp associat a la força pes és un camp uniforme prop de la superfície terrestre.

2. Un camp newtonià actua sobre una partícula. Quan aquesta partícula es troba a una distància determinada del centre de forces, experimenta una força de 200 N. Quina força rebria la partícula si se situés al doble de distància que abans?

$$F = \frac{k}{r^2} = 200 \text{ N}$$

Si ara en comptes de r tenim $2r$:

$$F' = \frac{k}{(2r)^2} = \frac{1}{4} \frac{k}{r^2} = \frac{1}{4} 200 = 50 \text{ N}$$

3. Un camp newtonià pot no ser un camp central?

No, perquè per definició un camp newtonià és un camp central.

4. En un camp conservatiu el treball per anar d'A a B pel camí C és de 120 J. El treball per anar de B a A per un altre camí qualsevol és:

- a) 120 J
b) -120 J
c) 0 J

El treball associat a un camp conservatiu al llarg d'un camí tancat és zero. Per tant, per tornar de B a A es fa un treball oposat a l'anterior. L'opció correcta és la b) -120 J.

5. En un camp conservatiu, el treball per anar d'A a B és 12 J i per anar de B a C, 45 J. Quina de les afirmacions és la correcta?

- a) El treball per anar d'A a C és 57 J.
b) El treball per anar d'A a C és 33 J.
c) El treball per anar d'A a C és -57 J.

El treball associat a un camp conservatiu és independent del camí seguit. En aquest cas, per anar d'A a C escollim el camí d'A a B seguit de B a C. El treball és la suma dels dos treballs i l'opció correcta és la a), $W = 12 + 45 = 57 \text{ J}$.

6. Si expressem la força en N, la massa en g i la distància en cm, quin és el valor de la constant de la gravitació universal G ?

Segons la llei de la gravitació universal, $F = G \frac{m m'}{r^2}$, la

constant de gravitació universal, en el sistema internacional, pren el valor de $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. En les unitats demanades, G val:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{10^4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \cdot \frac{1 \text{ kg}^2}{10^6 \text{ g}^2} = 6,67 \cdot 10^{-13} \frac{\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2}$$

7. Dues masses s'atrauen amb una força d'1 N quan es troben a una distància d . Quina serà la força d'atracció quan les masses es trobin a una distància $4d$?

$$F = G \frac{m m'}{d^2} = 1 \text{ N}$$

Si ara en comptes de d tenim $4d$:

$$F' = G \frac{m m'}{(4d)^2} = \frac{1}{4^2} G \frac{m m'}{d^2} = \frac{1}{16} \cdot 1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

8. Una massa de 1000 kg es troba en l'origen de coordenades i una altra de 2000 kg en el punt de coordenades (300, 400) m. Quin és el mòdul de la força que rep la massa de 1000 kg? Expressa el resultat en nN.

La distància que separa les masses és:

$$d = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ m}$$

Les dues masses reben la mateixa força (en mòdul):

$$F = G \frac{m m'}{d^2} = 8 G \text{ N} = 5,3336 \cdot 10^{-10} \text{ N} \rightarrow 0,5336 \text{ nN}$$

9. Quin és el període del moviment de rotació de la Terra al voltant del Sol si suposem que la trajectòria és circular i que aquests cossos estan aïllats de la resta de l'Univers?

Dades: $M_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ i $r_{sr} = 1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}$

En girar la Terra al voltant del Sol, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m_T \omega^2 r = G \frac{m_T M_s}{r^2} \rightarrow \omega^2 = G \frac{M_s}{r^3}$$

Tenint en compte que la velocitat angular es pot posar en funció del període, tenim que:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{G \frac{M_s}{r^3}}} = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{(1,495 \cdot 10^{11})^3}}} = 365 \text{ dies} \end{aligned}$$

10. Quan una nau s'allunya de la Terra, el seu pes varia? Com varia?

L'atracció gravitatòria de la Terra sobre la nau varia de forma inversament proporcional al quadrat de la distància de la nau al centre de masses de la Terra.

11. Un cos té una massa de 50 kg. Aquest cos a la Lluna té la mateixa massa? I pes? Justifiqueu la resposta.

La massa és independent de la intensitat de la gravetat on es troba el cos del planeta. Per tant, la massa és 50 kg tant a la Terra com a la Lluna. En canvi, el pes a la Lluna serà menor perquè l'acceleració de la gravetat a la superfície de la Lluna és menor que la de la Terra.

12. La intensitat de la gravetat a la superfície d'un planeta és $3,2 \text{ m/s}^2$. Quina és la intensitat de la gravetat a una distància de la superfície del planeta igual al triple del seu radi?

La intensitat de la gravetat és inversament proporcional a la distància al centre. Si la massa del planeta és M i el radi és R , la gravetat a la superfície és: $g(R) = G \frac{M}{R^2}$. A la distància $d = 4R$, la gravetat és $g(d) = \frac{M}{(4R)^2}$. És clar que la gravetat a quàdruple distància és 16 vegades més petita, per tant, $0,2 \text{ m/s}^2$.

13. Calculeu la intensitat de camp gravitatori que genera en la seva superfície una gran esfera metàl·lica de coure de radi 5 m i densitat $8,93 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Amb quina força atrau una persona de 80 kg que està tocant l'esfera?

Si designem per ρ la densitat, la massa de l'esfera és:

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

La intensitat del camp gravitatori a la seva superfície és:

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^2} = G \frac{4}{3} \pi R \rho = 1,25 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

La força d'atracció sobre una persona de massa $m = 80 \text{ kg}$ sobre la superfície serà:

$$F = m g = 9,98 \cdot 10^{-4} \text{ N} \rightarrow 1 \text{ mN}$$

14. La massa de la Lluna és aproximadament de $7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, i el radi de $1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$.

a) Quina distància recorre un cos en 1 s, en caiguda lliure a la Lluna, si el deixem anar des d'un punt proper a la superfície?

Calculem la intensitat de la gravetat a la superfície de la Lluna:

$$g = G \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,3 \cdot 10^{22}}{(1,7 \cdot 10^6)^2} = 1,69 \text{ m/s}^2$$

L'espai recorregut per un cos en un temps t és: $s = \frac{1}{2} g t^2$.

Substituint dades: $s = 84,27 \text{ cm} \rightarrow 0,84 \text{ m}$.

b) Quin és el període d'oscil·lació a la superfície lunar d'un pèndol que a la Terra oscil·la amb un període d'1 s?

El període del pèndol de longitud l ve donat per:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dividint els períodes a la Lluna i a la Terra:

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = 2,41. \text{ Si } T_T = 1 \text{ s}, T_L = 2,41 \text{ s}.$$

c) Quins pesos hauríem d'utilitzar a la superfície lunar per equilibrar la massa d'un cos en el plat d'una balança, si aquest equilibri s'aconsegueix a la Terra amb pesos de 23,15 g?

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Cal posar els mateixos pesos, és a dir, 23,15 g.

15. Si la densitat de la Terra es tripliqués sense variar el radi, quin seria el valor de g a la superfície de la Terra?

A la superfície de la Terra, la intensitat de camp gravitatori és, en mòdul:

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} = G \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2} = G \rho_0 \frac{4}{3} \pi R_T$$

Si la densitat fos el triple, el camp gravitatori valdria:

$$g = G(3\rho_0) \frac{4}{3} \pi R_T = 3g_0 = 3 \cdot 9,8 = 29,4 \text{ m/s}^2$$

16. A quina distància de la Terra la gravetat es redueix a una desena part del seu valor a la superfície?

Dades: $R_T = 6380 \text{ km}$

El mòdul de la gravetat a la superfície de la Terra és:

$$g = G \frac{M_T}{R^2}$$

en què R és el radi de la Terra.

Si la gravetat es redueix a una desena part, l'expressió anterior queda:

$$\frac{g}{10} = G \frac{M_T}{R'^2}$$

Relacionem les dues expressions:

$$\frac{g}{10} = \frac{G \frac{M_T}{R^2}}{G \frac{M_T}{R'^2}} \Rightarrow 10 = \frac{R'^2}{R^2} \Rightarrow 10 = \frac{R'^2}{6380^2}$$

Resolem l'equació i ens dona que la distància respecte al centre de la Terra és $R' = 20\,175,3$ km que correspon una altura respecte de la superfície de la Terra de $13\,795,3$ km.

17. Quant pesa una persona de 90 kg al cim de l'Everest?

Dades: altitud Everest = 8840 m

Aquesta persona, al nivell del mar, pesa aproximadament:

$$p = mg = 90 \cdot 9,8 = 882 \text{ N}$$

En el cim de l'Everest la gravetat disminueix una mica i el seu valor és, respecte al valor pres inicialment, aproximadament:

$$g' = G \frac{M_T}{(R + H)^2} \cdot \frac{R^2}{R^2} = 9,8 \cdot \frac{R^2}{(R + H)^2} =$$

$$= 9,8 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2} = 9,8 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{8,84}{6380}\right)^2} = 9,7729 \text{ m/s}^2$$

Per tant, el pes serà $p = mg = 90 \cdot 9,7729 = 879,6 \text{ N}$

18. Trobeu la relació de la força gravitatòria i la força centrífuga que rep una massa m a l'equador.

Dades: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6380 \text{ km}$

La força gravitatòria és: $p = mg = 9,8 \text{ m N}$

La força centrífuga és:

$$F_n = m \omega^2 R = m \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2 6,38 \cdot 10^6 = 0,03374 \text{ m N}$$

La relació entre aquestes forces és:

$$\frac{9,8 \text{ m}}{0,03374 \text{ m}} = 290,5$$

És a dir, la força gravitatòria és 290,5 vegades més gran que la centrífuga.

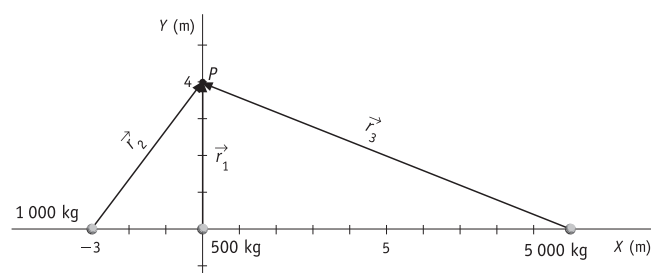
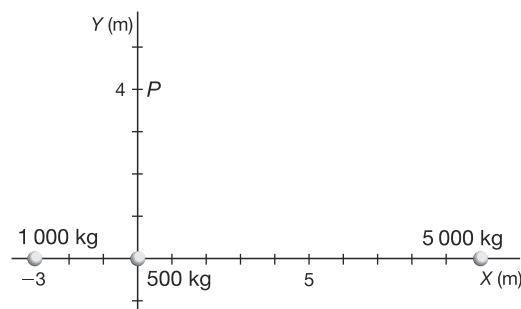
19. En els vèrtexs d'un triangle equilàter hi ha tres masses iguals. En quin punt s'anul·la la intensitat de la gravetat?

La gravetat s'anul·la al centre de masses (el baricentre).

20. Si en tres dels quatre vèrtexs d'un quadrat tenim tres esferes de masses diferents, la intensitat del camp gravitatori en el centre del quadrat varia segons la posició de les masses en els vèrtexs? Justifiqueu la resposta.

Sí que varia. El component en la direcció de cada diagonal és la diferència dels camps dels vèrtexs oposats i les dues diagonals són perpendiculars. Si canviem de posició les masses dels vèrtexs, els components varien i la seva composició varia.

21. Calculeu el camp gravitatori creat en el punt P per la distribució de masses representada en la figura.



Els vectors de posició de les masses són:

$$\vec{r}_1 = 4\vec{j} \rightarrow r_1 = 4$$

$$\vec{r}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow r_2 = 5$$

$$\vec{r}_3 = 10\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow r_3 = \sqrt{116}$$

La intensitat de camp gravitatori de la distribució de masses ve donada per l'expressió:

$$\vec{g} = \sum G \frac{M_i}{r_i^2}$$

$$\vec{g} = -G \left(\frac{500}{4^2} \vec{j} + \frac{1000}{5^2} \cdot \frac{(3\vec{i} + 4\vec{j})}{5} + \frac{5000}{(\sqrt{116})^2} \cdot \frac{(10\vec{i} + 4\vec{j})}{\sqrt{116}} \right) =$$

$$= (1,07 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 5,29 \cdot 10^{-9} \vec{j}) \text{ m/s}^2$$

22. En els vèrtexs d'un quadrat de costat 10 m hi ha quatre esferes iguals de 1000 kg. Calculeu:

a) La intensitat de camp en el centre del quadrat.

La intensitat del camp gravitatori és nul·la en el centre del quadrat.

b) El potencial en el centre del quadrat.

El potencial és 4 vegades el produït per una de les masses. La distància de cada massa al centre és la meitat de la diagonal: $d = 5\sqrt{2} \text{ m}$. Per tant, el potencial és:

$$V = -4G \frac{M}{d} = -4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000}{5\sqrt{2}} = -3,77 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}$$

23. Si en tres dels quatre vèrtexs d'un quadrat tenim tres esferes de masses diferents, el potencial gravitatori en el centre del quadrat varia segons la posició de les masses en els vèrtexs? Justifiqueu la resposta.

No, perquè les distàncies són iguals i, en conseqüència, el potencial $V = -G \frac{\sum M_i}{d}$ només depèn de la massa total.

24. En els vèrtexs d'un triangle equilàter hi ha tres masses iguals. Hi ha algun lloc proper a les masses on s'anul·li el potencial?

No, el potencial sempre és una suma de termes del mateix signe i no es pot anul·lar a distància finita de les masses.

25. Tenim una massa de 10 kg en repòs sobre la superfície terrestre. Quin treball cal fer per pujar-la fins a una distància de 10 m? I fins a una altura de 630 km?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$$R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$h = 10 \text{ m}$$

$$W = mgh \rightarrow W = 10 \cdot 9,81 \cdot 10 = 981 \text{ J}$$

o bé:

$$W = m \left(-G \frac{M_T}{R_T + h} + G \frac{M_T}{R_T} \right) \rightarrow W = 981 \text{ J}$$

$$h = 630 \text{ km} = 6,3 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$W = m \left(-G \frac{M_T}{R_T + h} + G \frac{M_T}{R_T} \right) \rightarrow W = 5,6 \cdot 10^7 \text{ J}$$

26. Si l'energia mecànica d'un cos és de 1 200 J i suposem que es troba en un camp conservatiu, pot ser que el valor de l'energia potencial sigui:

- a) -1 000 J
b) 1 400 J
c) 5 000 J

Raoneu la resposta.

L'energia mecànica per a un sistema conservatiu és la suma de les seves energies cinètica i potencial. A més, l'energia cinètica sempre és positiva o zero. Per tant, si l'energia mecànica és de 1 200 J, l'energia potencial no pot superar aquest valor. L'única opció possible és la a) -1 000 J que implica un valor de 2 200 J per a l'energia cinètica.

27. Quin és el període d'un satèl·lit que gira a 10 000 km de distància respecte de la superfície de la Terra?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $R_T = 6 370 \text{ km}$
 $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

La distància al centre de la Terra és $r = R_T + h = 16 370 \text{ km}$

Aplicant la segona llei de Newton:

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \omega^2 r$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 20 799 \text{ s} = 5 \text{ h } 46 \text{ min } 39 \text{ s}$$

28. Si un satèl·lit vol reduir el radi d'òrbita entorn d'un planeta, l'energia cinètica ha d'augmentar o disminuir? Justifiqueu la resposta.

Per a un satèl·lit en òrbita entorn un planeta de massa M , la

seva velocitat ve donada per: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

En conseqüència, si es vol reduir el radi de l'òrbita r , cal augmentar la velocitat del satèl·lit, és a dir, cal augmentar la seva energia cinètica.

29. Un satèl·lit artificial de massa 1 500 kg descriu una trajectòria circular a una distància de 630 km respecte de la superfície terrestre. Calculeu:

- a) El període del satèl·lit.

$$r = R_T + h = 7 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 5,82 \cdot 10^3 \text{ s} \rightarrow 1,62 \text{ h}$$

- b) L'energia cinètica i l'energia mecànica del satèl·lit en òrbita.

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} \rightarrow E_c = 4,29 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E = U + E_c = -G \frac{M_T m}{r} + \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} \rightarrow$$

$$E = -4,29 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

- c) L'energia mínima que caldria comunicar al satèl·lit en òrbita perquè s'allunyés indefinidament de la Terra.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $R_T = 6 370 \text{ km}$
 $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

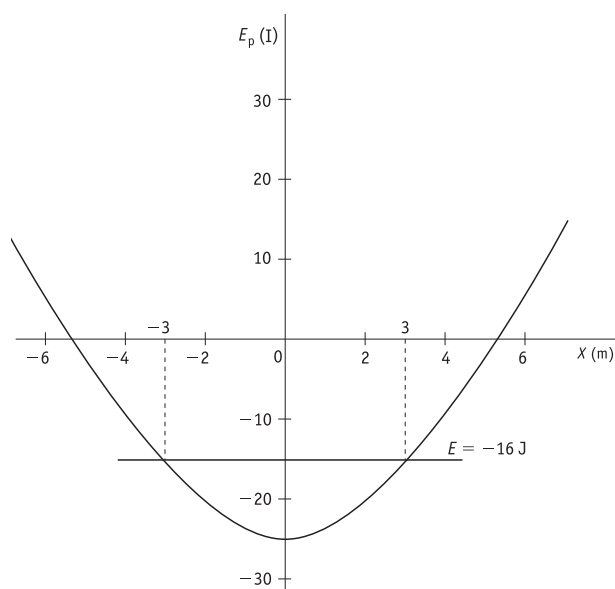
$$E_{\text{adicional mínima}} + E = E(\infty) = 0 \rightarrow$$

$$E_{\text{adicional mínima}} = 4,29 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

30. Un cos de massa 0,5 kg és sotmès a un camp d'energia potencial gravitatòria $E_p = (x^2 - 25)$ J. Calculeu:

a) Si la massa té una energia mecànica de -16 J, en quin interval es pot moure?

Representem gràficament l'energia potencial en funció de la distància i establim un nivell d'energia mecànica de -16 J:



$$\left. \begin{array}{l} E = x^2 - 25 \\ E = -16 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 25 = -16 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{9} = \pm 3 \text{ m} \rightarrow [-3, 3]$$

b) Quina és la velocitat màxima i en quin punt es dona aquesta velocitat?

La velocitat màxima tindrà lloc quan passi per l'origen de coordenades, ja que l'energia potencial és mínima i, per tant, l'energia cinètica és màxima:

$$E = E_c + E_p \rightarrow -16 = -25 + E_c \rightarrow E_c = 9 \text{ J}$$

Que correspon a una velocitat de:

$$9 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v^2 \rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

31. Com són les superfícies equipotencials d'una massa puntual? Dibuixeu-les.

Atès que el potencial depèn inversament de la distància, les superfícies equipotencials són esferes concèntriques amb la massa puntual.

32. Demostreu que el vector intensitat de camp és perpendicular a les superfícies equipotencials.

El diferencial de potencial és $dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r}$. Si prenem $d\vec{r}$ sobre la superfície, $dV = 0$. Com que la intensitat de camp no és nul·la, ha de ser perpendicular a la superfície, de manera que el producte escalar doni zero.

33. És correcte afirmar que el vector intensitat de camp gravitatori va en el sentit en què augmenta el potencial?

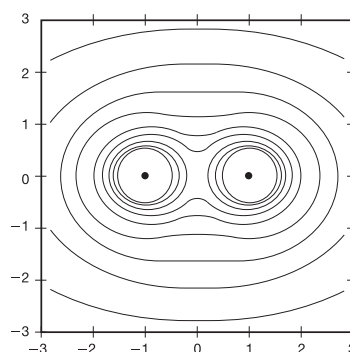
Justifiqueu la resposta.

No és correcte perquè la relació entre la direcció d'augment de potencial i el vector intensitat ve donada per: $dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r}$. Considerant un diferencial de camí en el mateix sentit que el camp, resulta una disminució del potencial.

Activitats finals

Qüestions

1. Dibuixeu les línies de camp gravitatori de dues masses iguals que es troben a una certa distància.



2. Definiu el concepte d'intensitat de camp gravitatori i apliqueu-lo en un punt de la superfície de la Terra.

La intensitat del camp gravitatori en un punt és la força que experimenta una partícula de massa unitat situada en aquest punt.

En el cas d'una massa situada a la superfície de la Terra, és la força pes d'una massa d'1 kg.

3. a) Quina diferència hi ha entre la massa i el pes?

Entenem la massa com la quantitat de matèria de què el cos està format, i sol ser invariable. El pes és la força amb què la Terra o un planeta atraiu el cos. Quan la massa es mou a velocitats properes a la de la llum, aleshores la massa varia i cal tenir en compte els efectes relativistes.

- b) Pot ser que una persona no tingui massa?

No, no és possible. Qualsevol cos té una certa massa.

- c) I pes?

Una massa situada en un camp gravitatori nul no rep cap força i entenem que el seu pes és nul.

Justifiqueu les respostes.

4. A la Lluna, un bloc pesa 50 N. Pesa igual a la Terra? La massa varia d'un lloc a l'altre?

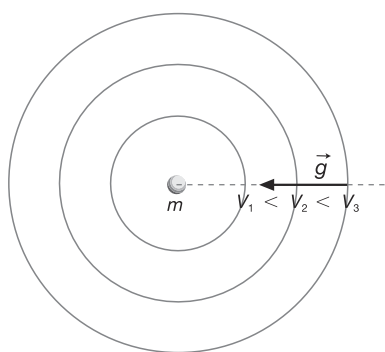
No. A la Terra pesa més ja que la gravetat és més gran.

Si no tenim en compte els efectes relativistes, la massa és invariable.

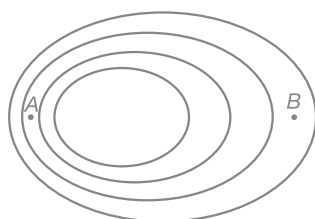
5. Enuncieu les lleis de Kepler.

Vegeu *Llei de la gravitació universal*.

6. Dibuixeu les línies de camp gravitatori d'una massa puntual. Indiqueu el vector $\vec{g}$ en un punt qualsevol. Dins d'una mateixa línia de camp indiqueu dos punts A i B i especifiqueu quins dels dos té més potencial.



7. Observeu les superfícies equipotencials representades a la figura.



En quin dels dos punts indicats, A o B, la intensitat de camp és més gran? Justifiqueu la resposta.

La relació entre el camp gravitatori i el potencial ve donada per l'expressió $\frac{dV}{dr} = -\vec{g}$.

Com que per una distància r determinada, en A hi ha més variació de potencial que en B, ja que hi ha més densitat de línies equipotencials, aleshores deduïm que la intensitat de camp gravitatori és més gran en A que en B.

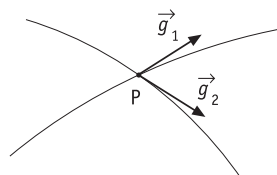
8. Pot ser nul el potencial en un punt i no ser-ho la intensitat de camp? Raoneu la resposta amb un exemple.

En el cas del camp gravitatori, el potencial en un punt és nul quan es troba a una distància infinita de la massa, i, en aquesta situació, el camp gravitatori també és nul. Les expressions següents justifiquen aquesta conclusió:

$$\left. \begin{aligned} g &= G \frac{m}{r^2} \\ V &= -G \frac{m}{r} \end{aligned} \right\}$$

Per tant, no és possible que es doni la situació de la qüestió.

9. Es poden tallar dues línies de camp gravitatori?

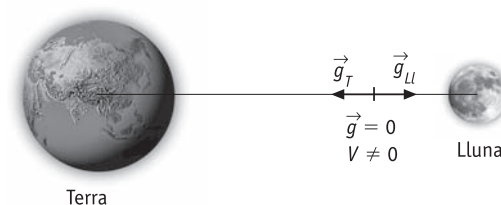


No és possible.

En la figura hem suposat que dues línies de camp es tallen en un punt P. En aquesta situació, en P tindríem dues intensitats diferents que actuen sobre el mateix cos.

10. Pot ser nul·la la intensitat de camp en un punt i no ser-ho el potencial? Raoneu la resposta amb un exemple.

Sí que és possible. Considerem, per exemple, la Terra i la Lluna.



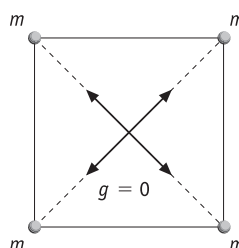
Si negligim els efectes dels altres astres, podem considerar, segons indica la figura, un punt del segment que uneix la Terra i la Lluna on $\vec{g} = 0$ i $V \neq 0$.

11. La velocitat d'escapament d'un planeta depèn:

- De la massa del cos que surt.
- De la massa del planeta.
- Del radi del cos que surt.

L'única opció correcta és la b): la velocitat d'escapament d'un planeta depèn de la massa del planeta. A més, també depèn del radi del planeta però no depèn ni del radi del cos que vol escapar-se ni de la seva velocitat.

12. Quin és el camp gravitatori en el centre d'un quadrat si en els vèrtexs hi ha quatre cossos de la mateixa massa m?



Els camps gravitatoris de les parelles de masses situades a vèrtexs oposats s'anul·len perquè tenen igual mòdul i direcció i van en sentits contraris.

13. Quan separem dues masses, l'energia potencial:

- a) Augmenta.
b) Disminueix.
c) No varia.

L'opció correcta és la a), la seva energia potencial gravitatòria augmenta perquè és negativa i el seu valor absolut disminueix en augmentar la distància entre les dues masses.

14. Supposeu que aterreu en un planeta que té la mateixa densitat que la Terra, però un radi 5 vegades més gran. Quant pesàrieu en aquest planeta en comparació del que peseu a la Terra?

Suposem que R és el radi de la Terra, i ρ la seva densitat. En mòdul, el meu pes a la Terra seria:

$$p_{\text{Terra}} = G \frac{Mm}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho m}{R^2} = \frac{4}{3} G \pi \rho m R$$

En un planeta de la mateixa densitat i radi 5 R , el meu pes seria:

$$p_{\text{planeta}} = G \frac{Mm}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi (5R)^3 \rho m}{R^2} = 5 \cdot \frac{4}{3} G \pi \rho m R = 5 p_{\text{Terra}}$$

15. Calculeu el temps aproximat que trigaria a completar la seva òrbita al voltant del Sol un planeta del Sistema Solar que es trobés a una distància mitjana del Sol tres vegades més gran que la distància mitjana de la Terra al Sol.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T_0^2}{R_0^3} \rightarrow T^2 = \frac{(3R_0)^3 T_0^2}{R_0^3} = 3^3 \cdot T_0^2 \rightarrow$$

$$T = \sqrt{27} \cdot T_0 = 5,2 \text{ anys}$$

16. Quan un coet cau cap a la Terra, l'energia potencial augmenta o disminueix? I l'energia cinètica?

L'energia potencial entre dos cossos és:

$$E_p = -G \frac{m m'}{r}$$

Si suposem que negligim el fregament de l'atmosfera, tenim un sistema conservatiu.

Si el coet cau cap a la Terra, l'energia potencial disminueix i, en conseqüència, l'energia cinètica augmenta.

17. Un pèndol funciona com a rellotge. Quan s'allunya de la Terra, s'avança o s'endarrereix?

En augmentar la distància a la Terra, la intensitat del camp gravitatori disminueix. Tenint en compte l'expressió que relaciona el període amb la intensitat de camp gravitatori i la longitud d'un pèndol senzill:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Veiem que en disminuir la intensitat de camp augmenta el període i, per tant, el rellotge s'endarrereix.

18. Quan un satèl·lit augmenta el radi d'òrbita al voltant de la Terra, el període augmenta o disminueix? Raoneu la resposta.

Considerem la llei de Kepler, $T^2 = Kr^3$. En augmentar el radi, augmenta el període seguint la condició següent:

$$T = \sqrt{Kr^3}$$

19. Què li succeeix a un satèl·lit artificial quan gira al voltant de la Terra si posa momentàniament en funcionament un dels coets per augmentar la velocitat en sentit tangencial?

Suposem que inicialment, el satèl·lit té una energia mecànica E_1 , de manera que l'energia cinètica i el potencial compleixen la relació:

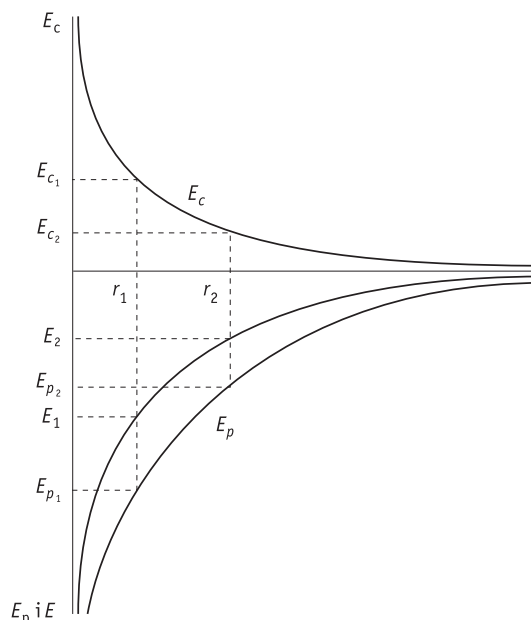
$$E_1 = E_{c1} + E_{p1}$$

L'activació del coet farà augmentar l'energia mecànica a un valor més alt, E_2 :

$$E_2 = E_{c2} + E_{p2}$$

En la figura observem que l'energia cinètica disminueix i que l'energia potencial augmenta.

20. Un hipotètic planeta té la mateixa massa que la Terra i un radi doble.



a) Quant val la gravetat a la superfície d'aquest planeta?

$$g_0 = -G \frac{M}{R^2}$$

$$g = -G \frac{M}{(2R)^2} = \frac{g_0}{4}$$

La gravetat en el hipotètic planeta es redueix a una quarta part de la de la Terra.

- b) Si traslladem al planeta un rellotge de pèndol que a la Terra estava perfectament ajustat, s'avança o s'endarrereix? Per què?

Segons l'expressió $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ deduem que en disminuir la gravetat augmenta el període i, per tant, s'endarrereix.

21. Considerem un meteorit que procedeix de l'espai interestel·lar i que inicia la caiguda sobre la Terra sense energia cinètica. Amb quina velocitat incidiria sobre la superfície si no existís fregament amb l'atmosfera?

Podem considerar que el meteorit té una energia mecànica zero en l'espai interestel·lar. En arribar a la superfície de la Terra, tenim que:

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M m}{R_T} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

que és, justament, la velocitat d'escapament.

22. Si la densitat de la Terra augmentés sense que en variés el radi, la velocitat d'escapament hauria de ser més gran o més petita?

Si augmentés la densitat, augmentaria la massa de la Terra. Per tant, la velocitat d'escapament hauria de ser més gran, segons indica l'expressió següent:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

23. Quan un satèl·lit disminueix la seva energia cinètica, tendeix a apropar-se a la Terra o a allunyar-se'n?

Si disminueix l'energia cinètica, ha d'augmentar l'energia potencial, ja que suposem que el camp és conservatiu.

De l'expressió de l'energia potencial, $E_p = -G \frac{m m'}{r}$, tenim que la distància ha d'augmentar.

24. Si llancem un cos cap amunt amb la mateixa velocitat a la superfície de la Terra i a la superfície de la Lluna, assoleixen la mateixa altitud?

De l'expressió del camp gravitatori, $g = G \frac{M}{R^2}$, es demostra que la intensitat del camp gravitatori de la Terra és més gran que el de la Lluna. Per tant, en llançar un cos verticalment cap amunt, a la Lluna assoleix més altura que a la Terra.

25. Un pèndol de rellotge funciona correctament a la Terra. Si el portem a la Lluna, funcionarà correctament?

No, ja que com hem comentat en la qüestió anterior, la intensitat de camp a la Lluna és menor que a la Terra.

El període d'un pèndol és:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Per tant, a la Lluna el pèndol del rellotge s'endarrereix.

26. Dos satèl·lits A i B tenen la mateixa massa i giren al voltant de la Terra en òrbites circulars, de manera que el radi de l'òrbita de A és més gran que el radi de l'òrbita de B.

- a) Quin dels dos satèl·lits té més energia cinètica?

$$G \frac{m M_0}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} G \frac{m M_0}{r} > 0$$

$$r_A > r_B \rightarrow E_{cA} < E_{cB}$$

- b) Quin dels dos satèl·lits té més energia mecànica?

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M_0}{r} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) G \frac{m M_0}{r} = -E_c$$

$$\rightarrow E_{mA} > E_{mB}$$

27. En els vèrtexs d'un triangle equilàter de longitud l hi ha tres masses iguals m . Quin treball és necessari per desplaçar una de les masses al mig del costat oposat al vèrtex que ocupava.

Energia potencial inicial de la massa desplaçada:

$$G \frac{-2 G m^2}{l}$$

$$\text{Energia potencial final de la massa desplaçada: } E_{p2} = \frac{-2 G m^2}{l}$$

$$\text{Si restem: } W = E_{p2} - E_{p1} = \frac{-2 G m^2}{l}$$

28. Quin treball es realitza sobre una massa que es desplaça per una superfície equipotencial? Justifiqueu la resposta.

El treball realitzat per la força gravitatòria sobre una massa m que es mou d'A a B ve donat per: $W_{A \rightarrow B} = -m (V_B - V_A)$, d'on es dedueix que el treball sobre una massa que es desplaça sobre una superfície equipotencial ($V = \text{constant}$) és nul.

□ Problemes

1. La intensitat de camp gravitatori en la superfície d'un planeta és $1,62 \text{ m/s}^2$. Un cos que pesa 8000 N a la superfície de la Terra, quant pesarà en aquest planeta?

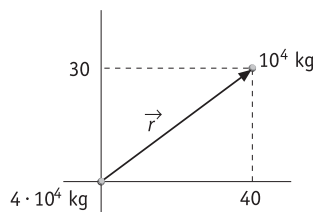
Dades: $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

El pes és $P = mg$. Per tant, la relació dels pesos al planeta P_p i a la Terra P_T serà

$$\frac{P_p}{P_T} = \frac{g_p}{g_T}$$

Substituint dades s'obté $P_p = 1322,45 \text{ N}$.

2. Calculeu la força, en mòdul i vectorialment, que rep un cos de massa 10 000 kg situat al punt (40, 30) quan a l'origen hi ha una massa de 40 000 kg.



Determinem el radi de posició de la massa de 10^4 kg respecte de l'origen de coordenades:

$$\vec{r} = (40, 30) \rightarrow r = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ m}$$

Aplicuem la llei de la gravitació universal:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u} \rightarrow \vec{F} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^4}{50^2} \cdot \frac{(40, 30)}{50} = \\ &= (-8,54 \cdot 10^{-6} \vec{i} - 6,403 \cdot 10^{-6} \vec{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

En mòdul:

$$F = \sqrt{(-8,54 \cdot 10^{-6})^2 + (-6,40 \cdot 10^{-6})^2} = 1,067 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

3. Suposem que es descobreix un nou planeta que gira entorn del Sol i s'observa que triga $9 \cdot 10^9$ s a completar la seva òrbita. A quina distància es trobaria del Sol?

Dades: radi d'òrbita de la Terra entorn del Sol: $1,496 \cdot 10^{11}$ m.

Aplicant la tercera llei de Kepler al planeta i a la Terra:

$$\left(\frac{T_p}{T_T}\right)^2 = \left(\frac{r_p}{r_T}\right)^3$$

i substituint dades:

$$r_p = r_T \sqrt[3]{\left(\frac{T_p}{T_T}\right)^2} = 6,48 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

4. Calculeu la intensitat de camp gravitatori que genera el Sol a la seva superfície. Quant pesaria una massa de 5 kg a la superfície del Sol?

Dades: $M_S = 1,98 \cdot 10^{30}$ kg; $R_S = 6,96 \cdot 10^8$ m;
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²

Determinem en mòdul la intensitat del camp gravitatori a la superfície del Sol:

$$g = G \frac{M}{R^2} \rightarrow g = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{(6,96 \cdot 10^8)^2} = 274 \text{ m/s}^2$$

El pes, en mòdul, d'una massa de 5 kg seria:

$$p = mg = 5 \cdot 274 = 1370 \text{ N}$$

5. Un astronauta pesa 700 N a la Terra. En arribar al planeta Venus es pesa. Si descomptem el pes de l'equip i els accessoris, el seu pes és de 600 N. Tenint en compte que el diàmetre de Venus és gairebé igual al de la Terra, calculeu la massa d'aquest planeta.

Dades: $M_T = 6,37 \cdot 10^6$ kg; $g_T = 9,8$ m/s²

Calculem la massa de l'astronauta:

$$m = \frac{p}{g} = \frac{700}{9,8} = 71,4 \text{ kg}$$

Calculem la intensitat de gravetat en el planeta Venus:

$$g = \frac{p}{m} = \frac{600}{71,4} = 8,4 \text{ m/s}^2$$

El mòdul de la intensitat de camp que genera un planeta ve donat per l'expressió:

$$g = G \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{8,4 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,1 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

6. El període de revolució de la Lluna al voltant de la Terra és de 27,31 dies, amb un radi de $3,84 \cdot 10^8$ m. Calculeu la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra.

Dades: $R_T = 6370$ km

En girar la Lluna al voltant de la Terra, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m_L \omega^2 r = G \frac{m_L M_T}{r^2} \rightarrow \omega^2 = G \frac{M_T}{r^3}$$

Tenint en compte que la velocitat angular es pot posar en funció del període, tenim que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{G \frac{M_T}{r^3}}} \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M_T}{(3,84 \cdot 10^8)^3}}} = 27,31 \cdot 24 \cdot 3600$$

Però la intensitat de camp a la superfície de la Terra és, en mòdul:

$$g = G \frac{M}{R_T^2}$$

Combinant amb l'expressió anterior:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M_T}{(3,84 \cdot 10^8)^3} \cdot \frac{R_T^2}{R_T^2}}} = 27,31 \cdot 24 \cdot 3600$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\frac{g}{(3,84 \cdot 10^8)^3} \cdot R_T^2}} = 27,31 \cdot 24 \cdot 3600 \rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\frac{g}{(3,84 \cdot 10^8)^3} \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}} = 27,31 \cdot 24 \cdot 3600$$

$$g = \frac{(2\pi)^2 \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}{(27,31 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

7. A quina distància del centre de la Terra una massa d'1 kg pesa 1 N?

Dades: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Apliquem la llei de la gravitació universal en mòdul:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 1}{1}} = 1,997 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Si el radi de la Terra és $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, correspondria aproximadament a 3 vegades el radi terrestre.

8. Si l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart és $3,7 \text{ m/s}^2$ i el seu diàmetre és de $6,8 \cdot 10^6 \text{ m}$, quina és la seva massa?

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de Mart és:

$$g = G \frac{M}{R_M^2} \rightarrow 3,7 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M}{(3,4 \cdot 10^6)^2} \rightarrow$$

$$M = 6,41 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

9. Determineu la intensitat de camp g de la Terra a dos radis terrestres ($2 R_T$) de distància tenint en compte que la g_0 en la superfície de la Terra és $9,8 \text{ m/s}^2$.

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra és:

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} \rightarrow g = G \frac{M}{(3R_T)^2} \cdot \frac{R_T^2}{R_T^2} = \frac{g_0}{(3R_T)^2} \cdot R_T^2 = \frac{g_0}{9} = \frac{9,8}{9} = 1,09 \text{ m/s}^2$$

10. Un cos pesa 12 N a la superfície d'un planeta de massa 10^{23} kg i de radi 10^6 m . Calculeu quant pesa a la superfície de la Terra ($g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$).

Apliquem la llei de la gravitació universal en mòdul:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \rightarrow 12 = G \frac{m \cdot 10^{23}}{(10^6)^2} \rightarrow m = 1,799 \text{ kg}$$

A la superfície de la Terra, el pes seria:

$$p = mg = 1,799 \cdot 9,8 = 17,63 \text{ N}$$

11. Llançem un cos de massa 8 kg des de la superfície de la Lluna amb una velocitat inicial de 20 m/s.

Calculeu l'alçada màxima, el temps d'anada i tornada i l'energia cinètica quan ha pujat 100 m.

Dades: $M_{LL} = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $R_{LL} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$

Amb les dades que tenim, podem calcular la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Lluna:

$$g = G \frac{M}{r^2} = G \cdot \frac{7,34 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,617 \text{ m/s}^2$$

Com que la velocitat de llançament del cos és petita, podem considerar que la intensitat de camp gravitatori és pràcticament constant. Aleshores, es tracta d'un moviment uniformement variat. Calculem l'alçada màxima:

$$v^2 = v_0^2 + 2gx \rightarrow 0 = 20^2 - 2 \cdot 1,62 \cdot x \rightarrow x = 123,46 \text{ m}$$

Calculem el temps d'anada i tornada:

$$v = v_0 + gt \rightarrow t = \frac{20}{1,62} \cdot 2 = 24,7 \text{ s}$$

Calculem, fent plantejaments energètics, l'energia cinètica:

$$E_c = E_c' + E_p' \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 20^2 = E_c' + 8 \cdot 1,617 \cdot 100 \rightarrow$$

$$E_c' = 306,4 \text{ J}$$

12. Si la densitat mitjana de la Terra fos el doble de la que té ara, quin seria el valor de g a la superfície de la Terra si la massa no variés?

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra és:

$$g_0 = G \frac{M}{R_T^2} = G \frac{\rho_0 \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2} = G \rho_0 \frac{4}{3} \pi R_T$$

Si la massa és la mateixa, la relació entre la densitat i el radi ha de complir:

$$\rho_0 \frac{4}{3} \pi (R_T)^3 = 2\rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow R = \frac{R_T}{\sqrt[3]{2}}$$

Per tant, en aquest cas, el valor de la gravetat seria:

$$g = G \frac{M}{\left(\frac{R_T}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{4} g_0 = 15,6 \text{ m/s}^2$$

13. El radi d'un planeta és m vegades més gran que el de la Terra i la seva densitat és n vegades més gran que la de la Terra. Quina és l'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta?

En mòdul, la intensitat de camp gravitatori d'un planeta és:

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{n \rho_0 \frac{4}{3} \pi (m R_T)^3}{(m R_T)^2} = m n g_0$$

14. Un cos pesa 49 N a la superfície de la Terra i 5 N en una altura determinada de la superfície. Calculeu la massa del cos i l'altura.

Dades: $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$; $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

La variació de la intensitat gravitatòria terrestre amb l'altura és:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Si multipliquem per la massa:

$$\frac{m g}{m g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

Substituint valors, obtenim que $m = 5 \text{ kg}$ i $h = 1,359 \cdot 10^7 \text{ m} \rightarrow 2,13 R_T$

15. a) Calculeu el potencial en la superfície d'una massa esfèrica de valor 1000 kg i de densitat $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$.

Prèviament, determinem el radi del cos esfèric:

$$M = \rho V \rightarrow 10^3 = 7,8 \cdot 10^3 V \rightarrow V = 0,1282 \text{ m}^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow 0,1282 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rightarrow r = 0,3128 \text{ m}$$

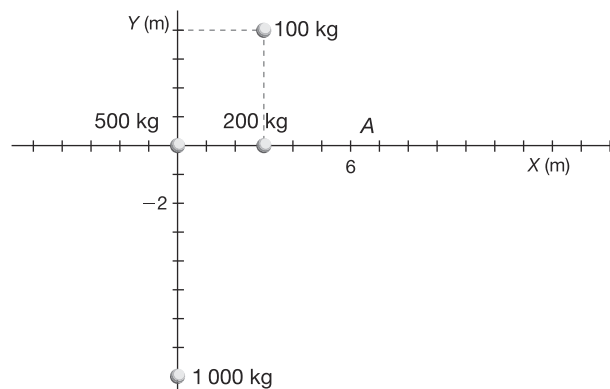
El potencial a la superfície de l'esfera és:

$$V = -G \frac{m}{r} = -G \cdot \frac{10^3}{0,3128} = -2,13 \cdot 10^{-7} \text{ J/kg}$$

- b) En quin punt el potencial és màxim?

A una distància molt gran de l'esfera, el potencial tendeix a zero. Per tant, a una distància infinita, el valor és nul.

16. Calculeu el potencial i la intensitat de camp gravitatori en el punt A creat per una distribució de masses com la representada a la figura.



Prèviament, calculem els vectors de posició de les masses respecte del punt A:

$$\vec{r}_1 = 6 \vec{i} \rightarrow r_1 = 6$$

$$\vec{r}_2 = 3 \vec{i} \rightarrow r_2 = 3$$

$$\vec{r}_3 = 3 \vec{i} - 4 \vec{j} \rightarrow r_3 = 5$$

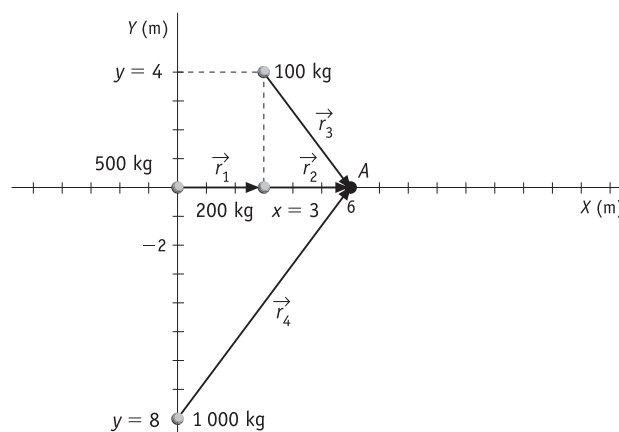
$$\vec{r}_4 = 6 \vec{i} + 8 \vec{j} \rightarrow r_4 = 10$$

El potencial en A de la distribució de masses és:

$$V = -G \left(\frac{500}{6} + \frac{200}{3} + \frac{100}{5} + \frac{1000}{10} \right) = -1,8 \cdot 10^{-8} \text{ J/kg}$$

Calculem la intensitat de camp gravitatori:

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -G \left(\frac{500}{36} \vec{i} + \frac{200}{9} \vec{i} + \frac{100}{25} \cdot \frac{(3 \vec{i} - 4 \vec{j})}{5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1000}{10} \cdot \frac{(6 \vec{i} + 8 \vec{j})}{10} \right) = \\ &= (-2,97 \cdot 10^{-9} \vec{i} - 3,2 \cdot 10^{-10} \vec{j}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$



17. Desplacem una massa de 100 kg que es troba en una superfície equipotencial de -90 J/kg fins una altra de -70 J/kg . Quin treball és necessari per fer aquest desplaçament?

El treball realitzat per la força externa és:

$$W = \Delta E_p = m(v_2 - v_1) = 100 \cdot (-70 - (-90)) = 2000 \text{ J}$$

18. Quina és l'energia necessària per portar una massa de 40 kg des de la superfície de la Terra fins a:

a) 100 m d'altura.

Com que es tracta d'una alçada petita, podem considerar que la intensitat de la gravetat és gairebé constant i de valor $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$. El treball necessari per portar-la a una alçada de 1000 m és:

$$W_{\text{forces externes}} = \Delta E_p = mgh = 40 \cdot 9,8 \cdot 10^3 = 3,92 \cdot 10^4 \text{ J}$$

b) 1000 km d'altura.

Quan les distàncies són grans, hem de tenir en compte la variació de la intensitat de camp gravitatori. Apliquem el principi de conservació de l'energia mecànica:

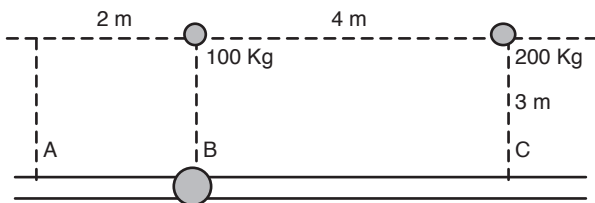
$$W_{\text{forces externes}} = \Delta E_p = -GM_T m \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right)$$

Tenint en compte que $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$, podem escriure l'expressió anterior d'aquesta manera:

$$\begin{aligned} W_{\text{forces externes}} &= -GM_T m \frac{R_T^2}{R_T^2} \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) = \\ &= -g_0 m R_T^2 \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) = 3,39 \cdot 10^8 \text{ J} \end{aligned}$$

Dades: $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ i $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$

19. Deixem anar lliurement una massa de 4 kg des del punt B. Només pot circular (sense fricció) pel carril.



a) Anirà cap a la dreta o cap a l'esquerra? Per què?

Anirà cap a la dreta i passarà per C.

b) Amb quina velocitat arribarà als punts A i C, tenint en compte la resposta anterior?

Calculem els potencials de les masses fixes en els punts B i C:

$$\begin{aligned} v_B &= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100}{3} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{200}{5} = \\ &= -4,89 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_C &= -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100}{5} - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{200}{3} = \\ &= -5,78 \cdot 10^{-9} \text{ J/kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{sistema}} &= -m(v_C - v_B) = \\ &= \Delta E_c \rightarrow -4(-5,78 \cdot 10^{-9} + 4,89 \cdot 10^{-9}) = \\ &= 3,56 \cdot 10^{-9} \text{ J} \end{aligned}$$

$$3,56 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{2} 4 v^2 \rightarrow v = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

20. Un cos es troba a 500 km d'altura. Si el deixem anar lliurement, amb quina velocitat impacta a la superfície de la Terra, si negligim el fregament amb l'aire?

Dades: $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$; $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

Plantegem la situació de la mateixa manera que en l'apartat b) de l'activitat 18:

$$\begin{aligned} E_p &= E_p' + E_c' \\ -GM_T m \left(\frac{1}{R_T + h} \right) &= -GM_T m \frac{1}{R_T} + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

Simplificant i tenint en compte que $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$, podem escriure el resultat anterior de la manera següent:

$$-g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T + h} \right) = -g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T} \right) + \frac{1}{2} v^2$$

Substituint valors, obtenim que $v = 3,015 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

21. Un cos celeste de radi 1 km i densitat $7,5 \text{ g/cm}^3$ es mou en l'espai interestel·lar, on g és zero. Quina és la velocitat d'escapament d'un cos que es troba a la superfície del meteorit?

Dades: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$

Recordem que la velocitat d'escapament d'un cos celeste és:

$$v = \sqrt{\frac{2 G m}{r}}$$

Tenint en compte que $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, la velocitat d'escapament es pot escriure com:

$$v = \sqrt{\frac{2 G m}{r}} = r \sqrt{\frac{8}{3} G \rho \pi} = 2,047 \text{ m/s}$$

22. El Meteosat és un satèl·lit geoestacionari, és a dir, que gira en el pla equatorial amb la mateixa velocitat angular que la Terra. A quina distància de la superfície es troba?

Calculem la velocitat angular de la Terra, que és la mateixa que la del satèl·lit:

$$\omega = \frac{2 \pi}{1 \text{ dia}} = \frac{2 \pi}{24 \cdot 3600} = 7,2722 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

En girar el satèl·lit al voltant de la Terra, la força centrípeta ha d'igualar la força gravitatòria:

$$m \omega^2 r = G \frac{m M_T}{r^2} \rightarrow \omega^2 = G \frac{M_T}{r^3} \rightarrow$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} = 4,225 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Per tant, l'altura on es troba el satèl·lit és:

$$h = r - R_T = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega^2}} - R_T =$$

$$= 4,225 \cdot 10^7 - 6,38 \cdot 10^6 = 3,6 \cdot 10^7 \text{ m} \rightarrow 36.000 \text{ km}$$

- 23. Un satèl·lit de massa 250 kg gira en una òrbita geoestacionària. Calculeu:**

a) La velocitat del satèl·lit.

En el problema anterior hem deduït que $\omega^2 = G \frac{M_T}{r^3}$.

Si tenim en compte que $v = \omega r \rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$.

Substituint valors:

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = 3,07 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) El radi de l'òrbita.

El radi de l'òrbita és el que hem trobat en el problema anterior:

$$r = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

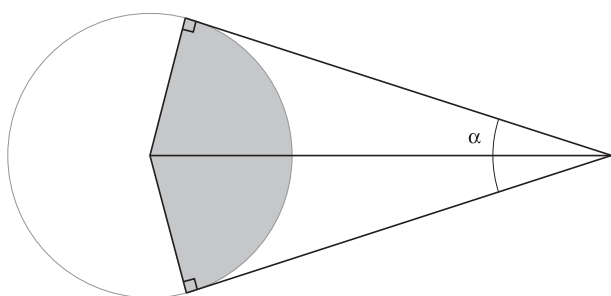
c) L'angle amb què es veu la Terra des del satèl·lit.

Dades: $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Si observem la figura, l'angle d'observació és:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{6,38 \cdot 10^6}{4,225 \cdot 10^7} = 17^\circ 22'$$



- 24. Dues masses de 100 kg i 500 kg estan separades una distància de 10 m. Si separem la massa de 500 kg fins a 20 m i la deixem anar lliurement, amb quina velocitat torna a passar pel lloc inicial?**

Com que es tracta d'un sistema conservatiu, podem aplicar el principi de conservació de l'energia mecànica:

$$\begin{aligned} \Delta E_c + \Delta E_p &= 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p = \\ &= -\left(-G \frac{100 \cdot 500}{10} + G \frac{100 \cdot 500}{20}\right) = \\ &= 1,6675 \cdot 10^{-7} \text{ J} \end{aligned}$$

Per tant, la velocitat és:

$$1,6675 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot v^2 \rightarrow v = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

- 25. Calculeu la intensitat de la gravetat a la superfície del planeta Mart, la velocitat d'escapament i el seu període al voltant del Sol.**

Dades: $M_M = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$

$$R_M = 3,32 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$R_{S-M} = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

La intensitat en mòdul del camp gravitatori a la superfície del planeta Mart és:

$$g = G \frac{m}{R^2} \rightarrow g = 3,9 \text{ m/s}^2$$

Calculem la velocitat d'escapament:

$$v = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} = 5,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

I el període de rotació al voltant del Sol:

$$\omega^2 = G \frac{M_M}{r^3} \rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_M}} = 1,88 \text{ anys}$$

- 26. Les relacions aproximades entre les masses i els radis de la Terra i la Lluna són, respectivament, $M_T = 81 M_L$; $R_T = 3,7 R_L$:**

a) Quant val l'acceleració de la gravetat a la superfície de la Lluna?

La relació entre les intensitats de la gravetat a la Lluna i a la Terra és: $\frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2$. Substituint dades $g_L = 1,66 \text{ m/s}^2$

b) A quina altura sobre la superfície de la Lluna l'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa m és la quarta part del seu valor a la superfície? No considereu els efectes de l'atracció gravitatòria terrestre.

Dades: $R_L = 1.740 \text{ km}$; $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$

Ha de ser $R_L + h = 4 R_L$. Per tant $h = 3 R_L = 5.220 \text{ km}$.

27. Un satèl·lit artificial de 200 kg gira entorn de la Terra amb una radi geoestacionari en el pla equatorial. Calculeu la força d'atracció que rep de la Terra i la seva energia cinètica.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

El període T i el radi r de rotació estan relacionats per:

$$r^3 = GM_T \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2$$

Aïllant r obtenim $r = 4,225 \cdot 10^7 \text{ m}$.

La força d'atracció és:

$$F = G \frac{M_T M}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{(4,225 \cdot 10^7)^2} = 44,70 \text{ N}$$

L'energia cinètica és:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r^2 = 9,44 \cdot 10^8 \text{ J}$$

28. Un satèl·lit artificial de massa 2000 kg està en òrbita circular al voltant de la Terra a una altura de $3,6 \cdot 10^6 \text{ m}$ sobre la superfície terrestre. Determineu:

- a) La relació entre la intensitat del camp gravitatori a aquesta altura i el seu valor a la superfície de la Terra.

La intensitat de la gravetat a una altura h sobre la superfície de la Terra val:

$$g(h) = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Per tant, la relació entre les dues intensitats de la gravetat és:

$$\frac{g(h)}{g_0} = \left(\frac{R_T + h}{R_T} \right)^{-2} = \left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-2} = \left(1 + \frac{3,6 \cdot 10^6}{6,38 \cdot 10^6} \right)^{-2} = 0,409$$

- b) Representeu la força que actua sobre el satèl·lit i calculeu-ne el mòdul. Sobre quin cos actuarà la força de reacció corresponent?

La intensitat de la gravetat a l'òrbita del satèl·lit val $g = 0,409 g_0 = 4 \text{ N/kg}$.

La força és $F = mg = 2000 \text{ kg} \cdot 4 \text{ N/kg} = 8000 \text{ N}$

La força de reacció actua sobre la Terra.

- c) Quant valdrà la velocitat del satèl·lit?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$$R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}; M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6,38 + 3,6) \cdot 10^6}} = 6,32 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

29. Júpiter és l'objecte més massic del sistema solar després del Sol. La seva òrbita al voltant del Sol es pot considerar circular, amb un període d'11,86 anys. Determineu:

- a) La distància de Júpiter al Sol.

$$T = 11,86 \text{ anys} \cdot 365 \text{ dies/any} \cdot 24 \text{ h/dia} \cdot 3600 \text{ s/h} = 3,74 \cdot 10^8 \text{ s}$$

$$G \left(\frac{Mm}{r^2} \right) = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \rightarrow$$

$$r^3 = GM \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \rightarrow r = 7,79 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

- b) La velocitat de Júpiter en la seva òrbita al voltant del Sol.

$$v = \omega r = \left(\frac{2\pi}{T} \right) r \rightarrow v = 1,3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

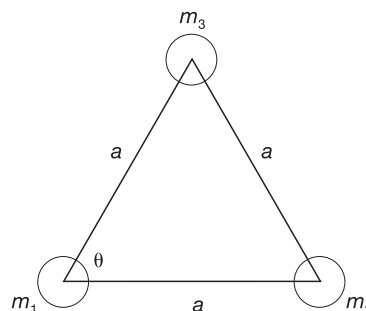
- c) L'energia mecànica total (cinètica i potencial) de Júpiter.

Dades: massa de Júpiter $m = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$; massa del Sol $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; constant de la gravitació universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{Mm}{r} \rightarrow E = -1,63 \cdot 10^{35} \text{ J}$$

30. Tres masses puntuals, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ i $m_3 = 3 \text{ kg}$, estan situades als vèrtexs d'un triangle equilàter de costat $a = \sqrt{3} \text{ m}$, en una regió de l'espai on no hi ha cap altre camp gravitatori que el creat per les tres masses. Determineu:

- a) El treball que s'ha fet per portar les masses des de l'infinít fins a la seva configuració actual (aquest treball correspon a l'energia potencial gravitatòria de la configuració).



$$W = -G \left(\frac{m_1 m_3}{a} + \frac{m_1 m_2}{a} + \frac{m_2 m_3}{a} \right)$$

$$W = -4,2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

- b) El potencial gravitatori en el punt mitjà del segment que uneix m_1 i m_3 .

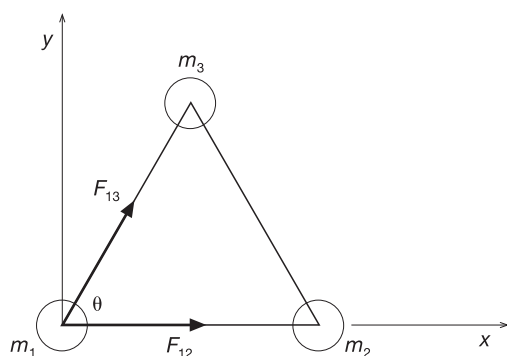
$$V = -G \left(\frac{m_1}{\frac{a}{2}} + \frac{m_3}{\frac{a}{2}} + \frac{m_2}{a \sin \theta} \right)$$

Si $\theta = 30^\circ$:

$$V = -3,7 \cdot 10^{-10} \text{ J/kg}$$

- c) El mòdul de la força d'atracció gravitatòria que experimenta la massa m_1 .

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$



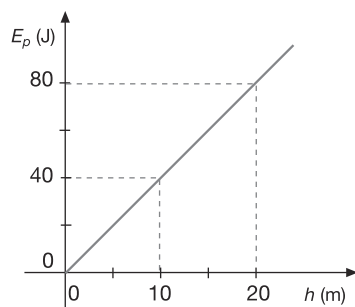
$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{a^2} (1, 0)$$

$$\vec{F}_{13} = G \frac{m_1 m_3}{a^2} (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = G \left(\frac{2}{3}, 0 \right) + G \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= G \left(\frac{7}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ N} \end{aligned}$$

$$|\vec{F}_T| = 9,7 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

31. La gràfica adjunta mostra com varia l'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa 2 kg en un planeta de radi $R = 5000 \text{ km}$, amb la distància h a la superfície del planeta (suposant que h és molt més petita que R).



Calculeu:

- a) L'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta esmentat.

$$E_p = m g_0 h \text{ (per } h \ll R)$$

$$\text{Del gràfic: } 40 = 2 \cdot g_0 \cdot 10 \rightarrow g_0 = 2 \text{ m/s}^2$$

- b) La massa del planeta.

$$\left. \begin{aligned} F &= m g_0 \\ F &= G \frac{m M}{R^2} \end{aligned} \right\} G \frac{M}{R^2} = g_0 \rightarrow$$

$$M = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 7,5 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

- c) La velocitat d'escapament en el planeta.

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$$E_c + U(R) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M m}{R} = 0$$

$$\rightarrow v_e = 4,47 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$