



Unitat 1. Mecànica

Activitats finals

1. Raoneu si és certa aquesta afirmació: quan un cos es mou amb velocitat constant, el seu moviment és rectilini.

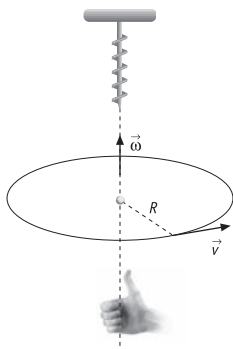
Si la velocitat és constant ($\vec{v} = \text{constant}$), aleshores el mòdul, la direcció i el sentit del vector velocitat han de ser constants, i això només és possible quan el moviment és rectilini.

2. Per què un moviment uniforme no es pot iniciar a partir del repòs? Raoneu la resposta.

Un moviment és uniforme quan la velocitat es manté constant al llarg del temps. Per tant, no pot iniciar-se a partir del repòs, ja que necessita una acceleració.

3. Com es pot representar vectorialment el moviment de la minutera d'un rellotge? Quin tipus de vector és?

Amb un vector axial que, en aquest cas, és el vector velocitat angular $\vec{\omega}$.



4. L'equació del moviment d'un mòbil és

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 1)\vec{i} + (2t^3 + 5t)\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en m i el temps en s, calculeu el desplaçament entre els instants $t = 0$ i $t = 2$ s.

$$\vec{r}(0) = (2 \cdot 0^2 + 1)\vec{i} + (2 \cdot 0^3 + 5 \cdot 0)\vec{j} = \vec{i}$$

$$\vec{r}(2) = (2 \cdot 2^2 + 1)\vec{i} + (2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2)\vec{j} = 9\vec{i} + 26\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = 9\vec{i} + 26\vec{j} - \vec{i} = 8\vec{i} + 26\vec{j} \text{ m}$$

5. Una partícula descriu la trajectòria donada per l'equació del moviment $\vec{r} = (4t^2 + 2, t^2 + 1)$ expressada en unitats del SI. Calculeu el vector de posició per als instants de temps $t = 0$ i $t = 3$ s, el vector desplaçament entre aquests dos instants i l'equació de la trajectòria.

$$\vec{r}(t = 0) = (4 \cdot 0 + 2, 0 + 1) = (2, 1)$$

$$\vec{r}(t = 3) = (4 \cdot 3^2 + 2, 3^2 + 1) = (38, 10)$$

Per tant, el desplaçament és:

$$\Delta\vec{r} = (38, 10) - (2, 1) = (36, 9)$$

Busquem l'equació de la trajectòria a partir de les equacions del moviment:

$$\left. \begin{array}{l} x = 4y^2 + 2 \\ y = t^2 + 1 \end{array} \right\} \rightarrow t^2 = y - 1 \rightarrow x = 4(y - 1) + 2 \rightarrow$$

$$x = 4y - 2$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

6. Una partícula descriu el moviment donat per l'equació $\vec{r} = (t^2 - 5t, t^2 - 4)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el mòdul del vector de posició per a $t = 2$ s.

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 5t, t^2 - 4)$$

$$\vec{r}(2) = (2^2 - 5 \cdot 2, 2^2 - 4) = (-6, 0) \rightarrow$$

$$r(2) = \sqrt{(-6)^2} = 6 \text{ m}$$

7. Trobeu l'equació de la trajectòria d'un mòbil el vector de posició del qual està determinat per la funció

$$\vec{r} = (2t + 1)\vec{i} + (3t - 3)\vec{j} \text{ en unitats del SI.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 3 \end{array} \right\} x = 2t + 1 \rightarrow t = \frac{x - 1}{2}$$

$$y = 3\left(\frac{x - 1}{2}\right) - 3 = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

8. Trobeu l'equació de la trajectòria del mòbil el vector de posició del qual està determinat per la funció

$$\vec{r} = (2t + 2, 2t + 4t^2)$$

en unitats del SI.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t + 2 \\ y = 2t + 4t^2 \end{array} \right\} x = 2t + 2 \rightarrow t = \frac{x - 2}{2}$$

$$y = 2\left(\frac{x - 2}{2}\right) + 4\left(\frac{x - 2}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$y = x - 2 + x^2 - 4x + 4 \rightarrow y = x^2 - 3x + 2$$

9. Una partícula segueix una trajectòria circular de 3 m de radi. Si l'angle descrit està determinat per l'equació: $\varphi = t^2 - 1$, en què φ està expressat en rad i t en s, quina és la longitud de l'arc recorregut entre els instants $t = 1$ s i $t = 3$ s?

$$\varphi(1) = 1^2 - 1 = 0; \varphi(3) = 3^2 - 1 = 8 \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(3) - \varphi(1) = 8 \text{ rad}$$

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi = 3 \cdot 8 = 24 \text{ m}$$

10. La Lluna descriu una òrbita al voltant de la Terra que correspon pràcticament a un moviment circular i uniforme, de període $T = 27,4$ dies. La llum procedent de la Lluna triga 1,28 s a arribar a la Terra. Calculeu la velocitat angular i l'acceleració de la Lluna. Dada: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow c = \frac{R}{\Delta t} \rightarrow R = c \cdot \Delta t \rightarrow$$

$$R = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,28 = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27,4 \text{ dies} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}} = 2,65 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$a_n = \omega^2 R = (2,65 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

11. L'equació del moviment d'un mòbil és

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\vec{i} + (t^3 - 4t^2 + 2)\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en m i el temps en s, calculeu:

a) El desplaçament entre els instants $t = 0$ i $t = 2$ s.

$$\vec{r}(0) = (3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0)\vec{i} + (0^3 - 4 \cdot 0^2 + 2)\vec{j} = 2\vec{j}$$

$$\vec{r}(2) = (3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2)\vec{i} + (2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2)\vec{j} = -6\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = -6\vec{j} - 2\vec{j} = -8\vec{j} \text{ m}$$

b) La velocitat mitjana entre aquests dos instants.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-8\vec{j}}{2} = -4\vec{j} \text{ m/s}$$

c) La velocitat instantània per a $t = 1$ s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t - 6)\vec{i} + (3t^2 - 8t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(1) = (6 \cdot 1 - 6)\vec{i} + (3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1)\vec{j} = -5\vec{j} \text{ m/s}$$

12. Una partícula descriu el moviment determinat per l'equació $\vec{r} = (4t^2 + 2, t^2 + 1)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el vector velocitat per a l'instant de temps $t = 3$ s.

A partir del vector de posició $\vec{r}(t) = (4t^2 + 2, t^2 + 1)$, trobem el vector velocitat:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (8t, 2t)$$

Per a $t = 3$ s resulta: $\vec{v}(t = 3) = (8 \cdot 3, 2 \cdot 3) = (24, 6) \text{ m/s}$

13. Una partícula es mou d'acord amb l'equació del moviment següent: $\vec{r} = (t^2 - 5t, t^2 - 4)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el mòdul de la velocitat per a $t = 2$ s.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 5, 2t) \rightarrow$$

$$\vec{v}(2) = (2 \cdot 2 - 5, 2 \cdot 2) = (-1, 4) \rightarrow$$

$$\rightarrow v(2) = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ m/s}$$

14. L'equació del moviment d'un mòbil és

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 1)\vec{i} + (2t^3 + 5t)\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en m i el temps en s, calculeu:

Tingueu en compte que:

$$\vec{v}(t) = (4t, 6t^2 + 5)$$

a) L'acceleració mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$ s.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(0) = 4 \cdot 0\vec{i} + (6 \cdot 0^2 + 5)\vec{j} = 5\vec{j}$$

$$\vec{v}(2) = 4 \cdot 2\vec{i} + (6 \cdot 2^2 + 5)\vec{j} = 8\vec{i} + 29\vec{j}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(0)}{t(2) - t(0)} = \frac{8\vec{i} + 29\vec{j} - 5\vec{j}}{2} = 4\vec{i} + 12\vec{j} \text{ m/s}^2$$

b) L'acceleració instantània per a $t = 1$ s.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\vec{i} + 12t\vec{j}$$

$$\vec{a}(1) = 4\vec{i} + 12 \cdot 1\vec{j} = 4\vec{i} + 12\vec{j} \text{ m/s}^2$$

c) Es tracta d'un moviment uniformement accelerat? Raoneu-ho.

No és un moviment uniformement accelerat, ja que l'acceleració és una funció del temps:

$$\vec{a}(t) = 4\vec{i} + 12 \cdot t\vec{j}$$

15. Una partícula descriu el moviment determinat per l'equació $\vec{r} = (4t^2 + 2, t^2 + 1)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el vector acceleració per a l'instant de temps $t = 3$ s. Es tracta d'un moviment amb acceleració constant? Raoneu-ho.

Aprofitem el resultat de l'activitat 14: $\vec{v}(t) = (8t, 2t)$

El vector acceleració és, per tant:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (8, 2) \text{ m/s}^2$$

Veiem que és un moviment amb acceleració constant ja que l'acceleració no depèn del temps. I per a $t = 3$ s resulta:

$$\vec{a}(t = 3) = (8, 2) \text{ m/s}^2$$

16. L'abscissa d'un mòbil que es desplaça sobre l'eix OX és

$$x = \frac{t^3}{2} \text{ m. Si el temps, } t, \text{ està determinat en s, calculeu:}$$

a) La posició i l'acceleració en l'instant en què la seva velocitat és de 6 m/s.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2}$$

$$\text{Si } v = 6 \rightarrow \frac{3t^2}{2} = 6 \rightarrow t = \sqrt{\frac{6 \cdot 2}{3}} = 2 \text{ s}$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ s} \rightarrow x = \frac{2^3}{2} = 4 \text{ m}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{6t}{2} = 3t$$

$$\text{Si } t = 2 \text{ s} \rightarrow a = 3 \cdot 2 = 6 \text{ m/s}^2$$



- b) La velocitat i l'acceleració mitjanes entre l'instant $t = 0$ i l'instant de temps calculat en l'apartat anterior.

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = 0 \text{ m} \\ x(2) = 4 \text{ m} \\ v(0) = 0 \text{ m/s} \\ v(2) = 6 \text{ m/s} \end{array} \right\} \begin{array}{l} v_m = \frac{x(2) - x(0)}{2} = \frac{4 - 0}{2} = 2 \text{ m/s} \\ a_m = \frac{v(2) - v(0)}{2} = \frac{6 - 0}{2} = 3 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

17. La velocitat d'una partícula està determinada per la funció $\vec{v} = (2t^2 - 1, -t)$ en unitats del SI. Si en l'instant inicial la partícula es troba en la posició $(10, 0)$ m, calculeu:

$$\vec{v} = (2t^2 - 1, -t)$$

$$\vec{r}(0) = (10, 0)$$

- a) El vector de posició.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \rightarrow \\ \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} &= \int_0^t \vec{v} dt \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (2t^2 - 1, -t) dt \rightarrow \\ \rightarrow [\vec{r}]_{(10, 0)}^{\vec{r}} &= \left[\frac{2t^3}{3} - t, -\frac{t^2}{2} \right]_0^t \rightarrow \\ \vec{r} - (10, 0) &= \left(\frac{2t^3}{3} - t, -\frac{t^2}{2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \vec{r} &= \left(\frac{2t^3}{3} - t + 10, -\frac{t^2}{2} \right) \text{ m} \end{aligned}$$

- b) L'acceleració.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (4t, -1) \text{ m/s}^2$$

18. L'equació de moviment d'un mòbil és

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\vec{i} + (t^3 - 4t^2 + 2)\vec{j}$$

Si mesurem el desplaçament en m i el temps en s, calculeu:

- a) L'acceleració mitjana entre $t = 0$ i $t = 2$ s.

$$\begin{aligned} \vec{a}_m &= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ \vec{v}(0) &= (6 \cdot 0 - 6)\vec{i} + (3 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0)\vec{j} = -6\vec{j} \\ \vec{v}(2) &= (6 \cdot 2 - 6)\vec{i} + (3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2)\vec{j} = 6\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{a}_m &= \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(0)}{t(2) - t(0)} = \frac{6\vec{i} - 4\vec{j} - (-6\vec{j})}{2} = \frac{12\vec{i} - 4\vec{j}}{2} = \\ &= 6\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- b) L'acceleració instantània per a $t = 1$ s.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i} + (6t - 8)\vec{j} \\ \vec{a}(1) &= 6\vec{i} + (6 \cdot 1 - 8)\vec{j} = 6\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

19. La posició d'un mòbil està determinada per l'equació $\vec{r} = 3t^2\vec{i} - 5t\vec{j}$ (en unitats del SI). Determineu-ne la velocitat i l'acceleració en l'instant $t = 2$ s.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} - 5\vec{j} \rightarrow \vec{v}(2) = 12\vec{i} - 5\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i} \rightarrow \vec{a}(2) = 6\vec{i} \text{ m/s}^2$$

20. Una partícula es mou d'acord amb l'equació del moviment següent: $\vec{r} = (t^2 - 5t, t^2 - 4)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el mòdul de l'acceleració per a $t = 2$ s i raoneu si l'acceleració és constant o variable.

Aprofitem el resultat de l'activitat 13 corresponent a aquest moviment:

$$\vec{v}(t) = (2t - 5, 2t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2, 2) \rightarrow \vec{a}(2) = (2, 2) \rightarrow$$

$$a(2) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,83 \text{ m/s}^2$$

L'acceleració és constant ja que no depèn del temps.

21. En un cert instant, la velocitat d'un mòbil és $\vec{v} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$, i l'acceleració $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ en unitats del SI. Calculeu els components tangencial i normal de l'acceleració en aquest instant.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = 5\vec{i} - 12\vec{j} \\ \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \end{array} \right\}$$

$$v = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{5\vec{i} - 12\vec{j}}{13} = 0,38\vec{i} - 0,92\vec{j}$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = (3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (0,38\vec{i} - 0,92\vec{j}) = 3 \cdot 0,38 + (-2) \cdot (-0,92) = 3 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3,60 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \rightarrow a_r = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \rightarrow$$

$$a_n = \sqrt{a_r^2 - a_t^2} = \sqrt{3,60^2 + 3^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ m/s}^2$$

22. La velocitat d'un mòbil és $\vec{v} = (2t^2 - 1, t^2)$, expressada en unitats del SI. Calculeu el mòdul de l'acceleració i els seus components intrínsecs en l'instant de temps $t = 2$ s.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (4t, 2t) \rightarrow \vec{a}(2) = (4 \cdot 2, 2 \cdot 2) = (8, 4)$$

$$a = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8,94 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{v}(2) = (2 \cdot 2^2 - 1, 2^2) = (7, 4)$$

$$v = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8,06 \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(7, 4)}{8,06} = (0,87, 0,50)$$



$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = (8, 4) \cdot (0,87, 0,50) = 8 \cdot 0,87 + 4 \cdot 0,50 = 8,93 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a_t^2 - a_t^2} = \sqrt{8,94^2 - 8,93^2} = 0,41 \text{ m/s}^2$$

23. Una partícula descriu una trajectòria determinada donada pel vector de posició $\vec{r} = (t^2, 2t)$ en unitats del SI. Quan la partícula passa per la posició (4, 4), determineu:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = (t^2, 2t) \\ \vec{r} = (4, 4) \end{array} \right\} (4, 4) = (t^2, 2t) \rightarrow t = 2 \text{ s}$$

- a) La velocitat.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t, 2) \rightarrow \vec{v}(2) = (2 \cdot 2, 2) = (4, 2) \text{ m/s}$$

- b) L'acceleració.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (2, 0) \rightarrow \vec{a}(2) = (2, 0) \text{ m/s}^2$$

- c) Els components intrínsecs de l'acceleració.

$$v = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(4, 2)}{4,47} = (0,89, 0,45)$$

$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{u}_t = (2, 0) \cdot (0,89, 0,45) = 2 \cdot 0,89 + 0 \cdot 0,45 = 1,79 \text{ m/s}^2$$

$$a_r = \sqrt{2^2} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{a_r^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - 1,79^2} = 0,89 \text{ m/s}^2$$

- d) El radi de curvatura.

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{4,47^2}{0,89} = 22,36 \text{ m}$$

24. L'equació del moviment d'un mòbil és

$$\vec{r}(t) = (2t^3 + 3, 3t^3 - 2)$$

expressat en unitats del SI. Calculeu en l'instant de temps $t = 1 \text{ s}$:

- a) El mòdul del vector acceleració.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t^2, 9t^2)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (12t, 18t)$$

$$\vec{a}(1) = (12, 18)$$

$$a = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{468} = 21,63 \text{ m/s}^2$$

- b) El component tangencial de l'acceleració.

$$v(t) = \sqrt{(6t^2)^2 + (9t^2)^2} = \sqrt{36t^4 + 81t^4} = \sqrt{117t^4} = 10,817 t^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 21,63 \text{ t}$$

$$a_t(1) = 21,63 \text{ m/s}^2$$

- c) El component normal de l'acceleració.

$$a_n = \sqrt{a_t^2 - a_t^2} = \sqrt{21,63^2 - 21,63^2} = 0$$

25. Tres ciclistes, A, B i C, descriuen una corba circular de 20 m de radi. Calculeu l'acceleració total de cada ciclista en un instant en què el mòdul de la seva velocitat és de 10 m/s, si sabem que:

- a) El ciclista A conserva una velocitat de mòdul constant.

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{20} = 5 \text{ m/s}^2 \rightarrow \vec{a}_r = 5 \vec{u}_n \text{ m/s}^2$$

- b) El ciclista B accelera uniformement i la seva velocitat passa de 9,5 m/s a 10,5 m/s en 0,5 s.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{20} = 5 \text{ m/s}^2 \\ a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10,5 - 9,5}{0,5} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a}_r = (5 \vec{u}_n + 2 \vec{u}_t) \text{ m/s}^2$$

- c) El ciclista C frena uniformement d'11 m/s a 9 m/s en un temps de 0,5 s.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{20} = 5 \text{ m/s}^2 \\ a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9 - 11}{0,5} = -\frac{2}{0,5} = -4 \text{ m/s}^2 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{a}_r = (5 \vec{u}_n - 4 \vec{u}_t) \text{ m/s}^2$$

26. En un moviment circular de radi $r = 6,5 \text{ m}$ la velocitat angular està determinada per $\omega = 2 + 3t$ (en unitats del SI).

- a) Es tracta d'un moviment circular uniformement accelerat? Per què?

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 3 \text{ rad/s}^2 = c_{\text{tant}}. \text{ Sí, perquè } \alpha = c_{\text{tant}} \neq 0.$$

- b) Calculeu l'acceleració tangencial i l'acceleració normal del punt mòbil en l'instant $t = 3 \text{ s}$.

$$a_t = \alpha \cdot r = 19,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r = (2 + 3 \cdot 3)^2 \cdot 6,5 = 786,5 \text{ m/s}^2$$

- c) Determineu la longitud de l'arc recorregut en els dos primers segons del moviment i la velocitat angular al final de la primera volta.

$$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 = 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} 3 \cdot 2^2 = 10 \text{ rad} \rightarrow \Delta s = r \cdot \Delta\theta = 65 \text{ m}$$



$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha \Delta t \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \Delta\theta$$

$$\omega^2 = 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\pi \rightarrow \omega = 6,5 \text{ rad/s}$$

27. El mòdul de la velocitat d'un punt material que descriu una trajectòria circular està determinat per l'equació (en unitats del SI) $v = 6 + 10t$. Si el radi de la trajectòria és de 100 m, quina serà l'acceleració normal en l'instant $t = 8$ s? I l'acceleració tangencial?

$$v = 6 + 10t \rightarrow v(8) = 6 + 10 \cdot 8 = 86 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{86^2}{100} = 0,86 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 10 \text{ m/s}^2$$

28. Un mòbil descriu un moviment circular de radi $r = 2$ m. L'angle descrit pel mòbil en funció del temps està determinat per l'equació $\varphi = t^3 + 5t - 4$ (en unitats del SI). Calculeu la velocitat angular i l'acceleració tangencial en l'instant $t = 1$ s.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3t^2 + 5 \rightarrow \omega(1) = 8 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6t \rightarrow \alpha(1) = 6 \text{ rad/s}^2$$

29. Expliqueu les situacions següents tenint en compte les lleis de Newton:

- a) Un observador està dins d'un vehicle en marxa a velocitat constant. De sobte, el vehicle frena.

L'observador experimenta la seva inèrcia a seguir amb el MRU i l'atribueix a una força d'inèrcia que l'impulsa cap endavant.

- b) Un observador es troba en repòs dins d'un vagó d'una muntanya russa al punt més alt del seu recorregut. En un moment donat, el vagó inicia el descens sobre els raïls.

L'observador experimenta la seva inèrcia a seguir en repòs i l'atribueix a una força d'inèrcia que l'estira cap amunt.

- c) L'observador anterior està en repòs dins d'un vagó en el punt més baix de la muntanya russa. A continuació, el vagó inicia l'ascens.

L'observador experimenta la seva inèrcia a seguir en repòs i l'atribueix a una força d'inèrcia que l'estira cap a baix.

30. Sobre una massa m actua una força $\vec{F}$ que produeix una acceleració $\vec{a}$. Si sobre la mateixa massa actuen dues forces perpendiculars de mòduls iguals al mòdul de $\vec{F}$, que produeixen una acceleració $\vec{a}'$, quina relació tenen els mòduls de les acceleracions?

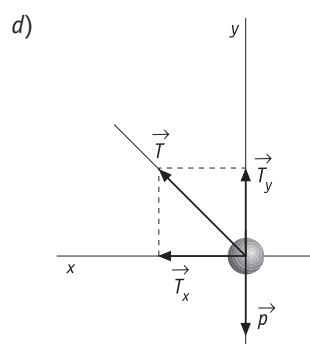
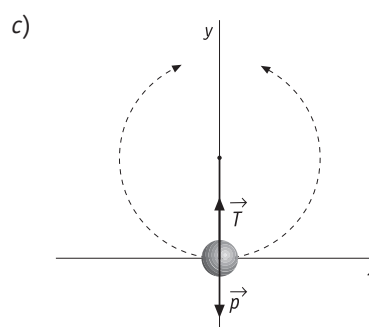
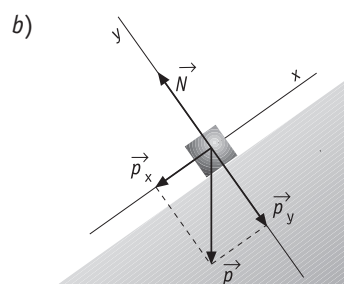
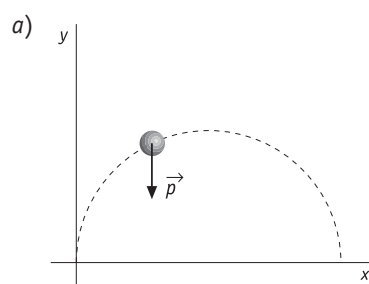
Si apliquem la 2a llei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, en mòdul, aleshores tenim que $F = ma$ i $F' = ma'$.

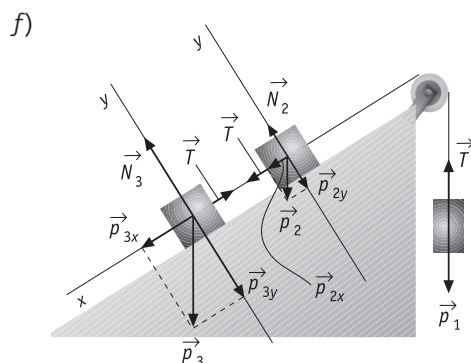
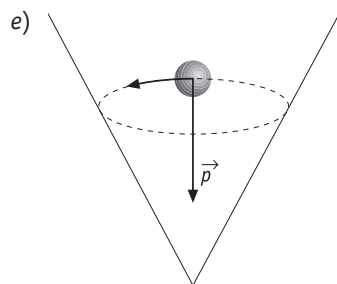
$$F' = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2} \rightarrow a' = \frac{F'}{m} = \frac{\sqrt{2}F}{m} \rightarrow$$

$$a' = \frac{\sqrt{2}ma}{m} = \sqrt{2}a$$

31. Determineu les forces que actuen sobre cada objecte i dis-
cutiu la descomposició d'aquestes respecte d'algun sistema de coordenades adequat.

En cada figura s'indica el sistema de referència triat i la descomposició de forces segons aquest sistema.





32. Tenint en compte el principi d'inèrcia, expliqueu què passa quan circulem amb un automòbil que descriu una corba.

Si tenim en compte el principi d'inèrcia, l'automòbil tendeix a seguir en la mateixa direcció que portava.

33. En el moment que un pèndol simple passa per la posició més baixa, la tensió i el pes coincideixen? Raoneu-ho.

En aquesta posició, $T - p = m \frac{v^2}{l}$. Si tenim en compte que l'acceleració centrípeta és positiva, deduïm que:

$$T - p > 0 \rightarrow T > p.$$

34. La variació de la quantitat de moviment d'un cos està determinada per: $\Delta \vec{p} = (\Delta p_x, 30)$ en unitats del SI. Si el mòdul d'aquest increment val $50 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ i el component segons l'eix X de la corresponent variació de velocitat és -4 m/s , trobeu:

Les dades del problema són:

$$\Delta \vec{p} = (\Delta p_x, 30); |\Delta \vec{p}| = 50 \text{ kg}\cdot\text{m/s}; \Delta v_x = -4 \text{ m/s}$$

a) El valor del component segons l'eix X de la variació de la quantitat de moviment del cos.

Coneixent el mòdul i Δp_y podem trobar Δp_x :

$$\Delta p_x = \sqrt{(\Delta p)^2 - (\Delta p_y)^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \pm 40 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Fixem-nos que tenim dos valors possibles per a Δp_x . Ara bé, com que el component de la variació de la velocitat en aquesta direcció és negatiu i la massa sempre és positiva, hem d'optar pel resultat negatiu:

$$\Delta p_x = -40 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

b) La massa del cos.

Amb el resultat anterior obtenim la massa del cos:

$$m = \frac{\Delta p_x}{\Delta v_x} = \frac{-40}{-4} = 10 \text{ kg}$$

c) El valor mitjà de la força que ha provocat aquesta variació en la quantitat de moviment del cos si ha actuat durant 1 ms.

El valor mitjà de la força considerada constant és:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \left(\frac{-40}{10^{-3}}, \frac{30}{10^{-3}} \right) = (-4 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4) \text{ N}$$

$$(-4 \cdot 10^4 \vec{i} + 3 \cdot 10^4 \vec{j}) \text{ N}$$

d) L'impuls mecànic que s'ha aplicat sobre el cos.

L'impuls mecànic és igual a la variació de la quantitat de moviment:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} = (-40, 30) \text{ N}\cdot\text{s}$$

$$(-40 \vec{i} + 30 \vec{j}) \text{ N}\cdot\text{s}$$

35. Per què en l'expressió més general de les lleis de Newton s'utilitza la magnitud quantitat de moviment en comptes de l'acceleració?

Perquè són les expressions més generals, vàlides fins i tot per a sistemes de massa variable i també a física relativista.

36. Un cos de 5 kg de massa es mou sobre una trajectòria determinada per l'equació de moviment

$$\vec{r} = (t^2 - t)\vec{i} + (3t^3 + 2)\vec{j}$$

en què $\vec{r}$ i t s'expressen en unitats del SI. Determineu:

a) La força mitjana que actua damunt del cos entre els instants $t = 0 \text{ s}$ i $t = 5 \text{ s}$.

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t - 1)\vec{i} + 9t^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(0) = -\vec{i}$$

$$\vec{v}(5) = 9\vec{i} + 225\vec{j}$$

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = m(\vec{v}(5) - \vec{v}(0)) =$$

$$= 5(9\vec{i} + 225\vec{j} - (-\vec{i})) = 5(10\vec{i} + 225\vec{j}) =$$

$$= 50\vec{i} + 1125\vec{j}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{50\vec{i} + 1125\vec{j}}{5} = (10\vec{i} + 225\vec{j}) \text{ N}$$



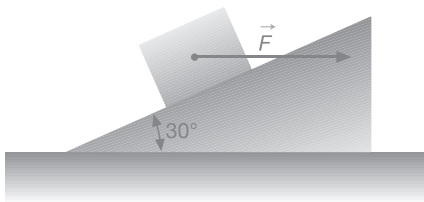
b) La força instantània en funció del temps.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = 5[(2t - 1)\vec{i} + 9t^2\vec{j}] =$$

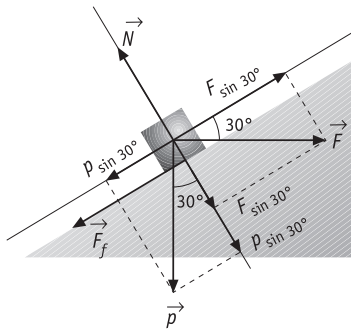
$$= (10t - 5)\vec{i} + 45t^2\vec{j}$$

$$\vec{F} = \frac{d[(10t - 5)\vec{i} + 45t^2\vec{j}]}{dt} = (10\vec{i} + 90t\vec{j}) \text{ N}$$

37. Sobre un cos de 2 kg, que es troba sobre un pla inclinat de 30°, actua una força $\vec{F}$ en una direcció horitzontal. Si el coeficient de fregament entre el cos i el pla és negligible:



a) Representeu totes les forces que actuen sobre el cos.



b) Calculeu el valor de la força $\vec{F}$ perquè el cos es mogui cap a la part superior del pla amb velocitat constant.

$$F \cos 30^\circ = p \sin 30^\circ \rightarrow F = p \tan 30^\circ \rightarrow$$

$$F = 2 \cdot 9,8 \tan 30^\circ = 11,3 \text{ N}$$

c) Si el coeficient de fregament entre el cos i el pla és de 0,3, com canviarien els apartats anteriors?

$$\left. \begin{aligned} F \cos 30^\circ - p \sin 30^\circ - F_f &= 0 \\ N &= F \sin 30^\circ + p \cos 30^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$F \cos 30^\circ - \mu N - p \sin 30^\circ = 0$$

$$F \cos 30^\circ - \mu(F \sin 30^\circ + p \cos 30^\circ) - p \sin 30^\circ = 0$$

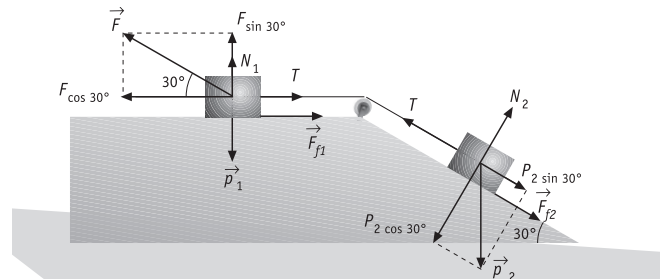
$$F \cos 30^\circ - \mu F \sin 30^\circ - \mu p \cos 30^\circ - p \sin 30^\circ = 0$$

$$F = \frac{p(\mu \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)}{\cos 30^\circ - \mu \sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cdot 9,8 \cdot (0,3 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)}{\cos 30^\circ - 0,3 \sin 30^\circ}$$

$$F = 20,8 \text{ N}$$

38. Observeu el sistema representat a la figura. Calculeu la tensió i l'acceleració amb què es mou el sistema, si el mòdul de la força $\vec{F}$ val 200 N, la massa de cada bloc és de 20 kg i el coeficient de fregament és de 0,2 per a tots dos cossos.



$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}$$

Cos 1:

$$p = N_1 + F \sin 30^\circ$$

$$20 \cdot 9,8 = N_1 + 200 \cdot \sin 30^\circ$$

$$N_1 = 20 \cdot 9,8 - 200 \cdot \sin 30^\circ$$

$$N_1 = 96 \text{ N}$$

$$F \cos 30^\circ - \mu N_1 - T = m_1 a$$

$$200 \cdot \cos 30^\circ - 0,2 \cdot 96 - T = 20 a$$

$$154 - T = 20 a$$

Cos 2:

$$\left. \begin{aligned} T - p \sin 30^\circ - \mu N_2 &= m_2 a \\ p \cos 30^\circ &= N_2 \end{aligned} \right\}$$

$$T - 20 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 20 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ = 20 a$$

$$T - 131,95 = 20 a$$

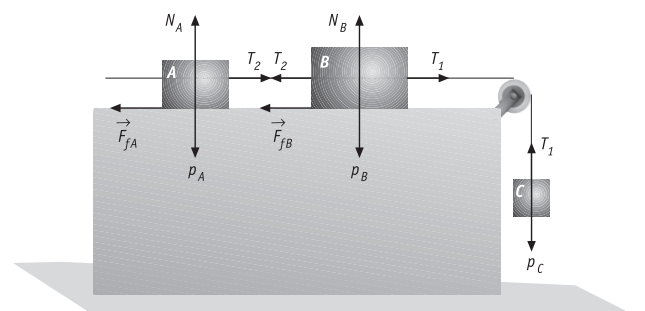
$$154 - T = 20 a$$

$$T - 131,95 = 20 a$$

$$154 - T = T - 131,95 \rightarrow T = \frac{154 + 131,95}{2} = 142,97 \text{ N}$$

$$a = \frac{154 - 142,97}{20} = 0,55 \text{ m/s}^2$$

39. En el sistema de la figura les masses són $m_A = 1 \text{ kg}$, $m_B = 3 \text{ kg}$ i $m_C = 6 \text{ kg}$, mentre que el coeficient de fregament entre el cos A i B i el terra és de 0,1. Calculeu les tensions i l'acceleració del sistema.



Cos A

$$\left. \begin{aligned} T_2 - F_{fA} &= m_A a \\ p_A &= N_A \end{aligned} \right\}$$

$$T_2 - \mu p_A = m_A a \rightarrow T_2 - 0,1 \cdot 9,8 = a \rightarrow T_2 = 0,98 + a$$

Cos B

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_2 - F_{fB} &= m_B a \\ p_B &= N_B \end{aligned} \right\}$$

$$T_1 - T_2 - \mu p_B = m_B a \rightarrow T_1 - T_2 - 0,1 \cdot 3 \cdot 9,8 = 3a \rightarrow \\ \rightarrow T_1 - T_2 - 2,94 = 3a$$

Cos C

$$p_C - T_1 = m_C a \rightarrow 6 \cdot 9,8 - T_1 = 6a \rightarrow T_1 = 58,8 - 6a$$

Si solucionem el sistema d'equacions, tenim:

$$58,8 - 6a - 0,98 - a - 2,94 = 3a$$

$$\rightarrow 54,88 = 10a \rightarrow a = 5,49 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 58,8 - 6 \cdot 5,49 = 25,86 \text{ N}$$

$$T_2 = 0,98 + 5,49 = 6,47 \text{ N}$$

40. Una molla de constant recuperadora 100 N/m i longitud natural 1 m està lligada al sostre d'un ascensor. Si pengem de l'extrem lliure de la molla un cos de massa $m = 2 \text{ kg}$, quina és la longitud de la molla quan:

- a) L'ascensor puja amb una acceleració igual a 1 m/s^2 en el sentit del moviment?

Perquè hi hagi una acceleració cap amunt cal que la força de la molla estigui dirigida cap amunt. Això significa que s'haurà allargat:

$$k\Delta l - mg = ma \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta l = m \frac{a + g}{k} = 2 \frac{1 + 9,8}{100} = 0,22 \text{ m} \rightarrow$$

$$\rightarrow l = 1 + 0,22 = 1,22 \text{ m}$$

- b) L'ascensor puja a una velocitat constant?

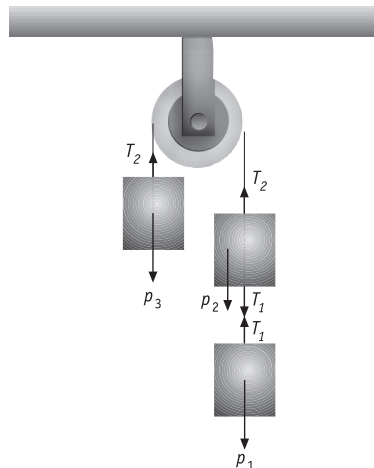
En aquest cas no hi ha acceleració i la molla també està allargada per a compensar el pes:

$$k\Delta l - mg = ma = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta l = m \frac{g}{k} = 2 \frac{9,8}{100} = 0,20 \text{ m} \rightarrow$$

$$\rightarrow l = 1 + 0,20 = 1,20 \text{ m}$$

41. En el sistema representat a la figura cada cos té una massa de 3 kg. Negligim la massa de la politja, la massa de les cordes i el fregament. Trobeu:



- a) L'acceleració del sistema.

$$\left. \begin{aligned} p_1 - T_1 &= m_1 a \\ p_2 + T_1 - T_2 &= m_2 a \\ T_2 - p_3 &= m_3 a \end{aligned} \right\}$$

$$p_1 + p_2 - p_3 = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

$$3 \cdot 9,8 + 3 \cdot 9,8 - 3 \cdot 9,8 = (3 + 3 + 3) a$$

$$a = \frac{3 \cdot 9,8}{3} = 3,27 \text{ m/s}^2$$

- b) La tensió de les cordes que uneixen els blocs.

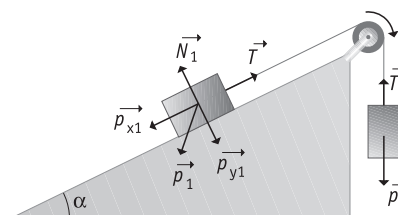
$$T_1 = p_1 - m_1 a = 3 \cdot 9,8 - 3 \cdot 3,27 \rightarrow T_1 = 19,6 \text{ N}$$

$$T_2 = p_3 + m_3 a = 3 \cdot 9,8 + 3 \cdot 3,27 = 39,2 \text{ N}$$

42. Un extrem d'un fil que passa per la gorja d'una petita politja fixa està unit a un cos de massa 4 kg que llisca per damunt d'un pla inclinat de 30° , amb un coeficient de fregament cinètic de 0,2. De l'altre extrem del fil penja una massa d'1 kg. Calculeu:

Les dades del nostre problema són:

$$\alpha = 30^\circ; \mu = 0,2; m_1 = 4 \text{ kg}; m_2 = 1 \text{ kg}$$





a) Cap a on es mouran els cossos?

Escollim com a sentit positiu de moviment l'indicat a la figura (la politja es mou en sentit antihorari). Apliquem ara la 2a llei de Newton a cada massa, d'acord amb el sentit positiu escollit:

$$\left. \begin{aligned} p_{x1} - T - F_{f1} &= m_1 a \\ T - p_2 &= m_2 a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{p_{x1} - p_2 - F_{f1}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

on les tensions que actuen sobre cada cos i les acceleracions són les mateixes perquè negligim la massa de la politja i de la corda.

Substituint les dades obtenim el valor de l'acceleració:

$$a = \frac{4 \cdot 9,8 (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) - 1 \cdot 9,8}{4 + 1} = 0,6 \text{ m/s}^2$$

Aquest valor positiu indica que el sentit escollit com a positiu és correcte. Per tant, els cossos es mouen cap avall del pla inclinat.

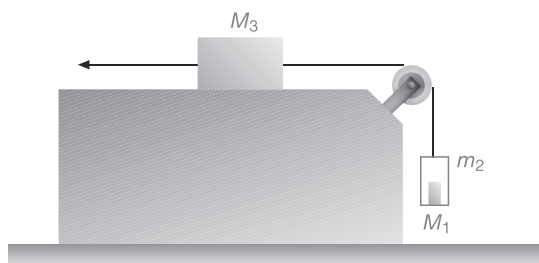
b) Quina és l'acceleració dels cossos i la tensió de la corda?

L'acceleració és la que acabem de calcular: $a = 0,6 \text{ m/s}^2$

Calculem el valor de la tensió:

$$T - p_2 = m_2 a \rightarrow T = m_2 (g + a) = 1(9,8 + 0,6) = 10,4 \text{ N}$$

43. Una massa $M_1 = 10 \text{ kg}$ és a l'interior d'una caixa de massa $M_2 = 30 \text{ kg}$. El conjunt està lligat a un cos de massa $M_3 = 100 \text{ kg}$ mitjançant una corda i una politja de masses negligibles, tal com es veu a la figura. Es deixa anar el sistema, que inicialment està en repòs, i observem que s'ha desplaçat 10 m durant els primers 4 s. Calculeu:



a) L'acceleració del sistema i el coeficient de fricció dinàmic μ entre M_3 i la superfície horitzontal.

$$x = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \rightarrow 10 = \frac{1}{2} a \cdot 4^2 \rightarrow$$

$$a = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ m/s}^2$$

Apliquem la 2n llei de Newton a tot el sistema

$$F_f = \mu N_3 = \mu M_3 g$$

$$p_1 + p_2 - F_f = (M_1 + M_2 + M_3) a \rightarrow$$

$$10 \cdot 9,8 + 30 \cdot 9,8 - \mu \cdot 100 \cdot 9,8 =$$

$$= (10 + 30 + 100) \cdot 1,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3,92 - 980\mu = 175 \rightarrow \mu = \frac{392 - 175}{980} = 0,22$$

b) La tensió de la corda.

Apliquem la 2a llei de Newton a un dels blocs

$$p_1 + p_2 - T = (M_1 + M_2) \cdot a \rightarrow$$

$$10 \cdot 9,8 + 30 \cdot 9,8 - T = (10 + 30) \cdot 1,25 \rightarrow$$

$$\rightarrow 392 - T = 50 \rightarrow T = 342 \text{ N}$$

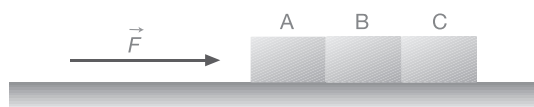
c) La força normal que la superfície inferior (terra) de M_2 fa sobre M_1 .

Apliquem la 2a llei de Newton a M_1

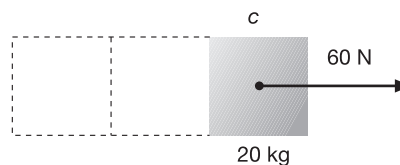
$$p_1 - N_1 = M_1 \cdot a \rightarrow$$

$$N_1 = p_1 - M_1 \cdot a = 10 \cdot 9,8 - 10 \cdot 1,25 = 85,5 \text{ N}$$

44. Tres cossos iguals de massa $M = 20 \text{ kg}$ cadascun estan en contacte sobre una superfície horitzontal, tal com es veu a la figura. El sistema es mou per acció d'una força horitzontal de mòdul F .

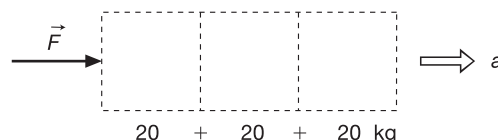


- a) Supposeu que el fregament entre els cossos i la superfície és negligible, i que la força de contacte entre el cos B i el cos C val 60 N. Calculeu l'acceleració del sistema.

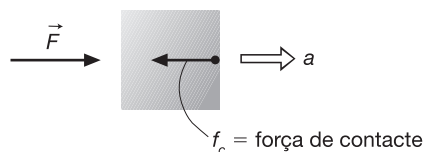


$$60 = 20 \cdot a \rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

- b) En les condicions de l'apartat anterior, calculeu el valor de F i el valor de la força de contacte entre els cossos A i B.



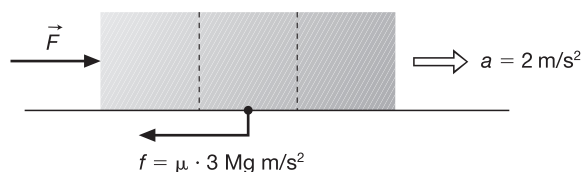
$$F = (20 + 20 + 20) \cdot 3 \rightarrow F = 180 \text{ N}$$



$$F - f = M \cdot a \rightarrow f = 120 \text{ N}$$

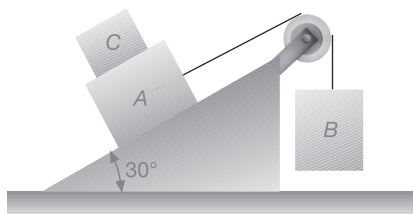
- c) Supposeu que el coeficient de fricció entre els cossos i la superfície horitzontal és $\mu = 0,2$. Calculeu el valor de F perquè el sistema tingui una acceleració de 2 m/s^2 .

Considereu $g = 10 \text{ m/s}^2$.



$$F - f = 3 M \cdot a \rightarrow F = 240 \text{ N}$$

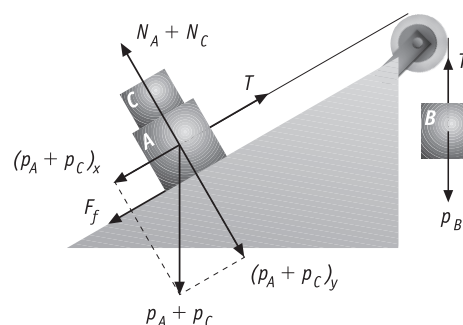
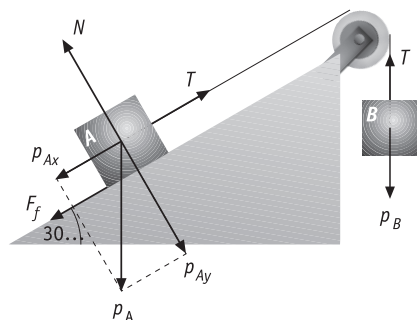
45. En el sistema de la figura les masses A i B valen 10 kg i 8 kg , respectivament, mentre que el coeficient de fregament estàtic entre la massa A i el pla inclinat és de $0,2$. Determineu la massa mínima que ha de tenir C perquè el sistema no es mogui, considerant que entre el cos C i el cos A hi ha un fregament molt gran.



Si hem de col·locar un cos de massa C damunt de A , hem d'interpretar que el sistema es mou inicialment cap al cos de massa B . Es pot comprovar calculant l'acceleració amb què es mou el sistema inicial, però tenint en compte que $\mu_d < \mu_e$; per tant, podem fer un petit error en el càlcul de l'acceleració.

$$\left. \begin{aligned} p_B - T &= m_B a \\ T - p_A \sin \alpha - \mu p_A \cos \alpha &= m_A a \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 8,98 - T &= 8a \\ T - 10 \cdot 9,8 \cdot \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ &= 10a \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} 78,4 - T &= 8a \\ T - 49 - 16,97 &= 10a \end{aligned} \right\}$$

$$78,4 - 65,97 = 18a \rightarrow a = 0,69 \text{ m/s}^2$$

Si el sistema no s'ha de moure quan posem damunt de A un cos de massa C , les forces s'han d'igualar:

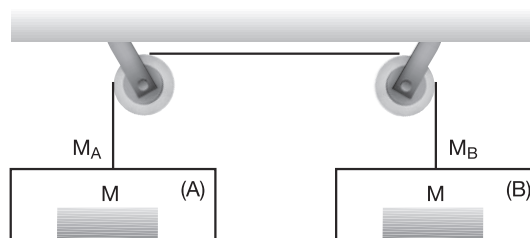
$$p_B = (p_A + p_C) \sin 30^\circ + \mu (p_A + p_C) \cos 30^\circ$$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 9,8 &= (10 \cdot 9,8 + m_C 9,8) \sin 30^\circ + \\ &+ 0,2 \cdot (10 \cdot 9,8 + m_C 9,8) \cos 30^\circ \end{aligned}$$

$$78,4 = 49 + 49 m_C + 16,97 + 1,7 m_C$$

$$m_C = \frac{78,4 - 49 - 16,97}{4,9 + 1,7} = 1,88 \text{ kg}$$

46. En el sistema de la figura la massa de la cabina (A) val $M_A = 200 \text{ kg}$ i la de la cabina (B) val $M_B = 300 \text{ kg}$. Dins de cadascuna hi ha una massa $M = 50 \text{ kg}$. Suposant negligibles les masses del cable i de les politges i els efectes del fregament, calculeu:



- a) L'acceleració amb què es mou el sistema.

$$p_B - p_A = M_T \cdot a \rightarrow a = \frac{p_B - p_A}{M_T} = \frac{(350 - 250) \cdot 9,8}{350 + 250}$$

$$\rightarrow a = 1,63 \text{ m/s}^2$$

- b) La tensió del cable.

$$\begin{aligned} p_B - T &= m_B \cdot a \rightarrow T = p_B - m_B a = m_B (g - a) = \\ &= 350 (9,8 - 1,63) = 2858 \text{ N} \end{aligned}$$

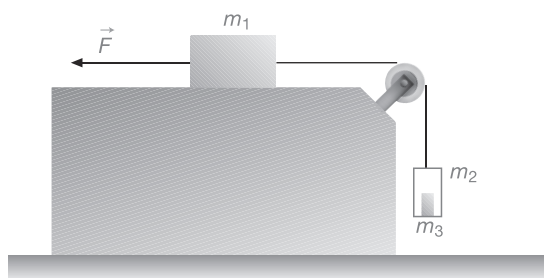


- c) La força de contacte entre cada una de les masses M de 50 kg i la cabina respectiva.

$$N_A - m_A g = m_A \cdot a \rightarrow N_A = m_A (g + a) = 50 (9,8 + 1,63) = 571 \text{ N}$$

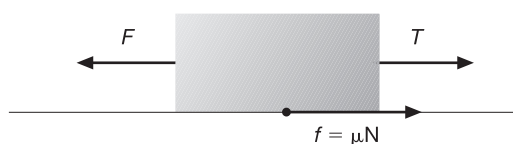
$$m_B g - N_B = m_B \cdot a \rightarrow N_B = m_B (g - a) = 50 (9,8 - 1,63) = 409 \text{ N}$$

47. El sistema de la figura, inicialment en repòs, es posa en moviment sota l'acció de la força F , de mòdul 1370 N. A l'interior de la cabina, de massa $m_2 = 100$ kg, hi ha una maleta de massa $m_3 = 10$ kg. El coeficient de fregament entre la massa m_1 i el terra horitzontal és $\mu = 0,2$. La massa $m_1 = 30$ kg. Les masses de la politja i de la corda són negligibles.

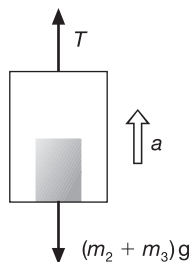


Calculeu:

- a) L'acceleració del sistema i la tensió de la corda.



$$F - T - \mu m_1 g = m_1 a$$



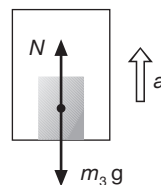
$$T - (m_2 + m_3) g = (m_2 + m_3) a$$

$$\rightarrow a = 1,5 \text{ m/s}^2$$

$$T = 1265 \text{ N}$$

- b) La força de contacte entre la massa m_3 i el terra de la cabina.

Considereu $g = 10 \text{ m/s}^2$.



$$N - m_3 g = m_3 a \rightarrow N = 115 \text{ N}$$

48. Les forces que actuen sobre un cos quan descriu un moviment circular uniforme, efectuen cap treball? Raoneu-ho.

Si el cos es mou amb MCU, l'acceleració tangencial és zero i només té acceleració centrípeta. Per tant, la força neta ha de ser centrípeta i, en tot moment, és perpendicular al vector desplaçament instantani. Si apliquem l'expressió del treball,

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ veiem que } W = 0.$$

49. Una partícula descriu un moviment parabòlic en les proximitats de la superfície de la Terra.

A. Es conserva:

- L'energia cinètica de la partícula.
- La quantitat de moviment de la partícula.
- L'energia mecànica de la partícula.

L'energia mecànica es conserva si no hi ha pèrdues per fregament. L'opció correcta és la c).

- B. En el punt més alt de la trajectòria de la partícula, es compleix que:

- L'acceleració normal de la partícula és nul·la.
- L'acceleració tangencial de la partícula és nul·la.
- La velocitat de la partícula és nul·la.

En el punt més alt d'un moviment parabòlic només actua l'acceleració de la gravetat que és perpendicular al vector velocitat en aquest punt. L'opció correcta és la b).

50. Una partícula descriu un moviment circular de radi 50 cm de manera que l'angle girat varia amb el temps segons l'equació $\varphi = 4t - t^3$, en unitats del SI.

Calculeu primer la velocitat angular i l'acceleració angular:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4 - 3t^2; \alpha = \frac{d\omega}{dt} = -6t$$

- A. L'acceleració tangencial de la partícula en $t = 1$ s val:

- -3 m/s^2
- 0 m/s^2
- 3 m/s^2

L'acceleració tangencial a $t = 1$ s val:

$$a_t = \alpha r = -6 \cdot 1 \cdot 0,5 = -3 \text{ m/s}^2$$

L'opció correcta és la a).

B. L'acceleració normal de la partícula en $t = 1$ s val:

a) $-0,5 \text{ m/s}^2$

b) 0 m/s^2

c) $0,5 \text{ m/s}^2$

L'acceleració normal a $t = 1$ s val:

$$a_n = \omega^2 r = (4 - 3 \cdot 1^2)^2 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m/s}^2$$

L'opció correcta és la c).

C. L'energia cinètica de la partícula:

a) Es manté constant.

b) Augmenta amb el temps.

c) Primer disminueix i després augmenta amb el temps.

L'acceleració tangencial és la responsable del canvi en el mòdul de la velocitat. En aquest cas val: $a_t = -3t$; és a dir, és de signe contrari a la velocitat tangencial. Per tant, la velocitat primer disminueix en mòdul i després augmenta. I el mateix passa amb l'energia cinètica. L'opció correcta és la c).

En el punt B, si plantejem el principi de conservació de l'energia, tenim que:

$$\left. \begin{aligned} E_{p_B} &= mgh = mg2l \\ E_{c_B} &= \frac{1}{2} m v_B^2 \end{aligned} \right\}$$

Aplicant el principi de conservació de l'energia mecànica i la 2a llei de Newton, tenim que:

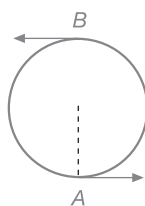
$$\left. \begin{aligned} mg2l + \frac{1}{2} m v_B^2 &= \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow 4gl + v_B^2 = v_A^2 \\ T_B + mg &= m \frac{v_B^2}{l} \\ T_A - mg &= m \frac{v_A^2}{l} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} lT_B + mgl &= m v_B^2 \\ lT_A - mgl &= m v_A^2 \\ 4gl + v_B^2 &= v_A^2 \end{aligned} \right\}$$

$$lT_A - mgl = 4mgl + m v_B^2 \rightarrow lT_A - 5mgl = m v_B^2$$

$$lT_A - 5mgl = lT_B + mgl \rightarrow T_A = T_B + 6mg$$

51. Una partícula de massa m lligada a l'extrem d'una corda de longitud l gira en un cercle vertical sense que hi actuï cap força de fricció, tal com es veu a la figura.



Escolliu l'afirmació correcta:

a) La velocitat en el punt A és la mateixa que en el punt B.

b) La tensió en el punt més baix és igual a mg .

c) La tensió en el punt A excedeix en $6mg$ la tensió en el punt B.

d) El treball realitzat pel pes quan el cos es desplaça de A a B val $2mgl$.

L'opció correcta és la c). Veiem-ho:

En el punt A, si plantejem el principi de conservació de l'energia tenim que:

$$\left. \begin{aligned} E_{p_A} &= 0 \\ E_{c_A} &= \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned} \right\}$$

52. Un cos de 3 kg de massa es mou al llarg d'una trajectòria determinada per l'equació de moviment:

$$\vec{r} = (3t^2 \vec{i} - 2t \vec{j}) \text{ m}$$

Calculeu la velocitat, la quantitat de moviment i el treball efectuat per la força que actua sobre aquest cos entre els instants de temps $t = 1$ s i $t = 2$ s.

$$\vec{r} = 3t^2 \vec{i} - 2t \vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t \vec{i} - 2 \vec{j}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = 3 \cdot (6t \vec{i} - 2 \vec{j}) = 18t \vec{i} - 6 \vec{j}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 18 \vec{i}$$

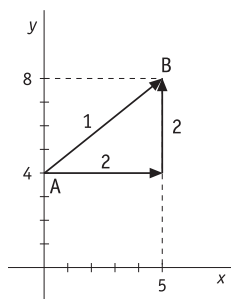
$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(1) &= 3 \cdot 1^2 \vec{i} - 2 \cdot 1 \vec{j} = 3 \vec{i} - 2 \vec{j} \\ \vec{r}(2) &= 3 \cdot 2^2 \vec{i} - 2 \cdot 2 \vec{j} = 12 \vec{i} - 4 \vec{j} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(2) - \vec{r}(1) = 12 \vec{i} - 4 \vec{j} - 3 \vec{i} + 2 \vec{j} = 9 \vec{i} - 2 \vec{j}$$

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 18 \vec{i} \cdot (9 \vec{i} - 2 \vec{j}) = 18 \cdot 9 - 2 \cdot 0 = 162 \text{ J}$$



53. Un cos es mou per l'acció de la força $\vec{F} = x\vec{i} + x\vec{j}$. Calculeu el treball exercit per la força en traslladar el cos des del punt A (0, 4) fins al punt B (5, 8), si el desplaçament té lloc:



a) Pel camí 1.

$$W = \int_{(0,4)}^{(5,8)} (x\vec{i} + x\vec{j}) dx dy$$

$$\left. \begin{aligned} y &= mx + b \\ 4 &= m \cdot 0 + b \rightarrow b = 4 \\ 8 &= 5m + b \rightarrow 8 = 5m + 4 \rightarrow m = \frac{4}{5} \end{aligned} \right\}$$

$$y = \frac{4}{5}x + 4 \rightarrow dy = \frac{4}{5} dx$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{(0,4)}^{(5,8)} (x\vec{i} + x\vec{j}) dx dy = \int_0^5 x dx + \int_0^5 \frac{4}{5} x dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 + \left[\frac{4}{5} \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{5^2}{2} + \frac{4 \cdot 5^2}{5 \cdot 2} = \\ &= \frac{25 + 20}{2} = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Pel camí 2.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 x dx + \int_4^8 x dy = \int_0^5 x dx + \int_4^8 5 dy = \\ &\quad \underbrace{\int_0^5 x dx}_{y=4 \quad dy=0} \quad \underbrace{\int_4^8 5 dy}_{x=5 \quad dx=0} \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 + [5y]_4^8 = \frac{25}{2} + 40 - 20 = 32,5 \text{ J} \end{aligned}$$

c) Raoneu si la força $\vec{F}$ és conservativa.

Aquesta força no és conservativa perquè hem comprovat que el treball que realitza entre dos punts depèn del camí seguit.

54. La força que actua sobre un projectil de 2 g de massa i 50 cm de longitud, mentre aquest és al canó, la dona l'expressió $\vec{F} = 180 - 360x$. Determineu la velocitat i l'energia cinètica a la sortida del canó.

$$\vec{F} = 180 - 360x$$

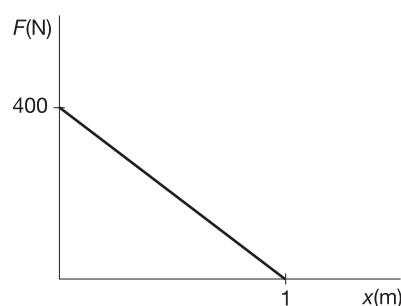
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,5} (180 - 360x) dx = \left[180x - \frac{360x^2}{2} \right]_0^{0,5} = \\ &= 180 \cdot 0,5 - 180 \cdot 0,5^2 = 45 \text{ J} \end{aligned}$$

$$W = \Delta E_c = E_{cf} - E_{c0} = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{2 \cdot 10^{-3}}} = 212,13 \text{ m/s}$$

55. La força amb què els gasos procedents de l'explosió de la càrrega de combustió actuen en l'interior d'un fusell sobre un projectil de 5 g de massa la dona l'expressió $F = 400 - 400x$. Si el projectil surt del fusell amb una velocitat de 200 m/s, calculeu l'energia cinètica en l' instant de sortir del fusell i la longitud del fusell.

Primer representem la força que actua sobre el projectil:



La gràfica talla l'eix Y en el valor $F = 400$ i a l'eix X en el valor:

$$400 - 400x = 0 \rightarrow x = 1 \text{ m}$$

Busquem el treball fet per la força sobre el projectil a partir de la variació en la seva energia cinètica:

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m \cdot (v_f^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} 0,005 \cdot (200^2 - 0) = 100 \text{ J}$$

Aquest valor coincideix amb el de l'energia cinètica en l' instant de sortir del fusell.

Ara cal trobar en la gràfica anterior, el desplaçament tal que l'àrea de la funció és igual a aquest valor del treball:

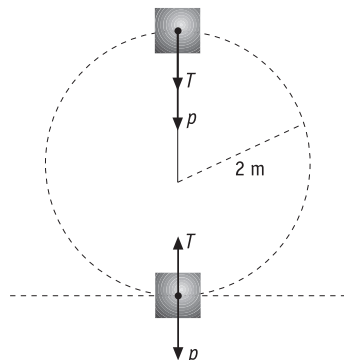
$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^x F(x) dx = \int_0^x (400 - 400x) dx = [400x - 200x^2]_0^x = \\ &= 400x - 200x^2 \end{aligned}$$

Busquem per a quin valor de desplaçament s'obté el treball:

$$400x - 200x^2 = 100 \rightarrow x_1 = 0,3 \text{ m}; x_2 = 1,7 \text{ m}$$

Aquests són els possibles valors de la longitud del fusell.

56. Un cos de 50 g lligat a l'extrem d'un fil de 2 m descriu una trajectòria circular vertical. La velocitat al punt més alt de la trajectòria és de 10 m/s.



$$v = 10 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} E_p &= mgh \\ E_c &= \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} E_p &= 0 \\ E_c &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned} \right\}$$

- a) Dibuixeu totes les forces i calculeu la tensió del fil en el punt més alt.

$$P + T = m \frac{v^2}{r}$$

$$T = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right) = 0,05 \cdot \left(\frac{10^2}{2} - 9,8 \right) = 2,01 \text{ N}$$

- b) Calculeu la velocitat del cos i la tensió del fil en el punt més baix.

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 4} = 13,4 \text{ m/s}$$

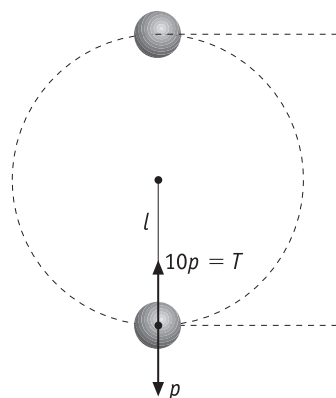
$$T - p = m \frac{v^2}{r}$$

$$T = m \left(\frac{v^2}{r} + g \right) = 0,05 \cdot \left(\frac{13,4^2}{2} + 9,8 \right) = 4,95 \text{ N}$$

- c) Calculeu el treball fet per la tensió del fil durant una volta.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ ja que } \vec{F} \text{ i } d\vec{r} \text{ són perpendiculars.}$$

57. Es fa girar en un pla vertical un cos que està enganxat a un fil d'1 m de longitud. Calculeu quina ha de ser la velocitat horitzontal que s'ha de comunicar a la corda en la posició més alta perquè la tensió de la corda en la posició més baixa sigui 10 vegades més gran que el pes.



$$10p - p = m \frac{v^2}{r} \rightarrow 9p = m \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$9mg = m \frac{v^2}{r} \rightarrow 9g = \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$v = \sqrt{9gr} = \sqrt{9 \cdot 9,8 \cdot 1} = \sqrt{88,2} = 9,39 \text{ m/s}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dalt: } E_c + E_p &= \frac{1}{2} m v'^2 + mg2l \\ \text{Baix: } E_c + E_p &= \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned} \right\}$$

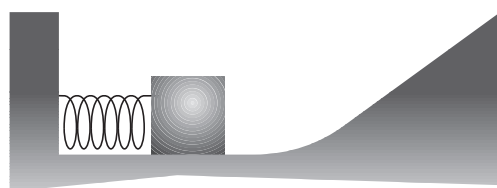
$$\frac{1}{2} m v'^2 + mg2l = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m v'^2 + mg2l = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow$$

$$v'^2 = 2 \left(\frac{1}{2} v^2 - 2gl \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow v' = \sqrt{v^2 - 4gl} = \sqrt{9,39^2 + 4 \cdot 9,8 \cdot 1} = \sqrt{49} = 7 \text{ m/s}$$

58. Una molla de constant elàstica 125 N/m que és sobre un pla horitzontal es comprimeix 50 cm amb un cos de 200 g de massa, de manera que dispara aquest cos. Calculeu l'altura a què arriba el cos en el pla inclinat, si entre el cos i la superfície no hi actua el fregament.

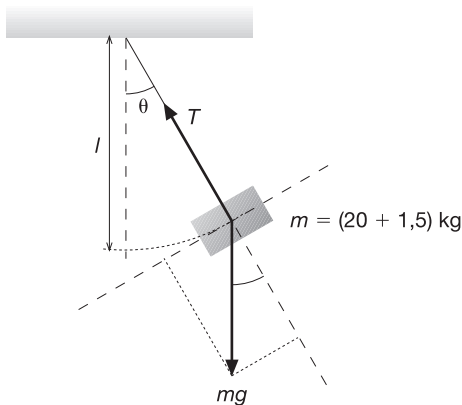


$$E_{pe} + E_{pq} \rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = mgh$$

$$h = \frac{kx^2}{2mg} = \frac{125 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 9,8} = 7,97 \text{ m}$$



59. Un gronxador està format per una cadira d'1,5 kg de massa i una cadena d'1,80 m de longitud i massa negligible. Una nena de 20 kg s'hi gronxa. En el punt més alt de l'oscil·lació, la cadena forma un angle de 40° amb la vertical. Determineu:



- a) L'acceleració del gronxador i la tensió de la cadena en el punt més alt de l'oscil·lació.

$$T - mg \cos \theta = 0 \quad (v = 0)$$

$$mg \sin \theta = m a_t$$

$$T = mg \cos \theta = 162 \text{ N}$$

$$a_t = g \sin \theta = 6,3 \text{ m/s}^2$$

- b) La velocitat del gronxador en el punt més baix de l'oscil·lació.

$$E = \text{constant} = U \Big|_{\text{punt més alt}} = E_c \Big|_{\text{punt més baix}}$$

$$mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta)} = 2,9 \text{ m/s}$$

- c) La tensió màxima de la cadena.

$$T - \underbrace{mg \cos \theta}_{\cos \theta \downarrow} = \underbrace{m v^2(\theta)/l}_{v(\theta) \downarrow}$$

quan θ augmenta $T_{\text{màx}}$ en $\theta = 0^\circ$

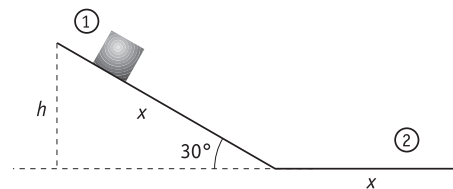
$$T_{\text{màx}} = m \frac{g \cos 0^\circ + v^2(\theta = 0^\circ)}{l} = 310 \text{ N}$$

60. Una bola de 500 g que es deixa caure des d'una altura de 3 m sobre una superfície de sorra penetra 15 cm en la sorra abans d'aturar-se. Determineu la força, suposada constant, de la sorra sobre la bola.

$$\Delta E = W_{\text{fnc}} \rightarrow E_{p_f} - E_{p_i} = F \Delta x \rightarrow mg(h - h_0) = F \Delta x \rightarrow$$

$$\rightarrow 0,5 \cdot 9,8(-0,15 - 3) = F \cdot 0,15 \rightarrow F = -102,9 \text{ N}$$

61. Un cos llisca per un pla inclinat que forma un angle de 30° amb l'horitzontal i continua movent-se per un pla horitzontal fins a aturar-se. Determineu el coeficient de fregament dels plans, si la distància que ha recorregut el cos pel pla inclinat és la mateixa que pel pla horitzontal.



$$\Delta E = W_{\text{fnc}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} m v^2 - mgh = -\mu mg \cos \alpha x$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} v^2 - gx \sin 30^\circ = -\mu g \cos 30^\circ x$$

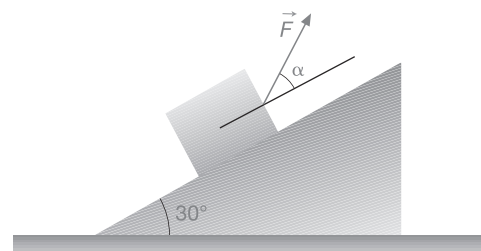
$$\textcircled{2} \quad -\frac{1}{2} m v^2 = -\mu mgx \rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \mu gx$$

$$\mu gx - gx \sin 30^\circ = -\mu g \cos 30^\circ x$$

$$\mu - \sin 30^\circ = -\mu \cos 30^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = 0,27$$

62. Volem fer pujar amb velocitat constant un cos de massa 10 kg per un pla inclinat i per fer-ho li apliquem una força F . El coeficient de fregament dinàmic entre el cos i el pla inclinat és $\mu = 0,3$.



- a) Quant ha de valer el mòdul de F si la seva direcció és paral·lela al pla inclinat ($\alpha = 0$)?

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

$$F = 0 \rightarrow F - F_f - p_x = 0 \rightarrow F = F_f + p_x =$$

$$= \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) =$$

$$= 10 \cdot 9,8(0,3 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) = 74,5 \text{ N}$$



- b) En aquest cas, quant varien l'energia cinètica i l'energia potencial gravitatòria del cos si el cos es desplaça una distància de 5 m pel pla inclinat? Quin treball fan F i la força de fregament en aquest trajecte?

$$\Delta E_c = 0 \Rightarrow v = \text{constant}$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin \alpha$$

$$\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = mgh - 0 = mgx \sin \alpha =$$

$$= 10 \cdot 9,8 \cdot 5 \sin 30^\circ = 245 \text{ J}$$

$$W_F = F \Delta x = 74,5 \cdot 5 = 372,5 \text{ J}$$

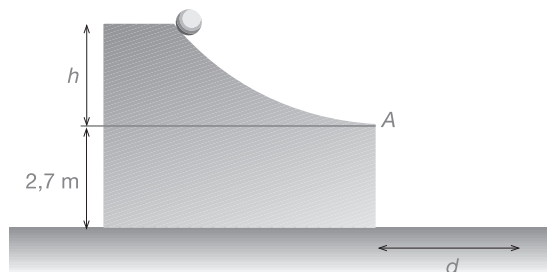
$$W_{f_f} = -F_f \Delta x = -\mu mg \cos \alpha \Delta x =$$

$$= -0,3 \cdot 10 \cdot 9,8 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 = -127,3 \text{ J}$$

- c) En el cas que α fos com es representa a la figura, raoneu si la força de fregament seria més gran o més petita que per a $\alpha = 0$.

$F_y + N' = p_y \rightarrow N' = p_y - F_y \Rightarrow N' < N$, per tant la força de fregament serà més petita.

63. Un objecte puntual baixa sense fricció per la rampa representada a la figura. En arribar al punt A té una velocitat horitzontal $v = 5 \text{ m/s}$ i després vola fins a terra.



- a) Quant val h ?

$$E_i = E_f \rightarrow mgh = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,8} =$$

$$= 1,28 \text{ m}$$

- b) A quina distància d de la paret vertical arriba l'objecte?

És un llançament horitzontal:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y} \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ x &= x_0 + v_{0x} \Delta t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a \Delta t \\ v_x &= v_{0x} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 2,7 - 4,9 t^2 \\ x &= 5 t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_y &= -9,8 t \\ v_x &= 5 \end{aligned}$$

Quan $y = 0$

$$0 = 2,7 - 4,9 t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2,7}{4,9}} = 0,74 \text{ s}$$

$$x = 5 \cdot 0,74 = 3,7 \text{ m}$$

- c) Determineu el mòdul de la velocitat de l'objecte quan és a 1 m de terra. Quin angle forma aquesta velocitat amb la vertical?

$$\text{Si } y = 1 \text{ m}$$

$$1 = 2,7 - 4,9 t^2 \rightarrow 1,7 = 4,9 t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1,7}{4,9}} = 0,6 \text{ s}$$

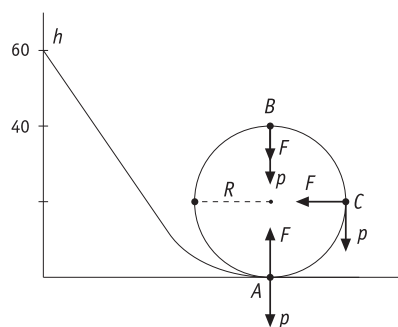
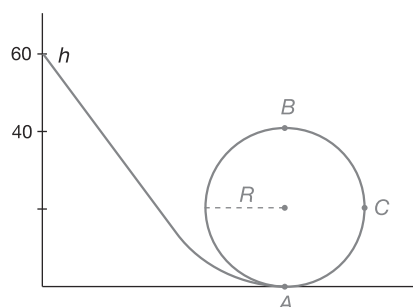
$$\left. \begin{aligned} v_x &= 5 \text{ m/s} \\ v_y &= -9,8 \cdot 0,6 = -5,8 \text{ m/s} \end{aligned} \right\}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + (-5,8)^2} = 7,66 \text{ m/s}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-5,8}{5} = -1,16 \rightarrow$$

$$\alpha = \arctg(-1,16) = 310,7^\circ$$

64. Un cos llisca sense fregament des d'una altura de 60 m i efectua un ris de 20 m de radi. Calculeu la força que fa la superfície sobre el cos en els punts A, B i C.



$$\text{A: } mgh = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow v^2 = 2gh$$

$$F - p = m \frac{v^2}{R} \rightarrow F = mg + m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow F = mg + m \frac{2gh}{R} \rightarrow mg \left(1 + \frac{2 \cdot 60}{R} \right)$$

$$\rightarrow F = 7 mg$$

$$\text{B: } mgh \rightarrow m \cdot 2R + \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow$$

$$v^2 = 2gh - 4gR = 2g \cdot 60 - 4g \cdot 20 =$$

$$120g - 80g = 40g$$



$$p + F = m \frac{v^2}{R} \rightarrow F = m \frac{v^2}{R} - mg \rightarrow$$

$$F = m \frac{40g}{R} - mg \rightarrow F = mg \left(\frac{40}{20} - 1 \right) = mg$$

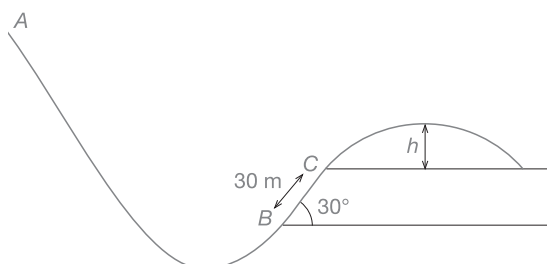
C: $F = m \frac{v^2}{R}$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + mgR \rightarrow$$

$$v^2 = 2gh - 2gR = 2g \cdot 60 - 2g \cdot 20 = 80g$$

$$F = m \frac{80g}{R} = m \frac{80g}{20} = 4mg$$

65. Un esquiador de 80 kg que surt des de A arriba a B amb una velocitat de 30 m/s, i quan passa per C la seva velocitat és de 23 m/s. La distància entre B i C és de 30 m.



- a) Quant han variat les energies cinètica i potencial de l'esquiador en anar des de B fins a C?

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} m v_c^2 - \frac{1}{2} m v_b^2 = \frac{1}{2} m (v_c^2 - v_b^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot (23^2 - 30^2) = -14840 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= mgh_c - mgh_b = mgx \sin 30^\circ = \\ &= 80 \cdot 9,8 \cdot 30 \sin 30^\circ = 11760 \text{ J} \end{aligned}$$

- b) Quanta energia s'ha perdut per fregament en el tram recte BC? Quant val la força de fregament, suposada constant, en aquest tram?

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = -14840 + 11760 = -3080 \text{ J}$$

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow \Delta E = F_f \Delta x \rightarrow$$

$$\rightarrow F_f = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{-3080}{30} = -102,67 \text{ N}$$

- c) Si la pista s'acaba a C i l'esquiador fa un salt parabòlic, quina és la màxima altura h que assolirà, mesurada sobre el nivell de C (vegeu la figura)? Suposeu negligibles els efectes del fregament amb l'aire.

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y} \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ x &= x_0 + v_{0x} \Delta t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a \Delta t \\ v_x &= v_{0x} \end{aligned}$$

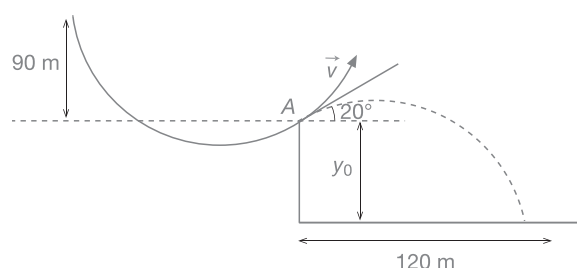
$$\left. \begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \sin \alpha = 30 \sin 30^\circ = 15 \\ v_{0x} &= v_0 \cos \alpha = 30 \cos 30^\circ = 25,98 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= 6,8 - 4,9 t^2 \\ x &= 18,8 t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} v_y &= 6,8 - 9,8 t \\ v_x &= 18,8 \end{aligned} \right\}$$

$$v_y = 0 \rightarrow t = \frac{15}{9,8} = 1,53 \text{ s}$$

$$y = 15 \cdot 1,53 - 4,9 \cdot 1,53^2 = 11,48 \text{ m}$$

66. Un esquiador de 70 kg de massa llisca per un trampolí de 200 m de longitud. Durant aquest trajecte, l'esquiador perd 90 m d'altura i sobre ell actua una força de fregament amb la neu que suposem constant i de valor 100 N. La velocitat de l'esquiador just quan perd el contacte amb el trampolí i comença el vol forma un angle de 20° respecte de l'horitzontal. L'esquiador aconsegueix fer un salt de 120 m de longitud. Suposant negligible el fregament entre l'esquiador i l'aire, calculeu:



- a) L'energia que perd per fregament l'esquiador en el recorregut pel trampolí.

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow \Delta E = F_f \Delta x = -100 \cdot 200 = -20000 \text{ J}$$

- b) El mòdul i els components del vector velocitat $\vec{v}$.

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow W_{fnc} = \frac{1}{2} m v^2 - mgh \rightarrow$$

$$\rightarrow -20000 = \frac{1}{2} \cdot 70 v^2 - 70 \cdot 9,8 \cdot 90 \rightarrow$$

$$\rightarrow -20000 = 35 v^2 - 61740 \rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{61740 - 20000}{35}} = 34,53 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = v \cos 20^\circ \vec{i} + v \sin 20^\circ \vec{j} =$$

$$= 34,53 \cos 20^\circ \vec{i} + 34,53 \sin 20^\circ \vec{j} =$$

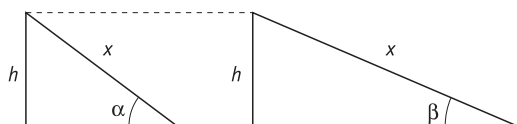
$$= 32,45 \vec{i} + 11,81 \vec{j} \text{ m/s}$$

- c) El desnivell y_0 que hi ha entre el punt A, on l'esquiador ha començat el vol, i la pista a què arriba.

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + v_{oy} \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ x &= x_0 + v_{ox} \Delta t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= y_0 + 11,81 t - 4,9 t^2 \\ x &= 32,45 t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x = 120 &\rightarrow t = \frac{120}{32,45} = 3,7 \text{ s} \\ y = 0 &\rightarrow 0 = y_0 + 11,81 \cdot 3,7 - 4,9 \cdot 3,7^2 \rightarrow y_0 = 23,4 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

67. Per dos plans inclinats d'igual alçada però de diferents angles d'inclinació llisquen sense fregament dos cossos que parteixen del repòs des de la part superior. Calculeu les velocitats respectives quan arriben a la base del pla inclinat:



- a) Aplicant les lleis de Newton.

Apliquem la 2a llei de Newton, l'equació del moviment i l'equació de la velocitat del MRUA, i tenim en compte les condicions inicials de l'enunciat:

$$F = ma \rightarrow mg \sin \alpha = ma \rightarrow a = g \sin \alpha$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

$$v = at \rightarrow v = g \sin \alpha t^2$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{x}$$

Aïllant i substituint, trobem que:

$$x = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

$$\rightarrow gh = \frac{1}{2} g^2 \sin^2 \alpha t^2 \rightarrow$$

$$gh = \frac{1}{2} v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

- b) Aplicant el principi de conservació de l'energia.

Aplicant el principi de conservació de l'energia mecànica:

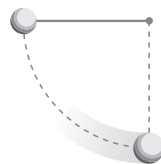
$$\text{Inici: } E_c = 0 \quad \text{Final: } E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = mgh \quad E_p = 0$$

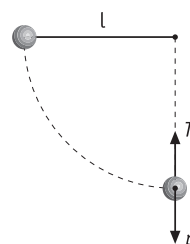
$$E_{\text{inici}} = E_{\text{final}} \rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Observeu que s'ha arribat al mateix resultat en els dos casos, i que la velocitat amb què arriba un cos a la part inferior del pla inclinat no depèn de l'angle d'inclinació.

68. Deixem anar un pèndol simple des de la posició horitzontal. Demostreu que la tensió del fil, en passar per la posició vertical, és tres vegades el pes del cos.



Representem totes les forces que actuen en la posició vertical i apliquem la 2a llei de Newton:



$$F = ma \rightarrow T - p = m a_n \rightarrow T - p = m \frac{v^2}{l} \rightarrow$$

$$T = m \left(g + \frac{v^2}{l} \right)$$

Per determinar la velocitat que porta el pèndol en la posició vertical, apliquem el principi de conservació de l'energia mecànica. Considerem la referència d'energia potencial zero en la posició més baixa del pèndol:

$$\text{Inici: } E_c = 0 \quad \text{Final: } E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

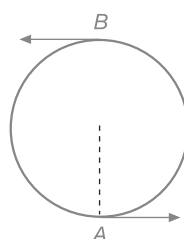
$$E_p = mgl \quad E_p = 0$$

$$E_i = E_f \rightarrow mgl = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gl}$$

Substituïm a l'expressió de la tensió:

$$T = mg + m \frac{v^2}{l} \rightarrow T = mg + m \frac{2gl}{l} \rightarrow T = 3mg$$

69. Un avió de massa M fa un ris (loop) de manera que segueix una trajectòria circular i vertical de radi R . Quin treball fa la força pes quan l'avió va del punt més alt B al punt més baix A de la trajectòria? Quin treball fa aquesta força en fer una volta completa de A a A?



Tenint en compte que la força pes és una força conservativa.

$$W_{p(A \rightarrow B)} = mg \Delta x = mg 2R$$

$$W_{p(A \rightarrow A)} = 0$$

70. Un jugador de futbol, que està parat amb la pilota als peus, passa la pilota a un company que es troba 15 m davant seu i que s'està allunyant amb velocitat constant en la direcció de la recta que uneix els dos jugadors. La pilota té una massa de 400 g i surt dels peus del primer jugador amb una velocitat de 20 m/s, formant un angle de 20° respecte del terra. Calculeu:

- a) La màxima altura assolida per la pilota en la seva trajectòria.

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha = 20 \cos 20^\circ = 18,8 \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha = 20 \sin 20^\circ = 6,8 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y} \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ x &= x_0 + v_{0x} \Delta t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a \Delta t \\ v_x &= v_{0x} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= 6,8 - 4,9 t^2 \\ x &= 18,8 t \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} v_y &= 6,8 - 9,8 t \\ v_x &= 18,8 \end{aligned} \right\}$$

$$y_{\max} \rightarrow v_y = 0 \rightarrow 0 = 6,8 - 9,8 t \rightarrow t = \frac{6,8}{9,8} = 0,7 \text{ s}$$

$$y_{\max} = 6,8 \cdot 0,7 - 4,9 \cdot 0,7^2 = 2,35 \text{ m}$$

- b) La velocitat que ha de dur el segon jugador perquè la pilota caigui als seus peus just quan aquesta arribi al terra.

$$x_{\max} \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 6,8 t - 4,9 t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t(6,8 - 4,9 t) = 0 \rightarrow t = \frac{6,8}{4,9} = 1,4 \text{ s}$$

$$x_{\max} = 18,8 \cdot 1,4 = 26,3 \text{ m}$$

$$x_2 = x_0 + v \Delta t \rightarrow 26,3 = 15 + v \cdot 1,4 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \frac{26,3 - 15}{1,4} = 8,1 \text{ m/s}$$

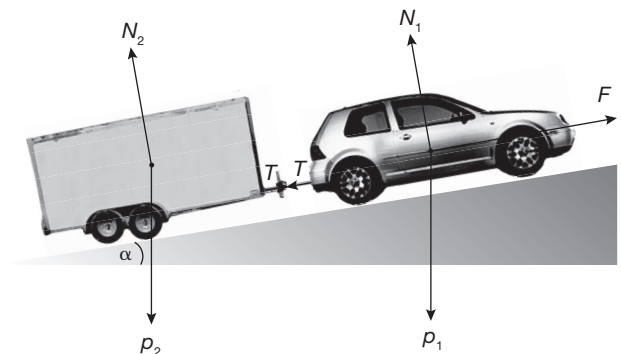
- c) Els components horitzontal i vertical de l'impuls mecànic que ha comunicat a la pilota el primer jugador.

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t = m \vec{v}$$

$$\vec{I} = m(v_{0x}, v_{0y}) = 0,4 (18,8, 6,8) = (7,52, 2,72) \text{ Ns}$$

71. Un cotxe de massa 1500 kg arrossega un remolc de 500 kg. Inicialment el cotxe està aturat en un semàfor i arrenca amb una acceleració constant de 2 m/s^2 . La carretera sobre la qual circula és ascendent i té una inclinació constant de 10° . Suposant que les forces de fricció sobre el cotxe i sobre el remolc són negligibles:

- a) Feu un esquema amb totes les forces que actuen sobre el remolc. Per a cadascuna d'aquestes, indiqueu sobre quin cos s'aplicarà la força de reacció corresponent.



- b) Calculeu la força de tracció que fa el motor del cotxe i la força amb què el cotxe estira el remolc.

$$m_1 = 1500 \text{ kg}; m_2 = 500 \text{ kg}; a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$T - m_2 g \sin 10^\circ = m_2 a \rightarrow T - 500 \cdot 9,8 \cdot \sin 10^\circ = 500 \cdot 2$$

$$\rightarrow T = 1851 \text{ N}$$

$$F - T - p_{x1} = m_1 a \rightarrow F - T - m_1 g \sin 10^\circ = m_1 a$$

$$\rightarrow F - 1851 - 1500 \cdot 9,8 \sin 10^\circ = 1500 \cdot 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow F = 7403,5 \text{ N}$$

- c) Quina haurà estat la variació de l'energia mecànica del cotxe en un recorregut de 25 m a partir del punt d'arrencada?

1r mètode

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow \Delta E = F \Delta x = 7403,5 \cdot 25 = 1,85 \cdot 10^5 \text{ J}$$

2n mètode

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 25 = \frac{1}{2} 2 \cdot t^2 \rightarrow t = 5 \text{ s} \\ v &= a t \rightarrow v = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m/s} \end{aligned} \right\}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 10^\circ = 25 \sin 10^\circ = 4,34 \text{ m}$$

$$\Delta E = E_{cf} + E_{pf} = \frac{1}{2} m v^2 + m g h =$$

$$= \frac{1}{2} 2000 \cdot 10^2 + 2000 \cdot 9,8 \cdot 4,34 = 1,85 \cdot 10^5 \text{ J}$$

72. Un cos de 3 kg de massa cau des d'una certa altura amb una velocitat inicial de 2 m/s dirigida verticalment cap avall. Calculeu el treball fet durant 10 s contra les forces de resistència que suposem constants, si se sap que al final d'aquest temps la velocitat del cos és de 50 m/s .

$$a_g + a_R = a_{\text{baixa}}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + a t \\ y &= y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \right\}$$



$$-50 = -2 + a \cdot 10 \rightarrow a = \frac{-50 + 2}{10} = -4,8 \text{ m/s}^2$$

$$a_R = 9,8 - 4,8 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$y = y_0 = -2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 10^2 = -260 \text{ m/s}^2$$

$$W = m a_R y = 3 \cdot 5 \cdot 260 = 3900 \text{ J}$$

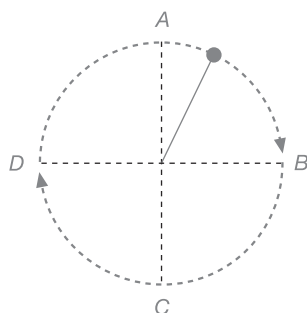
Per energies:

$$\Delta E = -W \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh = -W$$

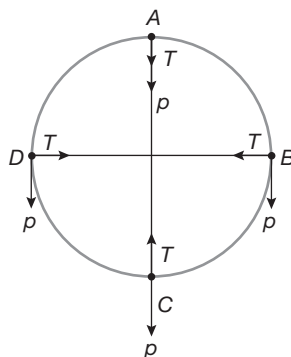
$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 50^2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 9,8 \cdot 260 = -3900 \text{ J} = -W$$

$$W = 3900 \text{ J}$$

73. Un cos de 200 g lligat a un cordill de massa negligible i 60 cm de llargada gira en un pla vertical. En el punt més alt de la seva trajectòria (A) el cos té una velocitat de 3 m/s:



- a) Feu un esquema de les forces degudes a la corda i al pes que actuen sobre el cos quan la corda està horitzontal i quan està vertical (quan el cos passa per A, per B, per C i per D).



- b) Calculeu la tensió de la corda quan el cos passa per A.

$$p + T = m a_n \rightarrow T = m a_n - mg = m \left(\frac{v^2}{R} - g \right) =$$

$$= 0,2 \left(\frac{3^2}{0,6} - 9,8 \right) = 1,04 \text{ N}$$

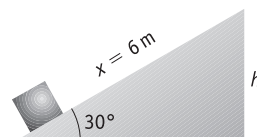
- c) Quina és la velocitat del cos quan passa pel punt més baix (C)?

$$\left. \begin{aligned} E_{pA} &= mgh \\ E_{cA} &= \frac{1}{2} m v_A^2 \\ E_{pC} &= 0 \\ E_{cC} &= \frac{1}{2} m v_C^2 \end{aligned} \right\}$$

$$mgh + \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 \rightarrow g2R + \frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{2} v_C^2$$

$$v_C = \sqrt{4gR + v_A^2} = \sqrt{4 \cdot 9,8 \cdot 0,6 + 3^2} = 5,7 \text{ m/s}$$

74. Un bloc de 5 kg és llançat cap amunt per un pla inclinat de 30° amb una velocitat de 10 m/s. Si recorre una distància de 6 m sobre la superfície inclinada del pla i després llisca cap avall fins al punt de partida, calculeu la força de fregament que actua sobre el bloc i la velocitat amb què el bloc torna a la posició inicial.



$$\Delta E = -W_{fnc}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \sin 30^\circ$$

$$mgh - \frac{1}{2} m v^2 = -F_f x$$

$$mgx \sin 30^\circ - \frac{1}{2} m v^2 = -F_f x$$

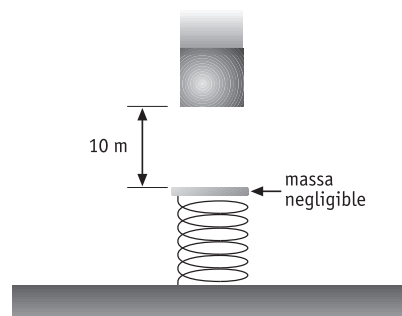
$$5 \cdot 9,8 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = -F_f \cdot 6 \rightarrow F_f = 17,17 \text{ N}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - mgh = -F_f x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot v^2 - 5 \cdot 9,8 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = -17,17 \cdot 6$$

$$\rightarrow v = 4,19 \text{ m/s}$$

75. Deixem caure un cos de 50 g sobre una molla que té una constant elàstica de 200 N/m. Si la distància entre el cos i la molla és de 10 m, calculeu la deformació de la molla.



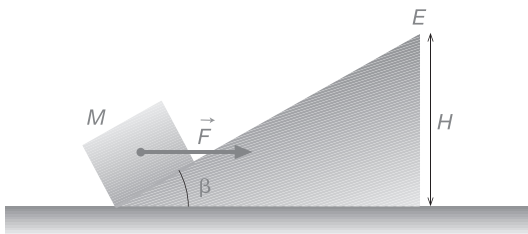


$$mgh = \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 0,05 \cdot 9,8 \cdot 10}{200}} \rightarrow x = 0,22 \text{ m}$$

76. Sobre una massa $M = 5 \text{ kg}$, que es troba en repòs a la base del pla inclinat de la figura, s'aplica una força horitzontal F de mòdul 50 N . En arribar a l'extrem superior E , situat a una altura $H = 10 \text{ m}$ respecte del terra horitzontal, la força F deixa d'actuar. Si el coeficient de fricció durant el moviment entre la massa i el pla inclinat val $\mu = 0,2$ i l'angle del pla amb l'horitzontal $\beta = 30^\circ$, calculeu:



- a) La força normal i la força de fregament entre la massa i el pla inclinat.

$$N - F_y - p_y = 0 \rightarrow N = F_y + p_y = F \sin \beta + mg \cos \beta =$$

$$= 50 \sin 30^\circ + 5 \cdot 9,8 \cos 30^\circ = 67,4 \text{ N}$$

$$F_f = \mu N = 0,2 \cdot 67,4 = 13,5 \text{ N}$$

- b) La velocitat de la massa en arribar a l'extrem superior E .

$$\sin \beta = \frac{h}{\Delta x} \rightarrow \Delta x = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow E_f - E_i = -F_f \Delta x + F_x \rightarrow$$

$$\rightarrow mgh + \frac{1}{2} mv^2 = -F_f \frac{h}{\sin \beta} + F \cos \beta \frac{h}{\sin \beta} \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 \cdot 9,8 \cdot 10 + \frac{1}{2} 5 \cdot v^2 =$$

$$= -13,49 \frac{10}{\sin 30^\circ} + 50 \cos 30^\circ \frac{10}{\sin 30^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow 490 + 2,5v^2 = 596,22 \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{596,22 - 490}{2,5}} = 6,51 \text{ m/s}$$

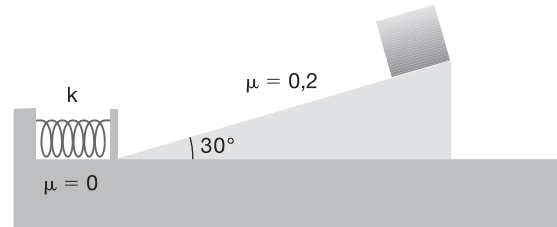
- c) L'energia cinètica amb què la massa arribarà al terra. Quin tipus de trajectòria seguirà la massa després de passar per E ?

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_{p_i} + E_{c_i} = E_{c_f}$$

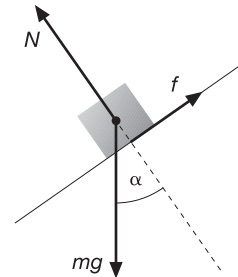
$$E_{c_f} = mgh + \frac{1}{2} mv^2 = 5 \cdot 9,8 \cdot 10 + \frac{1}{2} 5 \cdot 6,51^2 = 596 \text{ J}$$

La trajectòria és parabòlica.

77. Una vagoneta que pesa 500 N es troba inicialment en repòs al capdamunt d'una rampa de 20 m de llargada, 30° d'inclinació amb l'horitzontal i coeficient de fricció $\mu = 0,2$. La vagoneta es deixa lliure i al final de la rampa continua el seu moviment sobre un pla horitzontal sense fricció, on topa amb una molla de constant recuperadora $k = 7 \cdot 10^4 \text{ N/m}$. Calculeu:



- a) La velocitat amb què la vagoneta arriba al final de la rampa.



$$f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$$

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$-\mu mg \cos \alpha \cdot l = \frac{1}{2} mv^2 - mgl \sin \alpha$$

$$v = [2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)]^{1/2} = 11,43 \text{ m/s}$$

- b) El temps que la vagoneta triga a arribar al final de la rampa.

Es tracta d'un MUA:

$$v = v_0 + at \rightarrow v = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t \rightarrow t = 3,5 \text{ s}$$

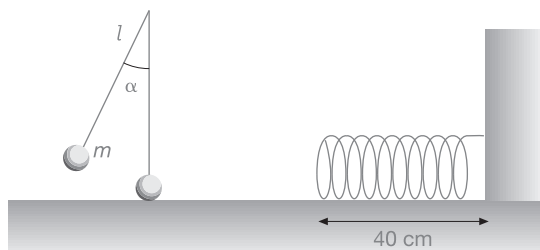
- c) La deformació màxima que es produeix en la molla, si no s'ha perdut energia mecànica en la col·lisió.

Considereu $g = 10 \text{ m/s}^2$.

$$\left. \begin{aligned} E_m = \text{constant} &\rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 \\ m = \frac{mg}{g} &= \frac{500 \text{ N}}{10 \text{ m/s}^2} = 50 \text{ kg} \end{aligned} \right\} \rightarrow x = 0,3 \text{ m}$$

78. Una massa de 500 g penja d'un fil de 2 m de longitud. Es deixa anar la massa quan el fil forma un angle α amb la vertical, i quan passa pel punt més baix la seva velocitat és de 3 m/s . En aquest instant es trenca la corda i la massa m continua movent-se sobre el pla horitzontal fins a topa

amb una molla. La compressió màxima de la molla deguda al xoc amb la massa m és de 40 cm. Es demana:



a) La tensió de la corda just abans de trencar-se.

$$F = ma \rightarrow T - p = ma_n = m \frac{v^2}{l} \rightarrow T = m \left(\frac{v^2}{l} + g \right) = 0,5 \left(\frac{3^2}{2} + 9,8 \right) = 7,15 \text{ N}$$

b) El valor de l'angle α .

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} \rightarrow h = l(1 - \cos \alpha)$$

$$E_i = E_f \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow gl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}v^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{v^2}{2gl} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{2gl} = 1 - \frac{3^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 2} = 0,77$$

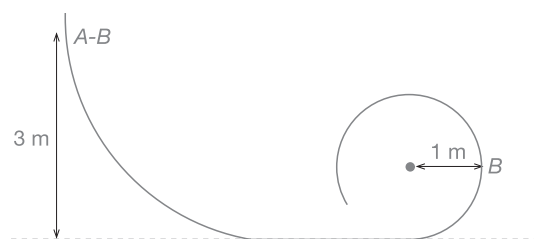
$$\rightarrow \alpha = 39,6^\circ$$

c) La constant recuperadora (k) de la molla.

Considereu negligible el fregament entre la massa i el pla.

$$E_i = E_f \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow k = \frac{mv^2}{x^2} = \frac{0,5 \cdot 3^2}{0,4^2} = 28,1 \text{ N/m}$$

79. Deixem caure una massa puntual de 2 kg des de l'extrem A de la guia representada a la figura, situat a 3 m de terra. L'altre extrem de la guia descriu un cercle de radi 1 m, en un pla vertical.



Suposeu que no hi ha fregament a la guia, i determineu:

a) La velocitat de la partícula en el punt B.

$$\left. \begin{array}{l} E_{pA} = mgh \\ E_{cA} = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} E_{pB} = mgR \\ E_{cB} = \frac{1}{2}mv_B^2 \end{array} \right\}$$

Aplicant el principi de conservació de l'energia mecànica:

$$mgh = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2 \cdot 9,8(3-1)} = 6,3 \text{ m/s}$$

b) La força que la guia fa sobre la partícula en el punt B.

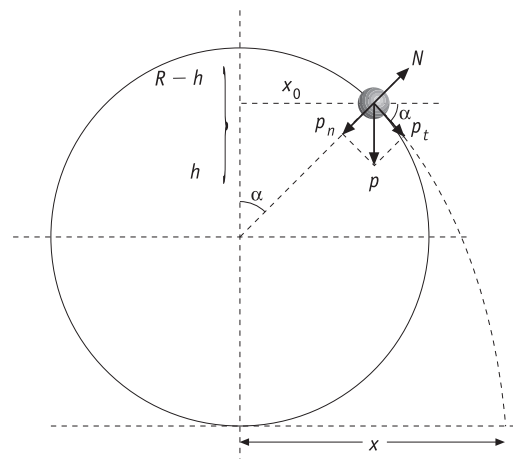
$$F = ma_n \rightarrow T = m \frac{v_B^2}{R} = 2 \cdot \frac{6,3^2}{1} = 78 \text{ N}$$

c) El mòdul de l'acceleració total de la partícula en el punt B.

$$a_n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{6,3^2}{1} = 39,7 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

80. Una anella de radi R està fixada verticalment en el terra. De la part de dalt llisca sense fregament un cos. A quina distància del punt fixat amb el terra cau el cos?



$$\cos \alpha = \frac{h}{R}$$

$$p_n - N = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{Punt on cau: } N = 0$$

$$p_n = m \frac{v^2}{R} \rightarrow p \cos \alpha = m \frac{v^2}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R} \rightarrow g \frac{h}{R} = \frac{v^2}{R} \rightarrow v = \sqrt{gh}$$



Principi de conservació de l'energia:

$$\text{Inici: } E_p = mg2R \quad \text{Final: } E_p = mg(R + h)$$

$$E_c = 0 \quad E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

$$mg2R = mg(R + h) + \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow$$

$$2gR = g(R + h) + \frac{1}{2} g h$$

$$\rightarrow 2R = R + h + \frac{h}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \frac{3}{2} h \rightarrow h = \frac{2}{3} R$$

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{\frac{2}{3} gR}$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \frac{R}{R} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x_0}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{4}{9} R^2}}{R} = \\ &= \frac{\sqrt{R^2 \left(1 - \frac{4}{9}\right)}}{R} = \sqrt{\frac{9 - 4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{4}{9} R^2} = \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{4}{9}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} R = 0,74 R \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} \Delta t^2$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (x_0, R + h) = \left(0,74 R, R + \frac{2}{3} R\right) = \\ &= \left(0,74 R, \frac{5}{3} R\right) = (0,74 R, 1,67 R) \end{aligned}$$

$$\vec{v}_0 = (v \cos \alpha, -v \sin \alpha) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{3} gR} \cdot \frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3} gR} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{8}{27} gR}, -\sqrt{\frac{10}{27} gR}\right) =$$

$$= (1,7 \sqrt{R} - 1,9 \sqrt{R})$$

$$\vec{a} = (0, -9,8)$$

$$t_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0,74 R, 1,67 R) + (1,7 \sqrt{R} - 1,9 \sqrt{R}) t + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (0, -9,8) t^2 \end{aligned}$$

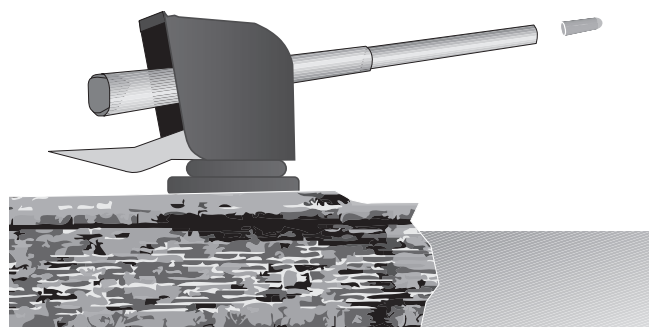
$$\begin{cases} x = 0,74 R + 1,7 \sqrt{R} t \\ y = 1,67 R - 1,9 \sqrt{R} t - 4,9 t^2 \end{cases}$$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow 4,9 t^2 + 1,9 \sqrt{R} t - 1,67 R = 0$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{-1,9 \sqrt{R} \pm \sqrt{1,92 \cdot (\sqrt{R})^2 \cdot 4 \cdot 1,67 R \cdot 4,9}}{9,8} = \\ &= \frac{-1,9 \sqrt{R} \pm \sqrt{3,61 R + 32,73 R}}{9,8} = \\ &= \frac{-1,9 \sqrt{R} + 6,03 \sqrt{R}}{9,8} = \frac{\sqrt{R} (6,03 - 1,9)}{9,8} = 0,42 \sqrt{R} \end{aligned}$$

$$x = 0,74 R + 1,7 \sqrt{R} \cdot 0,42 \sqrt{R} = 0,74 R + 0,716 R = 1,46 R$$

81. Un canó de 5 000 kg dispara un projectil de 40 kg amb una velocitat inicial horitzontal de 300 m/s des d'un penya-segat a una altura de 60 m sobre el nivell del mar. El canó està inicialment en repòs sobre una plataforma amb $\mu = 0,2$. Calculeu:



- a) La velocitat del canó immediatament després que surti el projectil.

$$m_1 = 5\,000 \text{ kg}; m_2 = 40 \text{ kg}; v_2 = 300 \text{ m/s}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \rightarrow$$

$$v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1} = -\frac{40 \cdot 300}{5\,000} = -2,4 \text{ m/s}$$



- b) L'espai recorregut pel canó sobre la plataforma com a conseqüència del tret.

$$\Delta E = W_{fnc} \rightarrow E_{cf} - 2 E_{ci} = -F_f \Delta x \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\mu N \Delta x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \mu m_1 g \Delta x \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta x = \frac{v_1^2}{2g\mu} = \frac{2,4^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 0,2} = 1,47 \text{ m}$$

- c) L'energia cinètica amb què arriba el projectil a l'aigua.

$$E = \text{constant} \rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_2 g h = \frac{1}{2} 40 \cdot 300^2 + 40 \cdot 9,8 \cdot 60 =$$

$$= 1,82 \cdot 10^6 \text{ J}$$

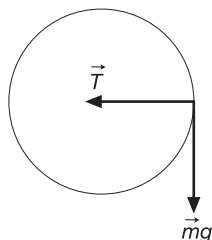
82. Una partícula de massa 0,1 kg, lligada a l'extrem d'un fil, descriu un moviment circular en un pla vertical. Quan el fil es troba en posició horitzontal, la seva tensió és 10 N. Calculeu per a aquesta posició:

- a) L'acceleració centrípeta de la partícula.

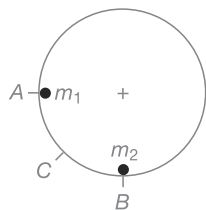
$$T = m a_c \rightarrow a_c = 100 \text{ m/s}^2, \text{ direcció i sentit de } \vec{T}.$$

- b) L'acceleració tangencial de la partícula.

$$mg = m a_t \rightarrow a_t = 10 \text{ m/s}^2, \text{ direcció i sentit de } \vec{g}.$$



83. La figura representa una guia circular en un pla vertical. La bola m_1 , inicialment en repòs en el punt A, llisca per la guia i xoca elàsticament amb la bola m_2 , inicialment en repòs en el punt B. Com a conseqüència del xoc, la bola m_1 retrocedeix fins a la posició C. El fregament és negligible.



- A. La massa de la bola m_2 :

- a) És igual que la de la bola m_1 .
b) És més petita.
c) És més gran.

En ser el xoc elàstic es compleix que la velocitat relativa abans del xoc és igual a la velocitat relativa després del xoc:

$$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$$

En el nostre cas:

$$v_1 = -(v'_1 - v'_2) \rightarrow v'_2 = v_1 + v'_1 = v_1 - |v'_1|,$$

on prenem el sentit positiu de X habitual. La massa 1 assoleix una altura menor que la del punt A. Això significa que el mòdul de la seva velocitat s'ha reduït per efecte del xoc ($|v'_1| < v_1$). Aleshores, de la conservació de la quantitat de moviment es dedueix:

$$m_1 v_1 = m_1 \cdot (-|v'_1|) + m_2 v'_2 \rightarrow m_2 = \frac{1}{v'_2} m_1 (v_1 + |v'_1|) =$$

$$= m_1 \frac{v_1 + |v'_1|}{v_1 - |v'_1|} > m_1$$

donat que $\frac{v_1 + |v'_1|}{v_1 - |v'_1|} > 1$. Per tant, l'opció correcta és la c).

- B. La quantitat de moviment de la bola m_1 després del xoc:

- a) És la mateixa que abans del xoc.
b) És diferent que abans del xoc.
c) Es manté constant.

L'opció correcta és la b) ja que la quantitat de moviment de la massa 1 ha canviat en mòdul i en direcció.

- C. La quantitat de moviment del sistema constituït per les dues boles:

- a) És la mateixa en tot moment des que m_1 ha sortit de A.
b) Varia per efecte del xoc.
c) No varia per efecte del xoc.

L'opció correcta és la c). El xoc no fa variar la quantitat de moviment del sistema, però sí que ho fa la força pes des que la massa 1 està al punt A.

- D. En tot el procés es manté constant:

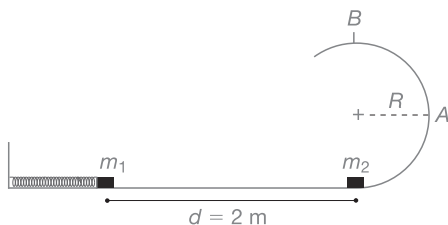
- a) L'energia cinètica del sistema.
b) L'energia mecànica del sistema.
c) L'energia mecànica de m_1 .

L'opció correcta és la b). Com que no hi ha fregament, l'energia mecànica del sistema es manté constant. En canvi, la massa 1 ha perdut part de la seva energia mecànica en interaccionar amb la massa 2.

84. Considereu el sistema de la figura. La massa $m_1 = 1,5 \text{ kg}$ es troba inicialment en repòs, en contacte amb l'extrem d'una molla ideal de constant recuperadora $k = 500 \text{ N/m}$, comprimida 30 cm. La massa $m_2 = 1,5 \text{ kg}$ també es troba inicialment en repòs, a una distància de 2 m de m_1 , a la part inferior d'una pista semicircular de radi $R = 0,25 \text{ m}$.



Al tram horitzontal que separa m_1 de m_2 , el coeficient de fregament és $\mu = 0,2$, mentre que a la pista semicircular el fregament és negligible.



Quan la molla es deixa anar, es descomprimeix i impulsa la massa m_1 , que se separa de la molla i xoca elàsticament amb m_2 . Calculeu:

- a) La velocitat de m_1 un instant abans d'entrar en contacte amb m_2 .

$$W_{nc} = \Delta E$$

$$W_{nc} = -f \cdot d = -\mu m_1 g d \rightarrow W_{nc} = -5,886 \text{ J}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2$$

$$0,75 v_1^2 - 22,5 = -5,886 \rightarrow v_1 = 4,7 \text{ m/s}$$

- b) Les velocitats de les dues masses un instant després d'entrar en contacte.

$$\left. \begin{aligned} v_2' - v_1' &= -(v_2 - v_1) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{aligned} \right\}$$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 0 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 4,7 \text{ m/s}$$

- c) L'acceleració centrípeta de m_2 quan arriba a la part més alta de la pista circular (punt B).

$$\left. \begin{aligned} a_c &= \frac{v_B^2}{R} \\ \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 &= \frac{1}{2} m_2 v_B^2 + m_2 g \cdot 2R \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow a_2 = 49,12 \text{ m/s}^2$$