



■ Introducció al càlcul vectorial

■ Activitats finals

□ Qüestions

1. La suma dels vectors unitaris $\vec{i}$, $\vec{j}$ és un altre vector unitari? Justifiqueu la resposta fent un gràfic.

Els vectors unitaris $\vec{i}$ i $\vec{j}$ són:

$$\vec{i} = (1, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1)$$

El vector suma és: $\vec{i} + \vec{j} = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$

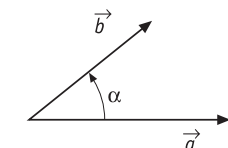
El mòdul del vector suma és $\sqrt{1^2 + 1^2} = 1,41$. Per tant, la suma no és un vector unitari, ja que el seu mòdul no és la unitat.

2. Poseu dos exemples físics en què s'apliqui el producte escalar de dos vectors.

En el càlcul del treball, $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$, i en el càlcul de la potència a partir de la força i la velocitat, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

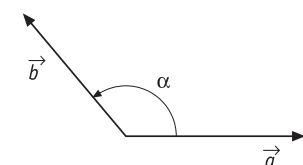
3. Dibuixeu dos vectors tals que el producte escalar sigui:

a) Positiu.



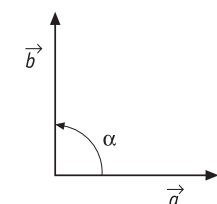
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

b) Negatiu.



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

c) Nul.



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

4. El producte escalar de dos vectors de mòduls 10 i 15 pot ser nul?

Si aquests dos vectors són perpendiculars, el seu producte escalar és nul, ja que $\alpha = 90^\circ$, i $\cos 90^\circ = 0$.

5. Quan un cos es desplaça perpendicularment respecte de la força neta que actua sobre aquest, la força no efectua treball. Per què?

Perquè l'angle que formen és de 90° i $\cos 90^\circ = 0$:

$$\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \Delta x \cos 90^\circ = 0$$

□ Problemes

1. Expressu els vectors següents en forma polar:

$$\vec{a} = (4, 3); \vec{b} = (3, -2); \vec{c} = (2, -4)$$

$$\vec{a} = (4, 3) \rightarrow a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow \alpha = 36,87^\circ$$

$$\vec{b} = (3, -2) \rightarrow b = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3,61$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} = 0,67 \rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

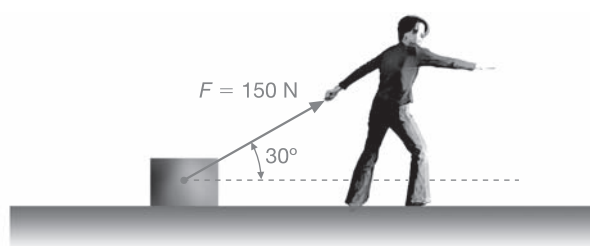
$$\text{És al 4t quadrant} \Rightarrow \alpha = 360^\circ - 33,69^\circ = 326,31^\circ$$

$$\vec{c} = (2, -4) \rightarrow c = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \alpha = 63,43^\circ$$

$$\text{És al 4t quadrant} \Rightarrow 360^\circ - 63,43^\circ = 296,57^\circ$$

2. Un cos està lligat a una corda i un noi tira de la corda amb una força de 150 N. Si la corda forma un angle de 30° amb el terra, quin és el valor de la força que tendeix a fer pujar el cos verticalment?

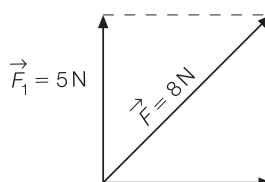


$$F_y = F \sin 30^\circ = 150 \cdot \sin 30^\circ = 75 \text{ N}$$

3. La resultant de dues forces perpendiculars és 8 N. Si una d'elles és de 5 N, quant val l'altra força?

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} = 6,24 \text{ N}$$





4. Donats dos vectors de mòduls 3 i 6 aplicats en un mateix punt, calculeu el mòdul del vector resultant quan formen un angle de:

Apliquem el teorema del cosinus: $s^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$

a) 45°

$$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ \rightarrow s = 8,39$$

b) 30°

$$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ \rightarrow s = 8,73$$

c) 90°

$$s^2 = 3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 90^\circ \rightarrow s = 6,71$$

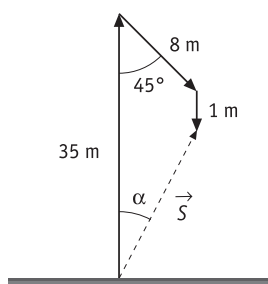
5. Un jugador de golf ha efectuat tres cops per posar la pilota al forat. En el primer cop mou la pilota 35 m cap al nord; en el segon 8 m cap al sud-est, i en el tercer 1 m cap al sud. Quin desplaçament hauria necessitat per ficar la pilota al forat en el primer cop?

component x: $8 \cdot \cos 45^\circ = 5,65$

component y: $35 - 1 - 8 \cdot \sin 45^\circ = 28,34$

$$s = \sqrt{5,65^2 + 28,34^2} = 28,90$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{28,34}{5,65} = 5,01 \rightarrow \alpha = 78,71^\circ$$



6. Donats els vectors en components polars $\vec{a} = 5_{30^\circ}$, $\vec{b} = 6_{60^\circ}$, $\vec{c} = 7_{90^\circ}$, representeu-los gràficament i trobeu:

a) Els vectors en components cartesianes.

$$\vec{a} = 5 \cdot \cos 30^\circ \cdot \vec{i} + 5 \cdot \sin 30^\circ \cdot \vec{j} = 4,33 \vec{i} + 2,5 \vec{j}$$

$$\vec{b} = 6 \cdot \cos 60^\circ \cdot \vec{i} + 6 \cdot \sin 60^\circ \cdot \vec{j} = 3 \vec{i} + 5,2 \vec{j}$$

$$\vec{c} = 7 \cdot \cos 90^\circ \cdot \vec{i} + 7 \cdot \sin 90^\circ \cdot \vec{j} = 7 \vec{j}$$

b) El vector suma dels tres vectors, gràficament i també expressat en components cartesianes i polars.

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{a} = 4,33 \vec{i} + 2,5 \vec{j}$$

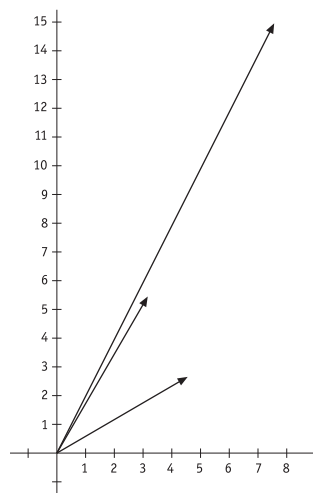
$$\vec{b} = 3,33 \vec{i} + 5,2 \vec{j}$$

$$+ \vec{c} = 4,33 \vec{i} + 7,3 \vec{j}$$

$$\vec{s} = 7,33 \vec{i} + 14,7 \vec{j}$$

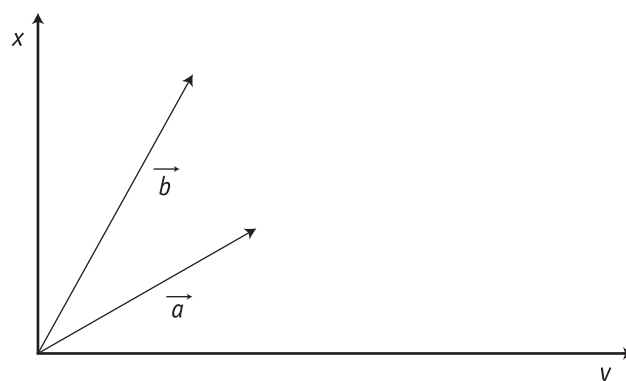
$$s = \sqrt{7,33^2 + 14,7^2} = 16,43$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{14,7}{7,33} = 2,01 \rightarrow \alpha = 63,5^\circ$$



7. Donats els vectors en components polars $\vec{a} = 3_{30^\circ}$ i $\vec{b} = 4_{60^\circ}$, representeu-los gràficament i trobeu:

La representació gràfica dels dos vectors és:

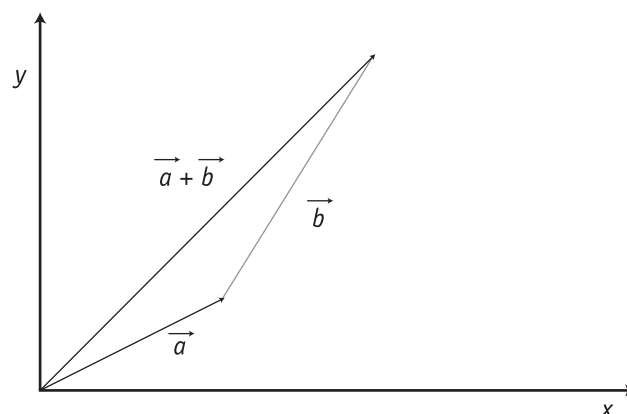


a) Els vectors en components cartesianes.

$$\vec{a} = (3 \cos 30^\circ, 3 \sin 30^\circ) = 2,60 \vec{i} + 1,50 \vec{j}$$

$$\vec{b} = (4 \cos 60^\circ, 4 \sin 60^\circ) = 2 \vec{i} + 3,46 \vec{j}$$

b) El vector suma dels dos vectors, gràficament i en components cartesianes i polars.



En components cartesianes:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2,60 + 2) \vec{i} + (1,50 + 3,46) \vec{j} = 4,60 \vec{i} + 4,96 \vec{j}$$

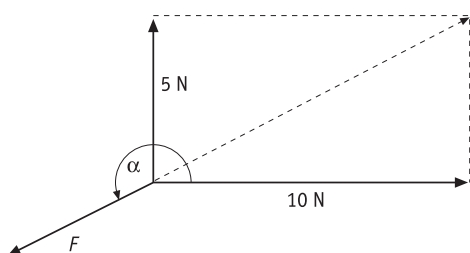
En components polars:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4,60^2 + 4,96^2} = 6,76$$

$$\alpha = \arctg \frac{4,96}{4,6} = 47,2^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = 6,76_{47,2^\circ}$$

8. Sobre un cos actuen dues forces de 5 i 10 N que formen entre si un angle de 90° . Calculeu:



- a) La força que s'ha de fer perquè el cos no es mogui.

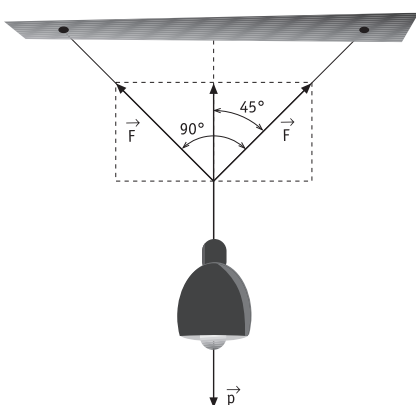
$$F = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \text{ N}$$

- b) L'angle que forma amb l'horitzontal la força calculada a l'apartat a) suposant que la força horitzontal és la de 10 N.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{10} = 0,5 \rightarrow \alpha = 26,56^\circ$$

$$\text{Està al 3r quadrant} \Rightarrow \alpha = 180^\circ + 26,56^\circ = 206,56^\circ$$

9. Un cos de 5 kg està penjat de dos cables iguals que formen un angle de 90° . Calculeu la força que ha de fer cada cable per poder sostenir el cos.



$$F \cos 45^\circ + F \cos 45^\circ - p = 0$$

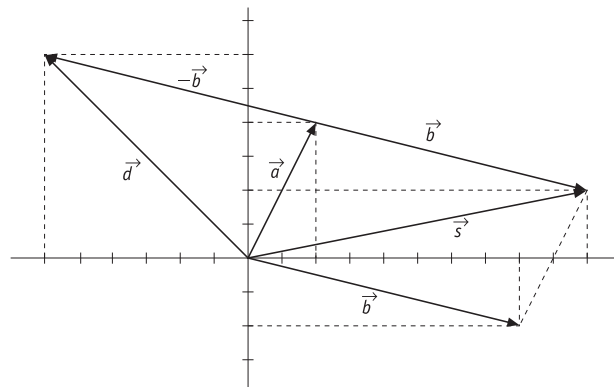
$$2F \cos 45^\circ - p = 0$$

$$F = \frac{p}{2 \cos 45^\circ} = \frac{5 \cdot 9,8}{2 \cos 45^\circ}$$

$$F = 34,65 \text{ N}$$

10. Donats els vectors $\vec{a} = (2, 4)$ i $\vec{b} = (8, -2)$, calculeu:

- a) La suma i la diferència, gràficament i numèricament.



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (2, 4) + (8, -2) = (10, 2)$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (2, 4) - (8, -2) = (-6, 6)$$

- b) Determineu els mòduls de tots dos vectors i dels vectors suma i diferència.

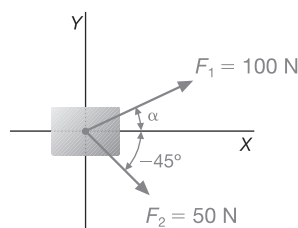
$$a = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 4,47$$

$$b = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = \sqrt{68} = 8,25$$

$$s = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 10,20$$

$$d = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 8,49$$

11. Sabent que $F_1 = 100 \text{ N}$ i $F_2 = 50 \text{ N}$, calculeu α perquè el cos de la figura es mogui en la direcció de l'eix X.



$$F_1 \sin \alpha = F_2 \sin (-45^\circ) \rightarrow \sin \alpha = \frac{F_2}{F_1} \sin (-45^\circ)$$

$$\sin \alpha = \frac{50}{100} \sin (-45^\circ) = 0,35 \rightarrow \alpha = 20,70^\circ$$

12. Calculeu el producte escalar dels vectors $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ i raoneu, com són aquests dos vectors.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 6 - 4 - 2 = 0$$

Els dos vectors són perpendiculars, ja que el seu producte escalar és zero.

13. Deduïu el valor de p perquè els vectors

$$\vec{a} = (5, 1, -2) \text{ i } \vec{b} = (2, p, 3)$$

siguin perpendiculars.



$$\begin{cases} \vec{a} = (5, 1, -2) \\ \vec{b} = (2, p, 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 2 + p + (-2) \cdot 3 = \\ &= 10 + p - 6 = 0 \rightarrow p = -10 + 6 = -4 \end{aligned}$$

14. Donats els vectors:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \text{ i } \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\text{calculeu } (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}).$$

$$\begin{cases} \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k} \end{cases}$$

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b})$$

$$\begin{aligned} 2\vec{a} - \vec{b} &= 2 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) - (\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = \\ &= 6\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k} = 5\vec{i} + 3\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\vec{a} + 4\vec{b} &= 3 \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}) + 4 \cdot (\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}) = \\ &= 9\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{i} + 20\vec{j} - 8\vec{k} = \\ &= 13\vec{i} + 32\vec{j} - 11\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 4\vec{b}) &= (5\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (13\vec{i} + 32\vec{j} - 11\vec{k}) = \\ &= 5 \cdot 13 + 3 \cdot 32 + 0 \cdot (-11) = 161 \end{aligned}$$

15. Calculeu els components cartesianes d'un vector $\vec{u}$ que sigui unitari i que tingui la mateixa direcció que el vector $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ però sentit contrari.

$$a = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{u}_a = \frac{-3\vec{i} + 4\vec{j}}{5} = -0,6\vec{i} + 0,8\vec{j}$$

$$-\vec{u}_a = 0,6\vec{i} - 0,8\vec{j}$$

16. Donat el vector $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, calculeu:

a) Un vector $\vec{b}$ que sigui perpendicular a $\vec{a}$ i que tingui un component $x = 6$ i $z = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (6\vec{i} + y\vec{j}) = 0 \rightarrow$$

$$4 \cdot 6 - 2y = 0 \rightarrow y = 12$$

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$$

b) El vector unitari $\vec{u}_b$.

$$b = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13,42$$

$$\vec{u}_b = \frac{6}{13,42}\vec{i} + \frac{12}{13,42}\vec{j} = 0,45\vec{i} + 0,89\vec{j}$$

17. Trobeu l'angle més petit que formen els vectors següents:

$$\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \text{ i } \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{cases}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 7$$

$$a = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 4,24$$

$$b = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = 5,38$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{7}{4,24 \cdot 5,38} = 0,31 \Rightarrow \alpha = 72,13^\circ$$

18. Donats els vectors $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, calculeu:

a) El vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$+ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} = 7\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

b) Els vectors unitaris de $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

$$a = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$b = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3,74$$

$$c = \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 7,14$$

$$\vec{u}_a = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j} = 0,8\vec{i} - 0,6\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_b &= \frac{3}{3,74}\vec{i} + \frac{2}{3,74}\vec{j} - \frac{1}{3,74}\vec{k} = \\ &= 0,8\vec{i} + 0,53\vec{j} - 0,27\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_c &= \frac{7}{7,14}\vec{i} - \frac{1}{7,14}\vec{j} - \frac{1}{7,14}\vec{k} = \\ &= 0,98\vec{i} - 0,14\vec{j} - 0,14\vec{k} \end{aligned}$$

c) El cosinus de l'angle que formen els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b} = \frac{6}{5 \cdot 3,74} = 0,32$$

19. Calculeu el cosinus de l'angle que formen els vectors:

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ i } \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Calculem primer els mòduls dels vectors:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6$$



El cosinus de l'angle que formen aquests vectors és:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a b} = \frac{4 \cdot 3 + (-3) \cdot 2}{5 \cdot 3,6} = 0,33$$

que és menor que la unitat, tal com ha de ser.

20. Donats els vectors $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = -9\vec{i} + m\vec{j}$, calculeu el valor de m perquè els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ siguin:

a) Perpendiculars.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot (-9) + 2 m = 0 \rightarrow$$

$$-54 + 2 m = 0 \rightarrow m = \frac{54}{2} = 27$$

b) Paral·lels.

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos 0^\circ = a b$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \\ b &= \sqrt{(-9)^2 + m^2} = \sqrt{81 + m^2} \end{aligned} \right\}$$

$$-54 + 2 m = \sqrt{40} \cdot \sqrt{81 + m^2} \rightarrow$$

$$(-54 + 2 m)^2 = (\sqrt{40} \cdot \sqrt{81 + m^2})^2 \rightarrow$$

$$4 m^2 - 216 m + 2916 = 3240 + 40 m^2 \rightarrow$$

$$36 m^2 + 216 m + 324 = 0 \rightarrow$$

$$m^2 + 6 m + 9 = 0 \rightarrow$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

21. A partir de la funció vectorial

$$\vec{a}(t) = 2t\vec{i} + (2t^2 - 1)\vec{j}$$

calculeu l'angle que formen els vectors obtinguts en fer $t = 1$ i $t = 3$.

$$\vec{a}(t) = 2t\vec{i} + (2t^2 - 1)\vec{j}$$

$$\vec{a}(1) = 2 \cdot 1\vec{i} + (2 \cdot 1 - 1)\vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{a}(3) = 2 \cdot 3\vec{i} + (2 \cdot 3^2 - 1)\vec{j} = 6\vec{i} + 17\vec{j}$$

$$\vec{a}(1) \cdot \vec{a}(3) = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 17 = 29$$

$$a(1) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2,24$$

$$a(3) = \sqrt{6^2 + 17^2} = \sqrt{325} = 18,03$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}(1) \cdot \vec{a}(3)}{a(1) \cdot a(3)} = \frac{29}{2,24 \cdot 18,03} = 0,71 \rightarrow \alpha = 44^\circ$$

22. Donada la funció vectorial

$$\vec{f}(t) = 3t^2\vec{i} + (3t - 2)\vec{j}$$

calculeu el valor d'aquesta funció per als valors de $t = 1$, 2 i -1 .

$$\text{Per a } t = 1 \text{ s'obté: } \vec{f}(1) = 3 \cdot 1^2 \vec{i} + (3 \cdot 1 - 2) \vec{j} = 3 \vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{Per a } t = 2 \text{ s'obté: } \vec{f}(2) = 3 \cdot 2^2 \vec{i} + (3 \cdot 2 - 2) \vec{j} = 12 \vec{i} + 4 \vec{j}$$

Per a $t = -1$ s'obté:

$$\vec{f}(-1) = 3 \cdot (-1)^2 \vec{i} + (3 \cdot (-1) - 2) \vec{j} = 3 \vec{i} - 5 \vec{j}$$

23. Tenim la funció vectorial

$$\vec{a}(t) = (t^2 - 3)\vec{i} + (2t^2 + t)\vec{j}$$

determineu el vector unitari que té la direcció i el sentit de la derivada per a $t = 1$.

$$\vec{a}(t) = (t^2 - 3)\vec{i} + (2t^2 + t)\vec{j}$$

$$\vec{a}'(t) = 2t\vec{i} + (4t + 1)\vec{j}$$

$$\vec{a}'(1) = 2\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$a'(1) = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5,38$$

$$\vec{u}_{a'(1)} = \frac{2}{5,38} \vec{i} + \frac{5}{5,38} \vec{j} = 0,37\vec{i} + 0,93\vec{j}$$

24. Donada la funció vectorial $\vec{a}(t) = t^2\vec{i} + (3 - t)\vec{j}$, calculeu per a $t = 3$:

a) $\vec{a}$ i el seu mòdul.

$$\vec{a}(3) = 3^2 \vec{i} + (3 - 3) \vec{j} = 9 \vec{i}$$

$$a(3) = 9$$

b) El mòdul de la derivada respecte de t .

$$\vec{a}'(t) = 2t\vec{i} - \vec{j}$$

$$a'(t) = \sqrt{(2t)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$$a'(3) = \sqrt{4 \cdot 3^2 + 1} = \sqrt{37} = 6,08$$

c) La derivada del mòdul.

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{(t^2)^2 + (3 - t)^2} = \sqrt{t^4 + (3 - t)^2} = \\ &= \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9} \end{aligned}$$

$$a'(t) = \frac{4t^3 + 2t - 6}{2\sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9}}$$

$$a'(3) = \frac{4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 6}{2 \cdot \sqrt{3^4 + 3^2 - 6 \cdot 3 + 9}} = \frac{108}{2 \cdot \sqrt{81}} = 6$$

25. Donada la funció vectorial

$$\vec{a}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + (2t + 1)\vec{j}$$

calculeu i representeu gràficament els vectors següents:

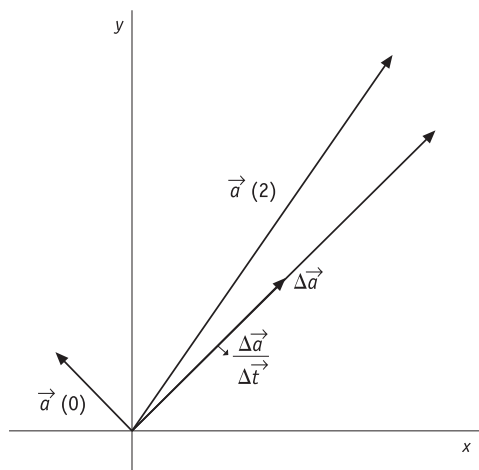
$$a) \vec{a}(0) = -\vec{i} + \vec{j}$$

$$b) \vec{a}(2) = (2^2 - 1)\vec{i} + (2 \cdot 2 + 1)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\begin{aligned} c) \Delta \vec{a} &= \vec{a}(2) - \vec{a}(0) = (3\vec{i} + 5\vec{j}) - (-\vec{i} + \vec{j}) = \\ &= 4\vec{i} + 4\vec{j} \end{aligned}$$



$$d) \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \frac{4\vec{i} + 4\vec{j}}{2 - 0} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$



26. Donat el vector $\vec{a}(t) = t\vec{i} + (t^2 - 4)\vec{j}$, determineu:

a) $\vec{a}(2)$, $\vec{a}(5)$.

$$\vec{a}(2) = 2\vec{i} + (2^2 - 4)\vec{j} = 2\vec{i} = (2, 0)$$

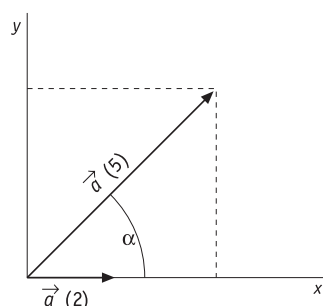
$$\vec{a}(5) = 5\vec{i} + (5^2 - 4)\vec{j} = 5\vec{i} + 21\vec{j} = (5, 21)$$

b) $\Delta \vec{a}$ en els instants anteriors.

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(5) - \vec{a}(2) = (5, 21) - (2, 0) = (3, 21)$$

c) L'angle que ha girat el vector $\vec{a}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{5} = 4,2 \Rightarrow \alpha = 76,6^\circ$$



27. Sigui la funció vectorial $\vec{a}(t) = ((t^2 - 1), 5t)$; calculeu-ne la integral entre $t = 1$ s i $t = 10$ s.

$$\vec{a}(t) = ((t^2 - 1), 5t)$$

$$\int \vec{a}(t) dt = \int_1^{10} ((t^2 - 1), 5t) dt \rightarrow$$

Per tant,

$$\left[\frac{t^3}{3} - t, \frac{5t^2}{2} \right]_1^{10} = \left(\frac{10^3}{3} - 10 - \frac{1}{3} + 1, \frac{5 \cdot 10^2}{2} - \frac{5 \cdot 1}{2} \right) = (324, 247,5)$$