

A1

INTRODUCCIÓ VECTORIAL

En aquest annex, que complementa la Unitat 0 del llibre de text, estudiarem el producte vectorial de dos vectors, les seves propietats i el moment d'un vector respecte d'un punt.



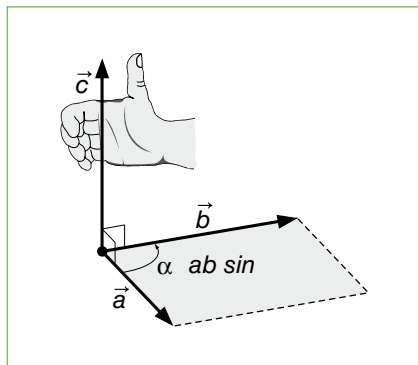


Fig. 1

A. Producte vectorial de dos vectors

Definim el **producte vectorial de dos vectors** $\vec{a}$ i $\vec{b}$, com aquell vector $\vec{c}$ que té per mòdul l'àrea del paral·lelogram format pels dos vectors, $c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$, direcció perpendicular al pla que determinen els dos vectors i sentit segons la regla de la mà dreta quan el vector $\vec{a}$ gira cap a $\vec{b}$ seguint l'angle més petit (fig. 1). Aquest producte vectorial s'expressa per $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ i es pot determinar amb el càlcul del determinant següent:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

B. Propietats del producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors verifica les propietats següents:

- Quan els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen la mateixa direcció, el producte vectorial és zero, ja que en aquesta cas $\alpha = 0^\circ$ o bé $\alpha = 180^\circ$ i, per tant, $c = a \cdot b \cdot \sin \alpha = 0$, l'àrea que generen els vectors es nul·la. És el cas, per exemple, del producte vectorial d'un vector per sí mateix.
- *Anticommutativa*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, és a dir, quan canvia l'ordre del producte canvia de signe.
- *Distributiva respecte de la suma*: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- Els vectors unitaris en la direcció dels eixos de coordenades $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ estan relacionats amb el producte vectorial.

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



EXEMPLE 1

Donats el vectors $\vec{a} = (1, -1, 2)$ i $\vec{b} = (2, 0, -1)$ calculeu:

- a) El producte vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.
- b) L'àrea del triangle que determinen els vectors.

Resolució

- a) Apliquem el determinant per calcular el producte vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

- b) L'àrea del triangle format pels vectors és la meitat del mòdul del vector $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 25 + 4}) \approx 2,74$$

EXEMPLE 2



Determineu l'àrea del triangle de l'exemple anterior sense fer us del producte vectorial.

Resolució

Calculeu prèviament els mòduls dels vectors i l'angle que formen:

$$\vec{a} = (1, -1, 2) \Rightarrow a = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$\vec{b} = (2, 0, -1) \Rightarrow b = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Amb el producte escalar calculeu l'angle:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 = 0$$

Per tant els vectors determinen un triangle rectangle i l'àrea és:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \approx 2,74$$

C. Moment d'un vector respecte d'un punt

Definim el moment d'un vector $\vec{F}$ respecte d'un punt O com el vector $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ on $\vec{r}$ és el vector de posició del punt d'aplicació de $\vec{F}$. D'acord amb la definició del producte vectorial, el mòdul del moment $\vec{M}_O$ és $M_O = rF \sin \alpha = d \cdot F$ on d és la distància del punt O a la recta que determina el vector (fig. 2).

La definició del moment té una aplicació important en la Física, quan es calcula el moment angular i el moment d'una força. En el primer cas la unitat en que s'expressa el moment angular és $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; i en el cas del moment d'una força, la unitat és el $\text{N} \cdot \text{m}$.

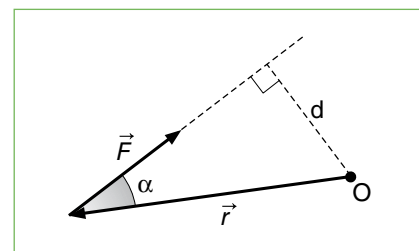


Fig. 2

EXEMPLE 3



Calculeu el moment d'una força $\vec{F} = (3, 5, 0) \text{ N}$ aplicada en el punt $A = (-2, 1, 5)$ respecte de:

- Origen de coordenades.
- Punt $P = (2, -2, 4)$.

Suposem distàncies en unitats internacionals.

Resolució

a) Apliquem la definició del producte vectorial.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -25 \vec{i} + 15 \vec{j} - 13 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) El vector de posició del punt d'aplicació de la força respecte del punt P és: $(2, 1, 5) - (2, -2, 4) = (0, 3, 1)$

Per tant, el moment de la força respecte de P és:

$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \vec{i} + 3 \vec{j} - 9 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$



Activitats finals

Qüestions

- 1> Demostreu la propietat anticommutativa del producte vectorial.
- 2> Quin és el moment d'una força respecte d'un punt que pertany a la recta que conté el vector força. Justifiqueu la resposta.

Problemes

- 1> Donats els vectors $\vec{a} = \left(2, -\frac{1}{2,3}\right)$ i $\vec{b} = (-4, 1, -6)$, calculeu el $\vec{a} \times \vec{b}$.

R: 0

- 2> Una politja fixa de radi 20 cm gira mitjançant un cos de 100 g de massa que penja d'un cordill enrotllada a la politja. Quin és el moment de la força pes respecte de l'eix de la politja?

R: 0,196 N·m

- 3> D'una politja fixa formada per dos discos solidaris de radis 20 i 35 cm hi pengen dos cossos de masses 100 kg i 200 kg com indica la figura 3. Calculeu el moment de les forces pes respecte a l'eix de la politja i interpreta el seu significat.

R: 490 N·m

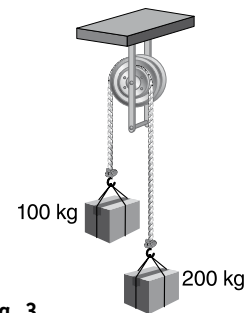


Fig. 3