

A la vida quotidiana

108. ●●● La Margarida Garcia és una biòloga especialitzada en amfibis.



Està investigant la propagació de malalties en les comunitats de granotes. Per fer-ho, ha buscat un estany en el qual, a simple vista, n'hi ha una gran quantitat.

La primera tasca és determinar el nombre de granotes que hi ha a l'estany.

Farem el següent...
Posem una xarxa a l'estany i comptem les granotes que atrapem. Els fem una petita marca amb tint i les tornem a l'estany.
Tornem a posar la xarxa, comptem les granotes que traguem i anotem les que tenen la marca de tint.



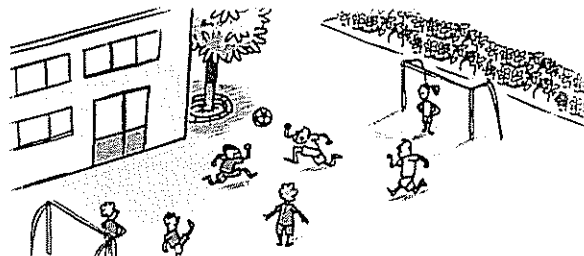
Ha repetit el procés tres vegades i aquests són els resultats que ha obtingut:

EXPERIMENT 1	
1a extracció	2a extracció
182 granotes	195 granotes
	38 marcades

EXPERIMENT 2	
1a extracció	2a extracció
96 granotes	80 granotes
	9 marcades

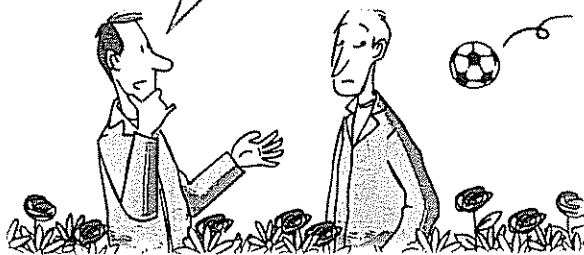
Quantes granotes, aproximadament, hi ha a l'estany?

109. ●●● Al parc que hi ha al costat de l'escola hi ha una esplanada on juguem a futbol.



Al costat d'aquesta esplanada hi ha un terreny en el qual s'han plantat flors. Per protegir-les es construirà una tanca on es col·locaran 800 llistons de fusta, que tindran una separació de 15 cm entre si.

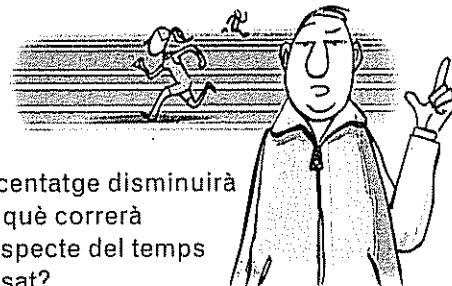
El problema és que tan sols tenim 600 llistons... A quina distància els haurem de col·locar els uns dels altres per cobrir les flors?



110. ●●● En Sebastià practica atletisme i ha participat en diverses competicions, però fins l'any passat no va córrer la primera marató.

A en Sebastià li va agradar tant l'experiència que ha decidit entrenar-se professionalment i ha buscat un entrenador.

Si segueixes de manera estricta aquest pla d'entrenament, quan acabi l'any la teva velocitat haurà augmentat el 25%.



En quin percentatge disminuirà el temps en què correrà la marató respecte del temps de l'any passat?

8

Proporcionalitat geomètrica

La clau de la Ciutat Prohibida

El missioner jesuïta Matteo Ricci va travessar la porta de la Ciutat Prohibida per trobar-se amb l'emperador Wan-Li. Els regals que li havia enviat havien fet efecte i l'emperador el volia conèixer.

L'emperador, que mentre esperava es mirava el mapa del món inclòs en els regals, va aixecar la vista i li va ordenar fer-ne una còpia per a ell.

Després de l'entrevista, el pare Ricci va tornar a casa seva i allí, un altre missioner, una mica sorprès, va dir:

—Encara no entenc per què els crida tant l'atenció el mapa.

—És lògic —va argumentar el pare Ricci—. Fa milers d'anys que es pensen que el món és solament la Xina, que a fora hi viuen bàrbars incapaços d'aportar res a la seva cultura, i, de sobte, els demostrem que no som bàrbars, sinó que estem més avançats que ells en ciències com ara matemàtiques, astronomia, geografia ...

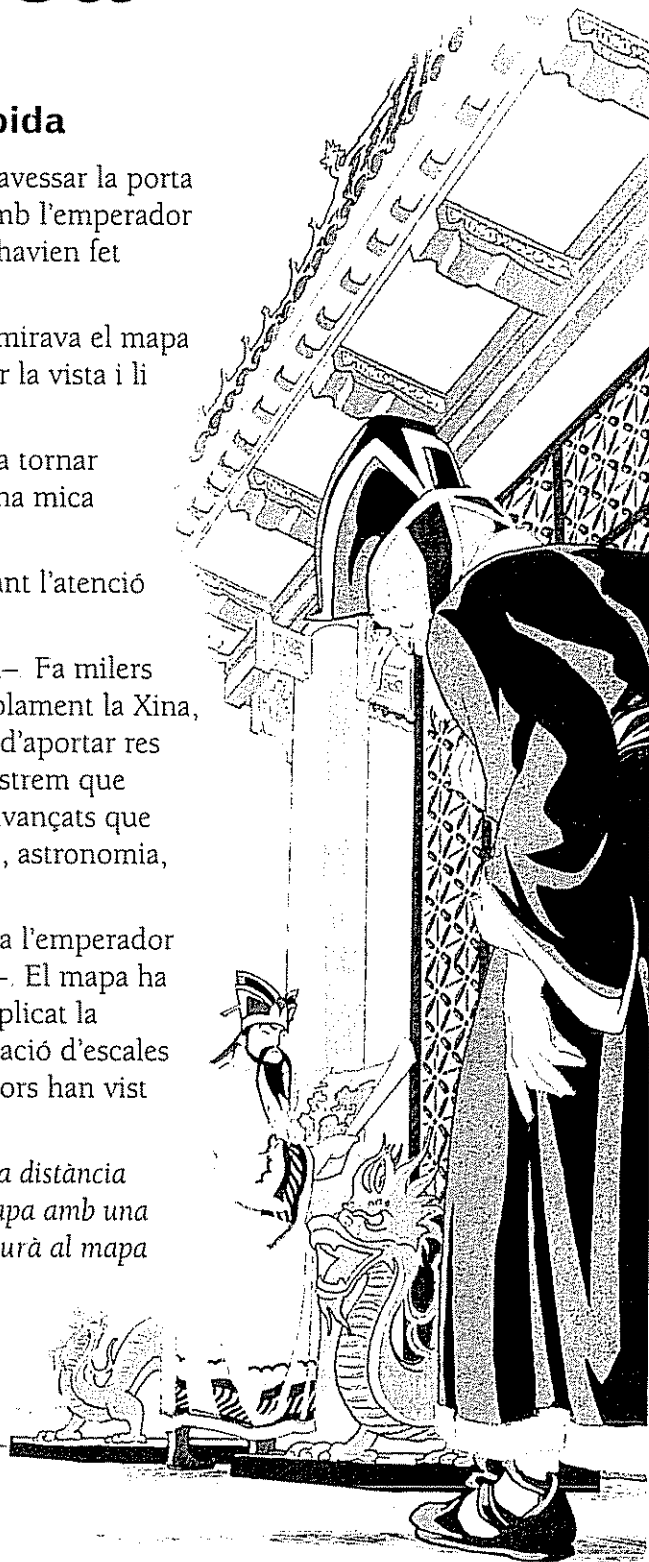
—Aquesta és la clau que m'ha conduït a l'emperador de la Xina —va continuar el pare Ricci—. El mapa ha cridat la seva atenció, i quan els he explicat la manera de prendre mesures i la utilització d'escales per representar-les sobre el paper, llavors han vist que els podem ensenyar moltes coses

Dues muntanyes que estan situades a una distància de 20 km apareixen dibuixades en un mapa amb una separació de 2 cm. Quina distància hi haurà al mapa entre dos punts que disten en la realitat 40 km?

PLA DE TREBALL

En aquesta unitat aprendràs a...

- Establir quan dos parells de segments són proporcionals
- Conèixer i aplicar el teorema de Tales
- Aplicar els criteris de semblança de triangles
- Reconèixer polígons semblants
- Interpretar les escales en mapes i plànols



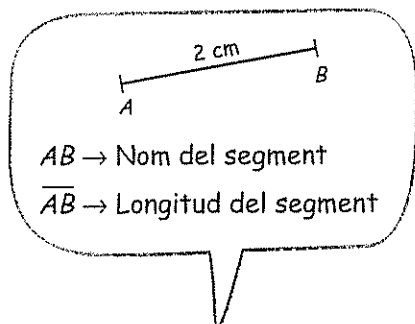
I Segments en el plànel

1.1 Recta, semirecta i segment

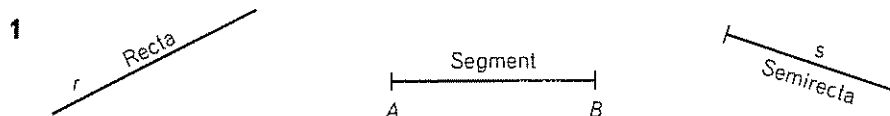
Una **recta** és una línia contínua formada per infinits punts que no té ni principi ni final.

Una **semirecta** és una recta que té principi però no final.

Un **segment** és el tros o la part d'una recta delimitat per dos punts (extrems).



EXEMPLE



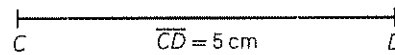
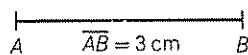
1.2 Raó de dos segments

Anomenem **raó de dos segments**, AB i CD , el nombre que resulta de dividir la longitud del segment AB entre la longitud del segment CD .

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = r \leftarrow \text{Raó}$$

EXEMPLE

2 Determina la raó dels segments AB i CD .

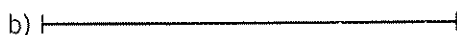


La raó de AB i CD és: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{5} = 0,6$

EXERCICIS

PRACTICA

1 Determina la longitud d'aquests segments:



2 Dibuixa els segments AB i CD , de longituds 18 i 24 mm, respectivament. Troba'n la raó.

3 Dibuixa els segments $\overline{FG} = 3 \text{ cm}$ i $\overline{MN} = 9 \text{ cm}$. Quina és la raó? Explica el significat del resultat.

APLICA

4 La raó de dos segments AB i CD és 0,5. Si AB fa 2 cm, calcula CD . Dibuixa els segments.

5 La raó de dos segments FG i MN és 0,3. Si MN fa 50 mm, calcula la mida (en cm) de FG . Dibuixa els segments.

REFLEXIONA

6 Si la raó entre AB i CD és 2, quina és la raó entre CD i AB ?

2

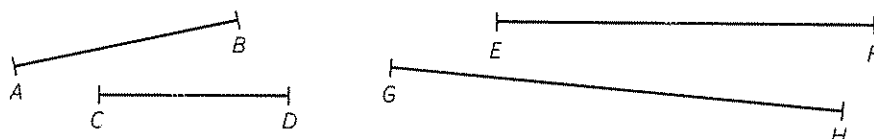
Segments proporcionals

Els segments AB i CD són proporcionals a EF i GH si la raó de AB i CD és igual a la raó de EF i GH

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = r$$

EXEMPLES

3 Determina si aquests segments són proporcionals:



$$\overline{AB} = 3 \text{ cm} \quad \overline{CD} = 2,5 \text{ cm} \quad \overline{EF} = 6 \text{ cm} \quad \overline{GH} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{3}{2,5} = 1,2 \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Per tant, es compleix que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = 1,2$

Diem que els segments AB i CD són proporcionals als segments EF i GH .

4 Donats tres segments de longituds 8, 4 i 10 cm, respectivament, troba un quart segment proporcional als anteriors.

Apliquem el concepte de segments proporcionals:

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{x} \rightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 10 \rightarrow x = \frac{4 \cdot 10}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

El quart segment fa 5 cm.

Comprovem la relació de proporcionalitat:

$$\frac{8}{4} = \frac{10}{5} \rightarrow 8 \cdot 5 = 4 \cdot 10 \rightarrow 40 = 40$$

Recorda la regla dels productes encreuats:
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$



EXERCICIS

PRACTICA

7 Indica si aquests segments són proporcionals:

a) $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 30 \text{ mm}$, $\overline{EF} = 30 \text{ mm}$
i $\overline{GH} = 5 \text{ mm}$

b) $\overline{AB} = 2,5 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$, $\overline{EF} = 4,5 \text{ cm}$
i $\overline{GH} = 8 \text{ cm}$

8 Troba la longitud del segment desconegut en aquestes proporcions:

a) $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12}$ b) $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60}$ c) $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}}$

APLICA

9 Donats dos segments $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ i $\overline{CD} = 9 \text{ cm}$:

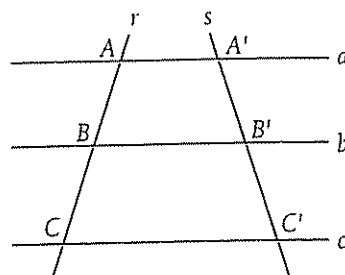
- Calcula la raó dels segments AB i CD
- Escriu dos segments que hi siguin proporcionals.

REFLEXIONA

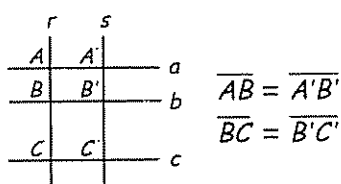
10 Si la raó entre els segments AB i CD és a , i la raó entre EF i GH és b , quina condició s'ha de donar perquè AB i CD siguin proporcionals a EF i GH ?

3 Teorema de Tales

Si tres rectes paral·leles, a , b i c , tallen dues rectes, r i s , els segments que determinen són proporcionals



Si r i s són rectes paral·leles, els segments que determinen a a , b i c són iguals dos a dos.



Es compleix el teorema de Tales.

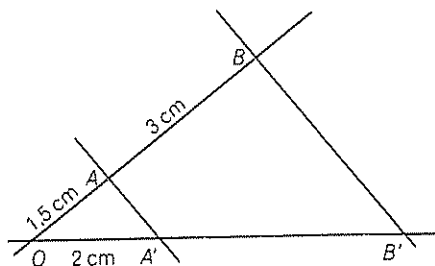


$$\left. \begin{array}{l} \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} \\ \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'}$$

Aquesta igualtat constitueix el teorema de Tales.

EXEMPLE

5 Calcula la longitud del segment $A'B'$.



Pel teorema de Tales:

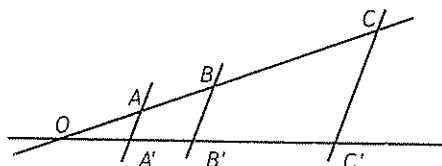
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{A'B'} \rightarrow \frac{1,5}{2} = \frac{3}{A'B'} \rightarrow 1,5 \cdot A'B' = 2 \cdot 3 \rightarrow A'B' = \frac{2 \cdot 3}{1,5} = 4 \text{ cm}$$

El segment $A'B'$ fa 4 cm

EXERCICIS

PRACTICA

11. Calcula la longitud de OA' i BC .



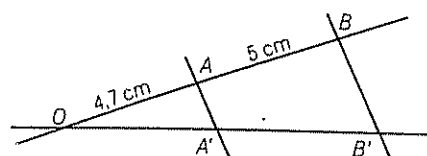
$$\begin{array}{l} \overline{OA} = 3 \text{ cm} \\ \overline{AB} = 2,25 \text{ cm} \\ \overline{A'B'} = 1,5 \text{ cm} \\ \overline{B'C'} = 5 \text{ cm} \end{array}$$

APLICA

12. Calcula la longitud del segment OC a la figura de l'exercici anterior.

REFLEXIONA

13. En aquesta figura sabem que $\overline{OA} = 4,7 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ i la raó $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1,6$.



Calcula $\overline{A'B'}$, \overline{OB} i $\overline{OB'}$.

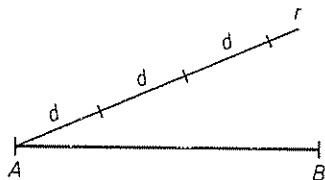
4

Aplicacions del teorema de Tales

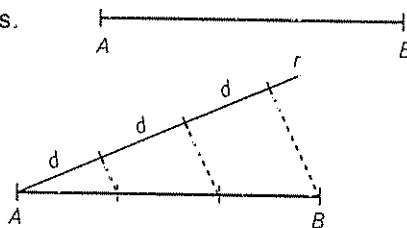
Amb el teorema de Tales podem dividir segments en parts iguals o proporcionals.

EXEMPLES

6 Divideix el segment AB en 3 parts iguals.



Tracem una semirecta r amb origen a A i una inclinació qualsevol. Després hi dibuixem a sobre, a partir de A , 3 segments iguals

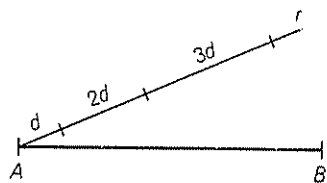


Unim l'extrem de l'últim segment amb el punt B , i tracem paral·leles a aquesta recta des de les altres divisions

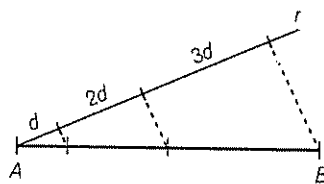
Per aplicar el teorema de Tales, les rectes que tallen el segment AB i la semirecta r han de ser paral·leles.

Pel teorema de Tales, els segments en què queda dividit el segment AB són proporcionals als que hem dibuixat sobre la recta r i, per tant, són iguals entre si

7 Divideix el segment AB en 3 parts, de manera que l'última part tingui el triple de longitud que la primera, i la segona, el doble que la primera.



Tracem una semirecta r i la dividim en tres segments, de manera que el primer tingui una longitud d ; el segon, $2d$, i el tercer, $3d$



Unim l'extrem de l'últim segment amb el punt B i tracem paral·leles

De la mateixa manera, pel teorema de Tales, els segments en què queda dividit el segment AB són proporcionals als que hem dibuixat sobre la recta r i, per tant, mantenen la mateixa proporció.



EXERCICIS

PRACTICA

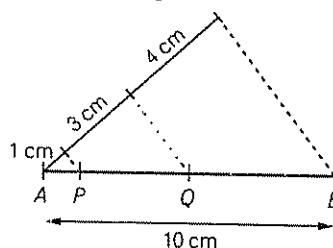
- 14 Divideix gràficament un segment de 7 cm en:
- 5 parts iguals.
 - 2 parts, en què la segona sigui la meitat que la primera.

REFLEXIONA

- 16 Observa la figura següent:

APLICA

- 15 Divideix un segment de 10 cm en parts proporcionals a dos segments de 2 cm i 3 cm. Quina mida fan els segments resultants?

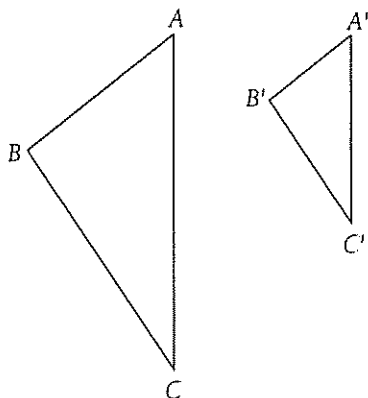


Quant fan els segments AP , PQ i QB ?

5

Semblança de triangles

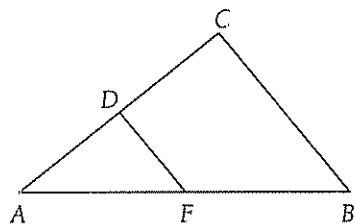
5.1 Triangles semblants



Dos triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants si:

- Tenen els angles iguals. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{C} = \widehat{C'}$
- Tenen els costats proporcionals. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

5.2 Triangles en posició de Tales



Diem que dos triangles, \widehat{ABC} i \widehat{AFD} , estan en posició de Tales quan tenen un angle en comú, \widehat{A} , i els costats oposats a aquest angle, FD i BC , són paral·lels.

Dos triangles en posició de Tales sempre són semblants.

EXEMPLE

8 Demuestra que els triangles \widehat{ABC} i \widehat{AFD} són semblants.

Comprovem que dos triangles en posició de Tales són semblants

- Tenen els angles iguals.

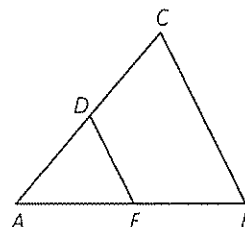
$\widehat{A} \longrightarrow$ És comú a tots dos triangles

$\widehat{D} = \widehat{C} \longrightarrow$ Perquè són angles aguts de costats paral·lels

$\widehat{F} = \widehat{B} \longrightarrow$ Perquè són angles aguts de costats paral·lels

- Tenen els costats proporcionals

Apliquem el teorema de Tales: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$



EXERCICIS

PRACTICA

17 Dibuixa tres parells de triangles en posició de Tales. Explica com ho fas.

APLICA

18 Dibuixa tres parells de triangles semblants que no estiguin en posició de Tales. Indica com ho fas.

REFLEXIONA

19 Digues si aquests dos triangles estan en posició de Tales.

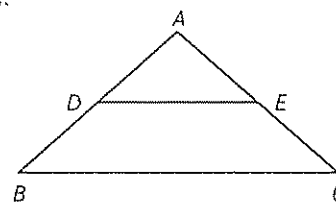
Calcula \overline{EC} i \overline{CB} si:

$$\overline{AB} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{ED} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{DB} = 4 \text{ cm}$$

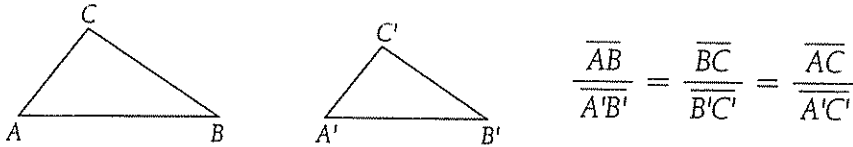


6

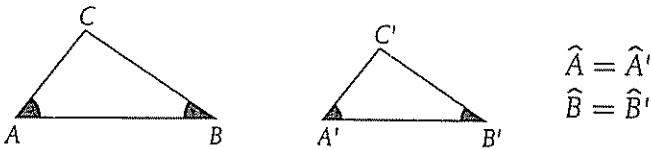
Criteris de semblança de triangles

Els criteris de semblança de triangles són les condicions mínimes que han de complir els triangles perquè siguin semblants

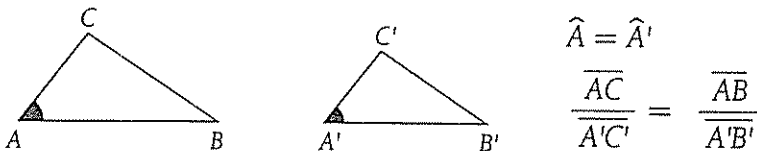
PRIMER CRITERI. Dos triangles són semblants si tenen els costats proporcionals



SEGON CRITERI. Dos triangles són semblants si dos angles són iguals



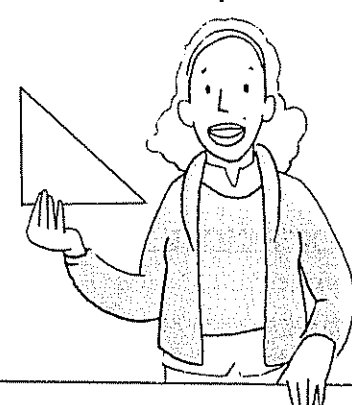
TERCER CRITERI. Dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els costats que el formen són proporcionals.



Quan els triangles són rectangles,

són semblants si:

- Tenen un angle agut igual.
- O dos dels seus costats són proporcionals.

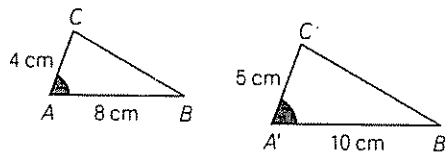


EXEMPLE

9 Determina si aquests triangles són semblants:

• Tenen un angle igual
 $\hat{A} = \hat{A}'$

• Els costats que formen l'angle igual són proporcionals.



$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{8}{10} = 0,8 \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} &= \frac{4}{5} = 0,8 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Els triangles són semblants pel tercer criteri de semblança.

EXERCICIS

PRACTICA

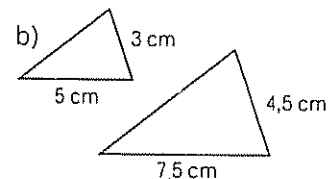
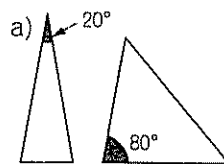
20 Els costats d'un triangle fan 5 cm, 4 cm i 8 cm, i els costats d'un altre, 5 cm, 6 cm i 8 cm. Comprova si són semblants.

APLICA

21 Comprova que un triangle rectangle de catets de 8 cm i 6 cm és semblant a un altre de catets de 4 cm i 3 cm.

REFLEXIONA

22 Comprova si aquests triangles isòsceles són semblants, i indica el criteri que has aplicat.

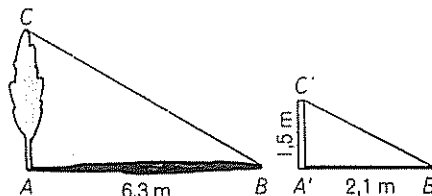


7 Aplicacions de la semblança de triangles

La semblança de triangles ens serveix per resoldre moltes situacions reals. Tot seguit n'estudiarem algunes

EXEMPLES

10 Quina alçada té l'arbre?



Primer comprovem que els triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants.

- $\hat{A} = \hat{A}'$ perquè són angles rectes
- $\hat{B} = \hat{B}'$ perquè els raigs del sol incideixen sobre els dos objectes amb la mateixa inclinació.

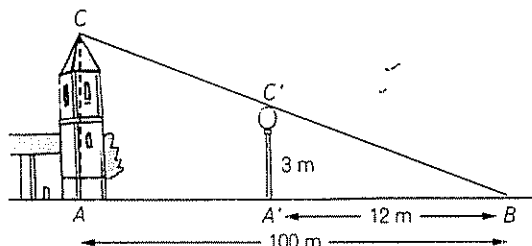
Pel segon criteri de semblança, \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants

Per tant, hi podem aplicar la proporcionalitat entre els seus costats

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{1,5} = \frac{6,3}{2,1} \rightarrow \overline{AC} = \frac{1,5 \cdot 6,3}{2,1} = 4,5 \text{ m}$$

L'alçada de l'arbre és de 4,5 m.

11 Quina és l'alçada de la torre?



Els triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants perquè són triangles rectangles i perquè tenen un angle agut en comú.

Així, si hi apliquem la proporcionalitat entre els seus costats:

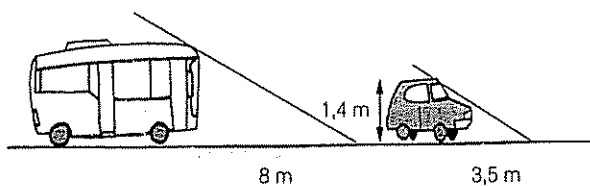
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{3} = \frac{100}{12} \rightarrow \overline{AC} = \frac{3 \cdot 100}{12} = 25 \text{ m}$$

L'alçada de la torre és de 25 m.

EXERCICIS

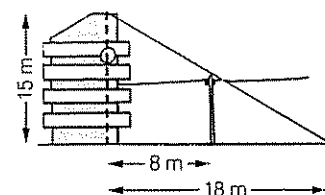
PRACTICA

- 23 L'ombra d'un autobús a una certa hora del dia fa 8 m. A la mateixa hora, l'ombra d'un cotxe, que fa 1,4 m d'alçada, és de 3,5 m. Quina alçada té l'autobús?



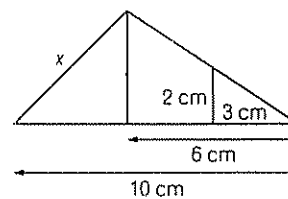
APLICA

- 24 Quina alçada té el pal?



REFLEXIONA

- 25 Calcula el valor de x.

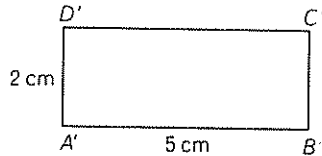
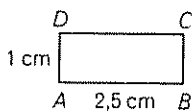


Dos polígons són semblants quan tenen els angles iguals i els costats corresponents són proporcionals.

Anomenem **raó de semblança** el quocient entre la longitud d'un costat d'un polígon dividit per la longitud corresponent de l'altre polígon.

EXEMPLES

12 Determina si aquests rectangles són semblants:



- Els angles són iguals

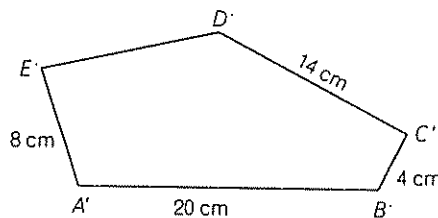
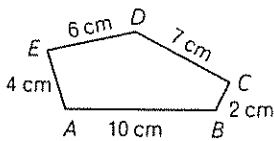
$$\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \quad \hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ \quad \hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ \quad \hat{D} = \hat{D}' = 90^\circ$$

- Els costats són proporcionals

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} \rightarrow \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Els dos rectangles són semblants, amb raó de semblança 0,5

13 Calcula $\overline{D'E'}$ si saps que els dos polígons són semblants.



Com que els dos polígons són semblants, els costats seran proporcionals

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} \\ \frac{10}{20} = \frac{2}{4} = \frac{7}{14} = \frac{6}{\overline{D'E'}} = \frac{4}{8} \rightarrow \frac{6}{\overline{D'E'}} = \frac{4}{8} \rightarrow \overline{D'E'} = \frac{6 \cdot 8}{4} = 12 \text{ cm}$$

Dues figures semblants tenen dues raons de semblança.



$$r = \frac{4}{2} = 2$$

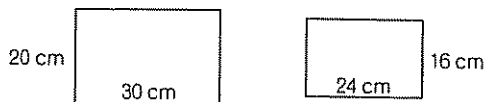
$$r = \frac{2}{4} = 0,5$$



EXERCICIS

PRACTICA

26 Donats aquests rectangles, resol:



- Són semblants?
- Quina raó de semblança tenen?
- Determina les mides d'un altre rectangle que hi sigui semblant.

APLICA

27 Calcula el perímetre dels rectangles de l'exercici anterior. Quina és la raó entre els seus perímetres? Quina relació té amb la raó de semblança?

REFLEXIONA

28 Quina és la raó entre les àrees de l'exercici anterior? Quina relació té amb la raó de semblança?

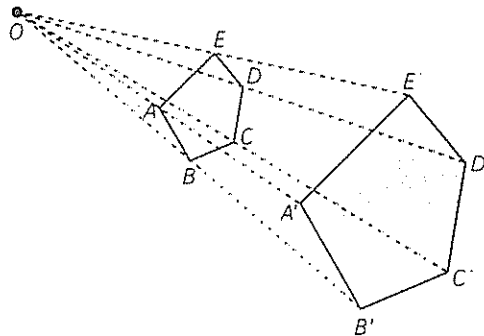
Construcció de polígons semblants

Donat un polígon, podem construir un polígon que hi sigui semblant amb una raó de semblança determinada.

- Si la raó de semblança és més gran que 1, el polígon que en resulta serà més gran que l'original. Direm que és una **ampliació**.
- Si la raó de semblança és més petita que 1, el polígon que en resulta serà més petit que l'original. Direm que és una **reducció**.

EXEMPLES

- 14 Construeix un polígon semblant a aquest, amb raó de semblança 2.



Des d'un punt qualsevol, O , tracem rectes fins als vèrtexs del polígon

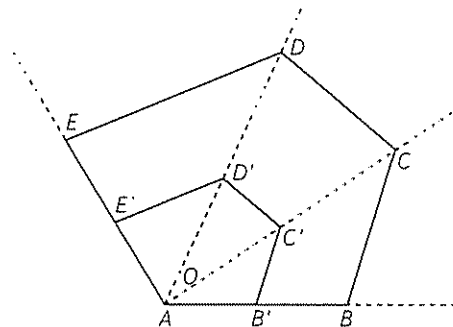
En cada una d'aquestes rectes marquem els punts A' , B' , C' , D' i E' , de manera que:

$$\overline{OA'} = 2 \cdot \overline{OA} \quad \overline{OB'} = 2 \cdot \overline{OB}$$

$$\overline{OC'} = 2 \cdot \overline{OC} \quad \overline{OD'} = 2 \cdot \overline{OD}$$

El polígon és semblant al polígon $ABCDE$, amb raó de semblança 2

- 15 Construeix un polígon semblant a aquest, amb raó de semblança 0,5.

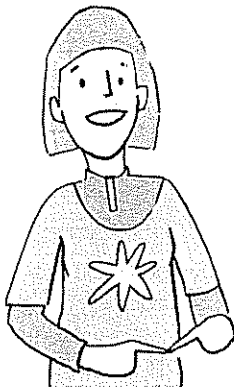


També podem prendre com a punt O un dels vèrtexs del polígon.

Ho farem de la mateixa manera que en el cas anterior. Tracem rectes des de cadascun dels vèrtexs i hi apliquem la condició següent:

$$\overline{OA'} = 0,5 \cdot \overline{OA} \quad \overline{OB'} = 0,5 \cdot \overline{OB} \quad \overline{OC'} = 0,5 \cdot \overline{OC} \quad \overline{OD'} = 0,5 \cdot \overline{OD}$$

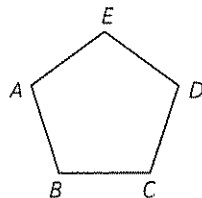
Construir una figura semblant a una altra és més fàcil si fem coincidir el punt O amb un dels seus vèrtexs.



EXERCICIS

PRACTICA

- 29 Observa el pentàgon $ABCDE$ de la figura.

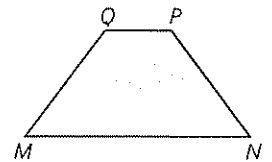


Construeix un pentàgon semblant, si saps que la raó de semblança és 2.

- 30 Dibuixa un pentàgon semblant a l'anterior amb raó de semblança 0,5.

APLICA

- 31 Construeix un polígon semblant, amb raó de semblança 1,5, prenent com a punt O un punt interior del polígon.



REFLEXIONA

- 32 Quina figura aconseguiries com a resultat si construïxes un polígon semblant a un altre amb raó de semblança 1?

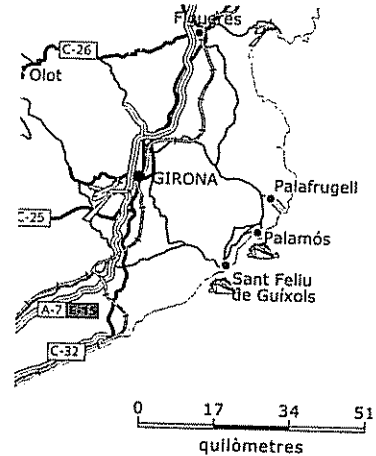
9

Escales

Una de les aplicacions més freqüents de la semblança és l'elaboració de plànols, mapes, maquetes... En aquestes representacions reduïm, de manera proporcional, les dimensions que tenen els objectes a la realitat, i obtenim una reproducció igual en la forma però no en la mida.

Anomenem **escala** la raó de semblança entre la figura representada i la figura original.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distància a la representació}}{\text{Distància a la realitat}}$$



EXEMPLES

- 16** La llargada del jardí a la realitat és de 37,5 m. A quina escala està dibuixat el plànol?

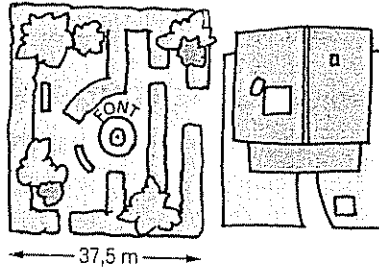
Mesurem sobre el plànol la longitud que coneixem a la realitat. La llargada del jardí al plànol és de 2,5 cm

Expressem totes dues longituds en la mateixa unitat i ho dividim

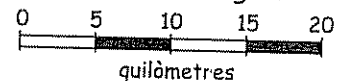
$$37,5 \text{ m} = 3750 \text{ cm} \left. \vphantom{37,5 \text{ m}} \right\} \rightarrow \frac{3750}{2,5} = 1500$$

L'escala serà 1 : a, on a és el nombre resultant de la divisió anterior

Escala → 1 : 1500. Això significa que 1 cm del plànol equival a 1500 cm de la realitat.



De vegades, indiquem l'escala de manera gràfica:



Segons aquesta escala, 1 cm (la distància que hi ha entre 0 i 5) equival a 5 km. És a dir, de manera numèrica seria:

$$1 : 500.000$$

- 17** Segons el plànol anterior, quant fa a la realitat el diàmetre de la font?

El diàmetre de la font al plànol és de 0,5 cm

Com que l'objecte real i la seva representació són figures semblants, hi apliquem la proporció

$$\text{Escala} \rightarrow 1 : 1500 \rightarrow \frac{1}{1500} = \frac{0,5}{AB} \rightarrow \overline{AB} = 1500 \cdot 0,5 = 750 \text{ cm}$$

El diàmetre real de la font és de 750 cm = 7,5 m.



EXERCICIS

PRACTICA

- 33** Explica què significa cada escala:

a) 1 : 300 b) 1 : 60 000 c) 1 : 12

APLICA

- 34** Quina escala s'ha usat per dibuixar un objecte si 3 cm del dibuix equivalen a 3 dm reals?

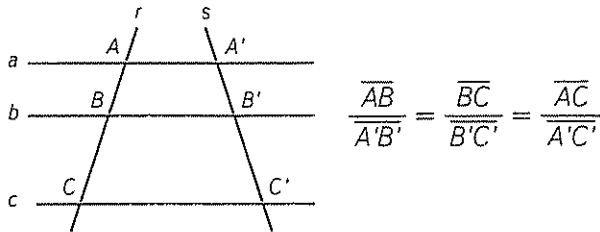
REFLEXIONA

- 35** Fem el plànol d'una casa a escala 1:75:

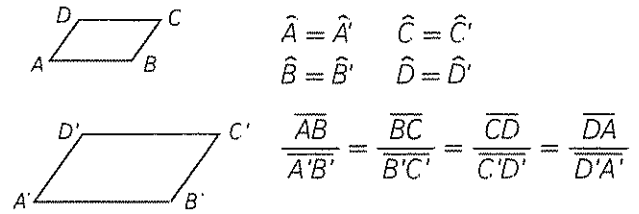
a) Quina raó de semblança hi apliquem?
 b) Quina mida real té una línia del plànol de 5 cm de longitud?
 c) Quina mida fa al plànol una longitud de 4,5 cm?

COMPREN AQUESTES PARAULES

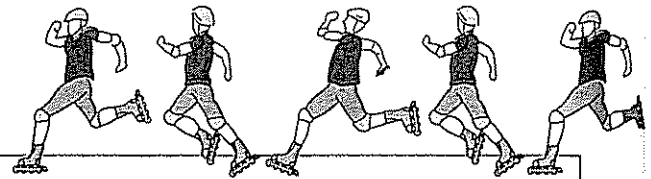
Teorema de Tales



Polígons semblants



FES-HO AIXÍ



1. CÀLCUL DE LA LONGITUD D'UN SEGMENT MITJANÇANT EL TEOREMA DE TALES

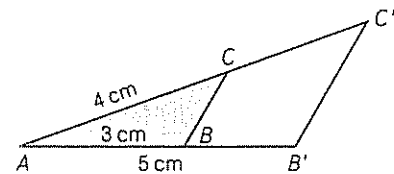
Calcula la longitud del segment AC' .

PRIMER. Comprovem que es compleixen les condicions del teorema de Tales.

BB' i CC' són paral·lels i tallen AC i AC'

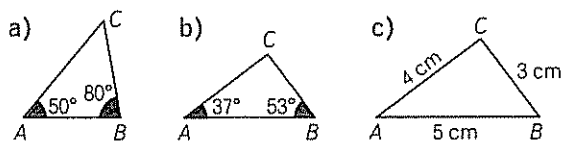
SEGON. Hi apliquem la proporcionalitat entre segments del teorema de Tales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{4}{AC'} \rightarrow 3 \cdot \overline{AC'} = 5 \cdot 4 \rightarrow \overline{AC'} = \frac{5 \cdot 4}{3} = 6,67 \text{ cm}$$



2. DETERMINACIÓ DE SI DOS TRIANGLES SÓN SEMBLANTS

Determina si aquests triangles són semblants a un altre triangle amb $\hat{A} = 37^\circ$, $\hat{B} = 53^\circ$ i costats d'1,5 cm, 2 cm i 2,5 cm:



PRIMER. Mirem si els angles són iguals.

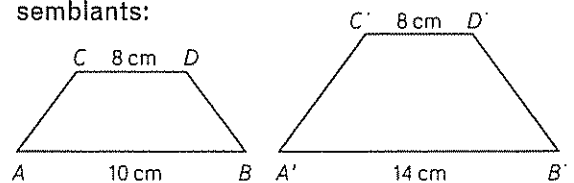
- a) $\hat{B} \neq \hat{B}'$. Els triangles no són semblants.
 b) $\hat{A} = \hat{A}'$ i $\hat{B} = \hat{B}'$. Els triangles són semblants (segon criteri).

SEGON. Comprovem la proporcionalitat entre els seus costats.

- c) $\frac{3}{1,5} = \frac{4}{2} = \frac{5}{2,5} = 2$. Els triangles són semblants (primer criteri).

3. DETERMINACIÓ DE SI DOS POLÍGONS SÓN SEMBLANTS

Determina si aquests polígons són semblants:



PRIMER. Estudiem la igualtat dels angles dels polígons

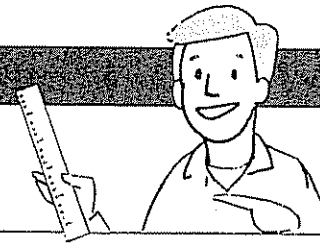
$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}'$$

Els angles dels dos trapezis són iguals

SEGON. Comprovem la proporcionalitat entre els seus costats

$$\frac{10}{14} \neq \frac{8}{8}. \text{ Els costats no són proporcionals.}$$

Els polígons no són semblants.

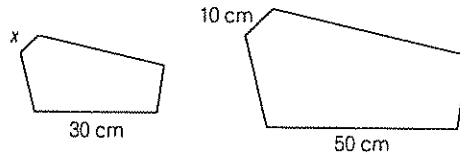


4. CÀLCUL DE LA LONGITUD D'UN COSTAT EN DOS POLÍGONS SEMBLANTS

Calcula la longitud del costat desconegut, si saps que els dos polígons són semblants.

PRIMER Escollim dos costats que es corresponguin i de longitud coneguda.

SEGON Formem una proporció amb aquests dos costats, el costat desconegut i el que hi correspon



$$\frac{30}{50} = \frac{x}{10} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 10}{50} = 6 \text{ cm}$$

5. DETERMINACIÓ DE L'ESCALA A LA QUAL ESTÀ DIBUIXAT UN PLÀNOL

A quina escala està dibuixat un plànol que representa una distància de 30 m amb una longitud de 2,5 m?

PRIMER. Mesurem sobre el plànol la longitud que coneixem a la realitat.

En aquest cas, la longitud és 2,5 cm.

SEGON Expressem totes dues longituds en la mateixa unitat i ho dividim.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \text{ m} = 3.000 \text{ cm} \\ 2,5 \text{ cm} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{3.000}{2,5} = 1.200$$

TERCER. Escrivim l'escala com a 1 : a, en què a és el nombre que resulta de la divisió

Escala $\rightarrow 1 : 1.200$

6. DETERMINACIÓ D'UNA LONGITUD EN UN MAPA SI EN CONEIXEM L'ESCALA

Quina distància real representa una longitud de 2,5 cm en un mapa que està dibuixat a una escala d'1 : 1.200?

PRIMER. Mesurem sobre el plànol la longitud que volem calcular

En aquest cas, la longitud és 2,5 cm.

SEGON. Com que l'objecte real i la seva representació són figures semblants, hi apliquem la proporció.

$$\text{Escala} \rightarrow 1 : 1.200 \rightarrow \frac{1}{1.200} = \frac{2,5}{\overline{AB}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{AB} = 1.200 \cdot 2,5 = 3.000 \text{ cm} = 30 \text{ m}$$

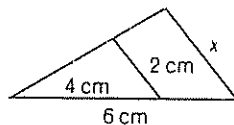
La distància que representa és 30 m.

I ARA... PRACTICA

Càlcul de la longitud d'un segment mitjançant el teorema de Tales

1. La longitud de x és:

- a) 3 cm c) 4 cm
b) 3,5 cm d) 1 cm



Determinació de si dos triangles són semblants

2. Si els triangles són semblants, x fa:

- a) 5 cm b) $5\sqrt{3}$ cm c) 5,9 cm d) 6 cm



Determinació de si dos polígons són semblants

3. Dos quadrats de costats 7 cm i 5 cm, són semblants?

- a) Si b) No

4. Perquè un rectangle de 12 cm d'alçada sigui semblant a un altre de 8 cm d'alçada i 3 cm d'amplada, la seva amplada ha de fer:

- a) 4 cm b) 4,5 cm c) 5 cm d) 5,5 cm

Determinació de l'escala a la qual està dibuixat un plànol

5. Si representem una distància de 30 km com a 2,5 cm, l'escala és:

- a) 1 : 1.200.000 b) 1 : 1.200 c) 1 : 12

Determinació d'una longitud en un mapa si en coneixem l'escala

6. La distància real entre dues ciutats que, en un mapa a escala 1 : 5.000.000, disten 7 cm és:

- a) 35.000 km b) 350 km c) 3.500 km

Activitats

SEGMENTS PROPORCIONALS

36. ● Calcula la raó d'aquests segments:

- a) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$
 b) $\overline{AB} = 64 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 1 \text{ m}$
 c) $\overline{AB} = 15 \text{ dm}$ $\overline{CD} = 9 \text{ m}$
 d) $\overline{AB} = 20 \text{ m}$ $\overline{CD} = 4 \text{ m}$

37. ● Si la raó $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{1}{4}$, calcula:

- a) \overline{AB} , si $\overline{CD} = 76 \text{ cm}$
 b) \overline{CD} , si $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$

38. ● Si la raó $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 1,6$, calcula:

- a) \overline{AB} , si $\overline{CD} = 9 \text{ dm}$
 b) \overline{CD} , si $\overline{AB} = 13,6 \text{ cm}$

39. ●● Són proporcionals els segments AB, CD, EF i GH en les sèries següents?

- a) $\overline{AB} = 2 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$ $\overline{GH} = 16 \text{ cm}$
 b) $\overline{AB} = 2 \text{ dm}$ $\overline{CD} = 1 \text{ m}$ $\overline{EF} = 5 \text{ cm}$ $\overline{GH} = 25 \text{ cm}$
 c) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 4 \text{ m}$ $\overline{GH} = 3 \text{ m}$
 d) $\overline{AB} = 3 \text{ m}$ $\overline{CD} = 4 \text{ m}$ $\overline{EF} = 12 \text{ dm}$ $\overline{GH} = 16 \text{ dm}$

FES-HO AIXÍ

COM CALCULEM UN SEGMENT PROPORCIONAL A TRES SEGMENTS MÉS?

40. Donats tres segments: $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 3 \text{ cm}$ i $\overline{EF} = 2 \text{ cm}$, calcula la longitud d'un quart segment, \overline{GH} , que sigui hi proporcional.

El segment que volem trobar l'anomenem segment quart proporcional

PRIMER. Hi apliquem la definició de segments proporcionals

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}}$$

SEGON. Resolem l'equació.

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}} \rightarrow 4 \cdot \overline{GH} = 3 \cdot 2 \rightarrow \overline{GH} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ cm}$$

TERCER. Comprovem la solució.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{1,5} \rightarrow 4 \cdot 1,5 = 3 \cdot 2 \rightarrow 6 = 6$$

41. ● Calcula la longitud que ha de tenir el quart segment proporcional als segments AB, CD i EF .

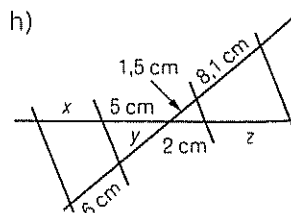
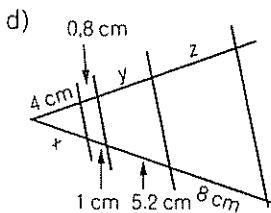
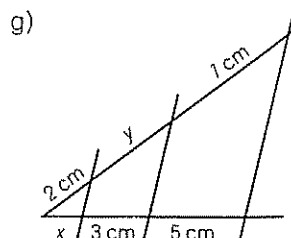
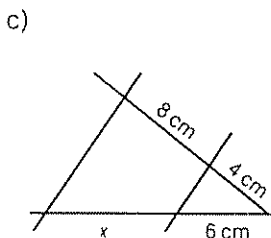
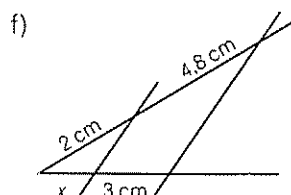
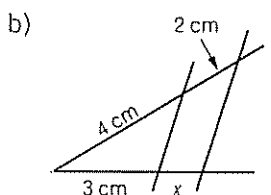
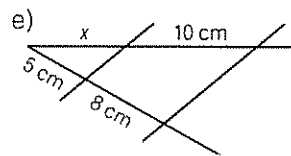
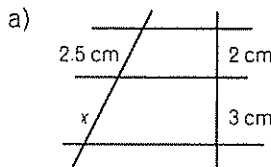
- a) $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 9 \text{ cm}$
 b) $\overline{AB} = 2 \text{ m}$ $\overline{CD} = 7 \text{ m}$ $\overline{EF} = 8,2 \text{ m}$
 c) $\overline{AB} = 3 \text{ dm}$ $\overline{CD} = 5 \text{ dm}$ $\overline{EF} = 21 \text{ dm}$
 d) $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 15 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 25 \text{ cm}$

42. ●● La raó de dos segments és $\frac{3}{5}$ i la suma de les seves longituds és de 8 cm . Troba la longitud de cada segment.

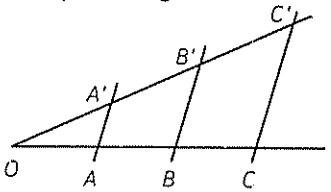
43. ●● La raó de dos segments és 4 i la diferència de les seves longituds és de 7 cm . Calcula la longitud de cada segment.

TEOREMA DE TALES

44. ●● Calcula les longituds desconegudes:



45. ● Considera aquesta figura:

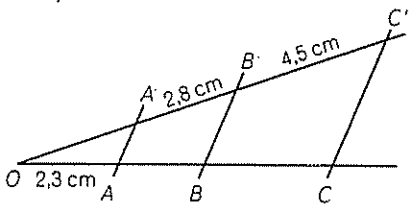


a) Si $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$ $\overline{OB} = 5 \text{ cm}$
 $\overline{OA'} = 2,6 \text{ cm}$ $\overline{OC'} = 11,7 \text{ cm}$
 calcula: $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{OB'}$ i \overline{BC}

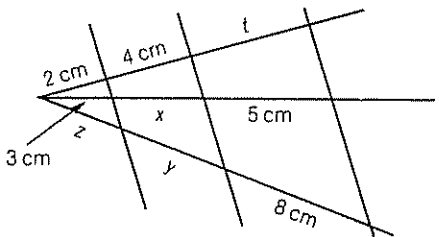
b) Si $\overline{OA'} = 4 \text{ cm}$ $\overline{OB} = 9 \text{ cm}$
 $\overline{OB'} = 12 \text{ cm}$ $\overline{OC'} = 18 \text{ cm}$
 calcula: \overline{OA} , \overline{AB} , $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, \overline{OC} i \overline{BC} .

c) Si $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$ $\overline{OC} = 22,5 \text{ cm}$
 $\overline{OC'} = 36 \text{ cm}$ $\overline{OB'} = 24 \text{ cm}$
 calcula: $\overline{OA'}$, \overline{OB} , \overline{AB} , \overline{BC} , $\overline{A'B'}$ i $\overline{B'C'}$.

46. ●● A la figura següent, la raó $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0,8$.
 Calcula $\overline{OA'}$, \overline{AB} i \overline{BC} .



47. ●● Determina les longituds desconegudes:



48. ● Divideix gràficament un segment \overline{AB} , amb $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, en:

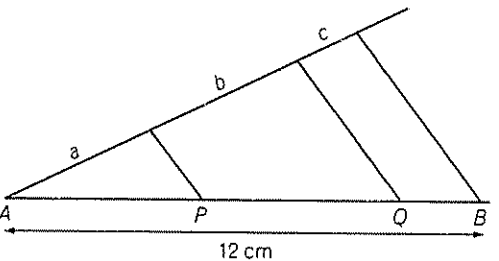
- a) 4 parts iguals. b) 6 parts iguals.

49. ●● Divideix gràficament un segment \overline{AB} , amb $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$, en parts proporcionals a tres segments d'aquestes mides:

- a) 3 cm, 5 cm i 6 cm c) 3 cm, 4 cm i 5 cm
 b) 2 cm, 4 cm i 6 cm d) 2 cm, 6 cm i 9 cm

Calcula les longituds dels segments i compara el resultat amb la solució gràfica.

50. ●● Observa la figura següent, en la qual el segment \overline{AB} , de 12 cm de longitud, es divideix en parts proporcionals als segments a , b i c . Calcula \overline{AP} , \overline{PQ} i \overline{QB} , amb aquestes dades:



- a) $a = 6 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ i $c = 4 \text{ cm}$
 b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ i $c = 3 \text{ cm}$
 c) $a = 8 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ i $c = 4 \text{ cm}$
 d) $a = 2 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ i $c = 1 \text{ cm}$

51. ●● Divideix un segment de 14 cm en tres parts, cadascuna el triple de l'anterior.

52. ●● Divideix un segment de 20 cm en tres parts, cadascuna la meitat de l'anterior.

SEMBLANÇA DE TRIANGLES

53. ● Calcula la longitud dels costats desconeguts en els parells de triangles semblants següents:

- a)
 b)
 c)
 d)

54. ● Dos triangles, \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$, són semblants. Els costats de \widehat{ABC} són:

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 5 \text{ cm} \quad \overline{CA} = 6 \text{ cm}$$

Calcula els costats de $\widehat{A'B'C'}$ i la raó de semblança, si $\overline{A'B'} = 7,2 \text{ cm}$.

55. ● La raó de semblança de dos triangles, \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$, és $r = \frac{1}{4}$.

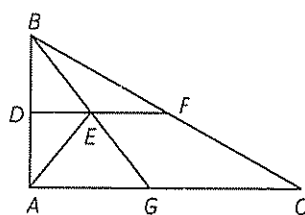
Calcula els costats desconeguts dels dos triangles, si saps que:

- a) $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ i $\overline{CA} = 10 \text{ cm}$
 b) $\overline{A'B'} = 20 \text{ cm}$, $\overline{B'C'} = 24 \text{ cm}$ i $\overline{C'A'} = 26 \text{ cm}$
 c) $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$ i $\overline{C'A'} = 16 \text{ cm}$

FES-HO AIXÍ

COM RECONEIXEM ELS TRIANGLES EN POSICIÓ DE TALES?

56. Indica quins triangles de la figura següent estan en posició de Tales:



PRIMER. Identifiquem tots els triangles possibles.

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{ABC} & \widehat{ABE} & \widehat{ABG} & \widehat{ADE} & \widehat{AEG} \\ \widehat{EBF} & \widehat{GBC} & \widehat{DBE} & \widehat{DBF} & \end{array}$$

SEGON. Prenem els que tenen un angle comú.

$$\widehat{ABC} \text{ i } \widehat{DBF} \text{ tenen l'angle } \widehat{B} \text{ en comú.}$$

$$\widehat{ABE}, \widehat{ABG} \text{ i } \widehat{DBE} \text{ tenen l'angle } \widehat{B} \text{ en comú.}$$

$$\widehat{EBF} \text{ i } \widehat{GBC} \text{ tenen l'angle } \widehat{B} \text{ en comú.}$$

TERCER. De cada grup de triangles amb un angle en comú, considerem els que tenen paral·lels els costats oposats a aquest angle.

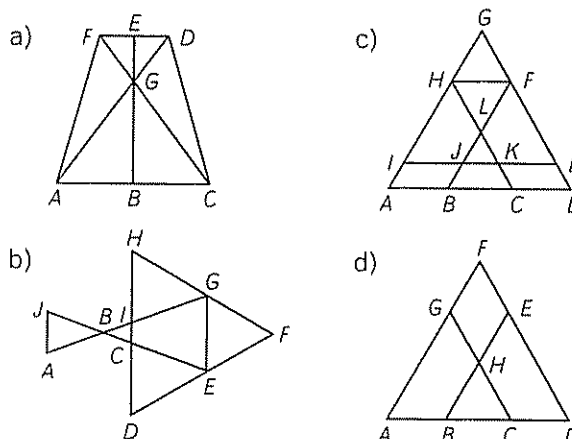
$$\widehat{ABC} \text{ i } \widehat{DBF} \text{ tenen } AC \text{ i } DF \text{ paral·lels}$$

$$\widehat{ABG} \text{ i } \widehat{DBE} \text{ tenen } AG \text{ i } DE \text{ paral·lels.}$$

$$\widehat{EBF} \text{ i } \widehat{GBC} \text{ tenen } EF \text{ i } GC \text{ paral·lels.}$$

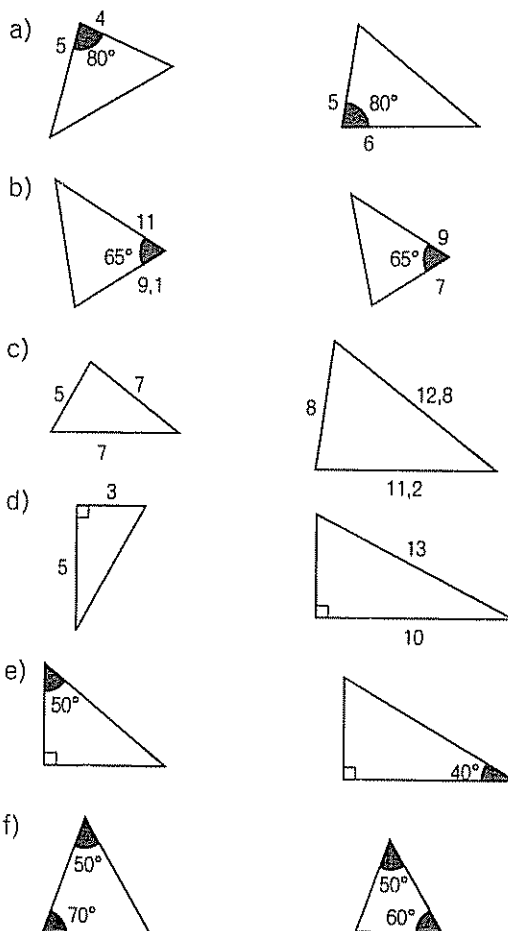
Per tant, aquests parells de triangles estan en posició de Tales.

57. ●● Identifica en les figures següents tots els triangles que estiguin en posició de Tales:



58. ● Els costats d'un triangle \widehat{ABC} fan $\overline{AB} = 12 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 15 \text{ mm}$ i $\overline{CA} = 21 \text{ mm}$, i els del triangle $\widehat{A'B'C'}$ fan $\overline{A'B'} = 35 \text{ mm}$, $\overline{B'C'} = 25 \text{ mm}$ i $\overline{C'A'} = 20 \text{ mm}$. Són semblants els dos triangles?

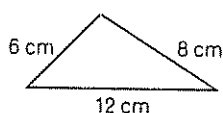
59. ●● Determina si aquests parells de triangles són semblants i explica quin criteri apliques en cada cas:



60. ●● Els costats d'un triangle \widehat{ABC} fan $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$ i $\overline{CA} = 6 \text{ cm}$. Troba la longitud dels costats d'un triangle semblant $\widehat{A'B'C'}$, si saps que:
- La raó de semblança és $r = 2,5$.
 - El perímetre de $\widehat{A'B'C'}$ és de 30 cm .

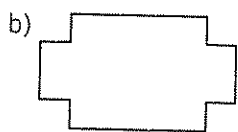
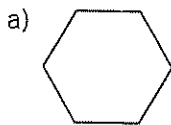
POLÍGONS SEMBLANTS

61. ● Dibuixa dos quadrats semblants que tinguin les raons de semblança següents:
- $r = 2$
 - $r = \frac{1}{2}$
 - $r = 2,5$
 - $r = \frac{1}{3}$
62. ● Dibuixa triangles semblants que tinguin aquestes raons de semblança respecte del que està dibuixat:



- $r = \frac{1}{2}$
- $r = \frac{1}{4}$
- $r = 3$
- $r = \frac{5}{4}$

63. ● Dibuixa figures semblants a les següents que tinguin com a raó de semblança $r = 2$ i $r = 0,5$:



64. ●● Dos triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants i la seva raó de semblança és $\frac{1}{4}$. Les mides

dels costats del triangle \widehat{ABC} són $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 10 \text{ cm}$ i $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$. Troba les longituds dels costats de l'altre triangle.

65. ●● Dos triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants i la seva raó de semblança és 3 . Les mides dels costats del triangle \widehat{ABC} són $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ i $\overline{AC} = 3,5 \text{ cm}$. Troba les longituds dels costats de l'altre triangle.

66. ●● Raona si les afirmacions següents són certes:

- Tots els quadrats són semblants
- Tots els rectangles són semblants
- Tots els pentàgons són semblants
- Tots els pentàgons regulars són semblants
- Tots els triangles rectangles són semblants

67. ●●● Troba el perímetre d'un rectangle que és semblant a un altre rectangle de costats 8 cm i 5 cm , amb aquestes raons de semblança:

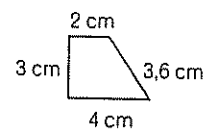
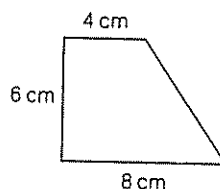
- $r = 2$
- $r = 0,5$
- $r = \frac{3}{4}$
- $r = \frac{5}{2}$

Quina relació hi ha entre els perímetres del rectangle original i els dels triangles semblants?

FES-HO AIXÍ

QUINA RELACIÓ HI HA ENTRE EL PERÍMETRE I L'ÀREA DE DUES FIGURES SEMBLANTS?

68. Calcula el perímetre i l'àrea d'aquests dos trapezis semblants:



Si dos polígons són semblants, es compleix que:

- Els perímetres són proporcionals amb raó r .
- Les àrees són proporcionals amb raó r^2 .

PRIMER. Calculem la raó de semblança del primer polígon respecte del segon.

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2 \leftarrow \text{Raó de semblança}$$

SEGON. Obtenim el perímetre i l'àrea del segon polígon.

$$P = 3 + 4 + 2 + 3,6 = 12,6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

TERCER. Multipliquem aquests resultats per la raó i pel quadrat de la raó, i obtenim el perímetre i l'àrea del primer polígon, respectivament.

$$P = 12,6 \cdot r = 12,6 \cdot 2 = 25,2 \text{ cm}$$

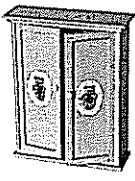
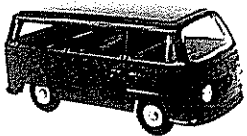

$$A = 9 \cdot r^2 = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ cm}^2$$

69. ●● Troba el perímetre i l'àrea d'aquests polígons semblants:

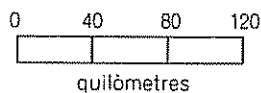
- Un triangle semblant a un triangle rectangle de costats 3 cm , 4 cm i 5 cm , i raó 3 .
- Un quadrat semblant a un quadrat de costat 3 cm i raó 4 .
- Un rectangle semblant a un rectangle de costats 4 cm i 6 cm , i raó 2 .

ESCALES

70. ● Expressa mitjançant una escala numèrica:
 a) 25 cm d'un plànol representen 25 km reals
 b) 0,8 dm d'un plànol representen 160 km reals
71. ● Expressa mitjançant una escala numèrica i una escala gràfica:
 a) 1 cm al plànol equival a 2 km a la realitat.
 b) 1 cm al plànol equival a 50 km a la realitat.
72. ● Calcula l'alçada real dels objectes:

Objecte	Escala
	1 : 20
	1 : 10
	1 : 25

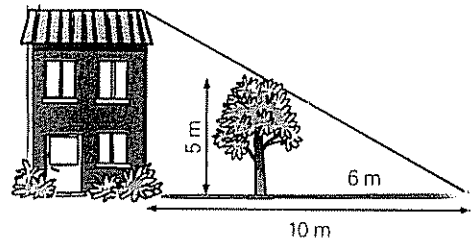
73. ● Troba la distància real entre dos pobles separats 4 cm en un mapa amb aquesta escala:



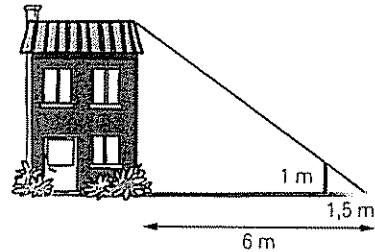
74. ● La distància real entre dues ciutats és de 450 km. Troba la distància que les separa en un mapa dibuixat a escala 1: 1.500.000.
75. ●● La carretera que uneix dos pobles està representada en un mapa a escala 1: 500.000 i fa 6 cm de longitud. Quina seria la longitud de la carretera si la representem en un mapa a escala 1: 60.000?
76. ●● El plànol d'una casa està dibuixat a escala 1: 60.
 a) Quines dimensions reals té la cuina si al plànol fa 4 cm d'amplada i 7 cm de llargada?
 b) El passadís fa 7,5 m a la realitat. Quant fa de llargada al plànol?

PROBLEMES DE SEMBLANÇA

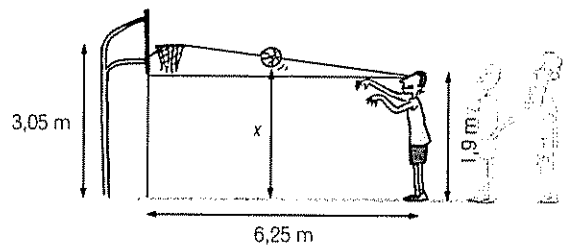
77. ●● Un arbre fa 5 m d'alçada i, a una determinada hora del dia, projecta una ombra de 6 m. Quina alçada tindrà l'edifici de la figura si a la mateixa hora projecta una ombra de 10 m?



78. ●● Si un pal fa 1 m, i l'ombra que projecta a una determinada hora del dia és d'1,5 m, quant fa un edifici que projecta una ombra de 6 m a la mateixa hora?



79. ●● Un jugador de bàsquet d'1,9 m llança una pilota a la cistella, que està situada a 6,25 m. Calcula l'alçada a què està la pilota quan va per la meitat del recorregut.

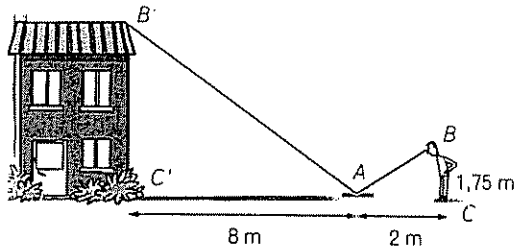


80. ●● L'ombra que projecta un pare que fa 1,8 m d'alçada, a les 3 de la tarda, és de 2,1 m. Quina alçada té el fill si l'ombra que projecta és d'1,5 m?
81. ●● L'ombra que projecta la Júlia, que fa 1,34 m, a la 1 de la tarda és d'1,2 m. Quant fa la seva mare si en el mateix moment projecta una ombra d'1,4 m?
82. ●● Al costat d'un semàfor, l'ombra d'en Joan fa 1,5 m i l'ombra del semàfor és 60 cm més llarga que la d'en Joan. Quina és la longitud del semàfor si en Joan fa 1,75 m d'alçada?

FES-HO AIXÍ

COM CALCULEM L'ALÇADA MITJANÇANT EL REFLEX EN UN MIRALL?

83. Per determinar l'alçada d'un objecte inaccessible, col·loquem un mirall al terra i ens allunyem la distància necessària per observar el punt més alt de l'objecte. Quina alçada té l'edifici?



PRIMER. Comprovem que els triangles \widehat{ABC} i $\widehat{A'B'C'}$ són semblants. En aquest cas, són semblants perquè són triangles rectangles i perquè els angles de refracció són iguals.

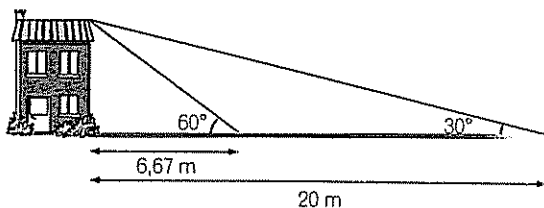
SEGON. Apliquem la proporcionalitat entre els seus costats

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} \rightarrow \frac{B'C'}{1,75} = \frac{8}{2} \rightarrow B'C' = 1,75 \cdot 4 = 7 \text{ m}$$

L'alçada de l'edifici és de 7 m.

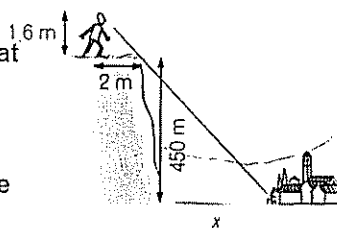
84. ●●● L'Anna està situada a 5 m de la riba d'un riu i veu reflectida una muntanya a l'aigua. Si l'Anna fa 1,70 m i el riu està a 3 km de la muntanya, quina alçada té la muntanya?

85. ●●● Mesurem l'ombra d'un edifici en dos moments del dia.



Calcula l'alçada de l'edifici.

86. ●●● L'Enric està a 2 m d'un penya-segat i veu alineat un poble amb el caire del penya-segat. A quina distància està el poble del penya-segat?



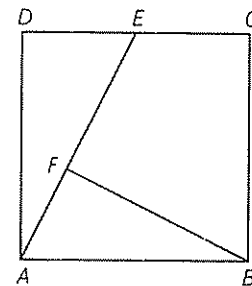
INVESTIGA

87. ●●● Raona les qüestions següents:

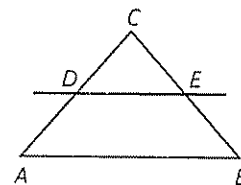
- Dos polígons amb tots els seus angles iguals, són semblants? En quina mena de polígons és verdadera aquesta afirmació?
- Dos polígons amb tots els seus costats proporcionals, són semblants? En quina mena de polígons és verdadera aquesta afirmació?

88. ●●● Troba l'àrea de la zona acolorida, si saps que:

- El quadrat fa 2 cm de costat
- El punt E és el punt mitjà del costat DC.
- L'angle \hat{F} és recte.



89. ●●● El triangle \widehat{ABC} és isòsceles, d'àrea 8 cm^2 . Si D i E són els punts mitjans dels costats iguals, calcula l'àrea del trapezi ABDE.

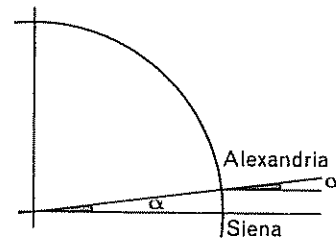


90. ●●● El primer mesurament raonable de l'extensió de la Terra és degut a Eratòstenes, que vivia a la ciutat de Siena (ara s'anomena Assuan).

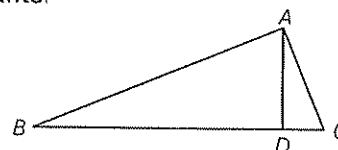
Suposava que la Terra era esfèrica i que els raigs solars queien paral·lels al planeta. Hi havia un dia a l'any que els raigs solars queien perpendiculars

sobre la seva ciutat, però això no passava a Alexandria, ciutat que es trobava a 5.000 estadis, i això significava que la Terra no era plana. Llavors va fer un mesurament el mateix dia d'aquest angle α , i era aproximadament de $7^\circ 12'$.

Si la mida d'un estadi era d'uns 150 metres, esbrina, mitjançant una regla de tres, quina era la mida d'un meridià terrestre segons Eratòstenes.

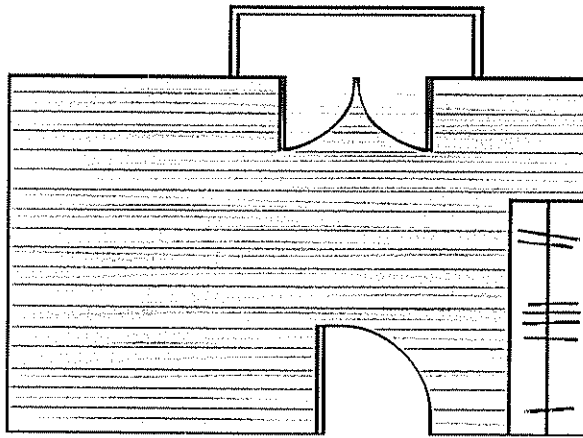


91. ●●● Demuestra que l'altura sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle en genera dos més de semblants.



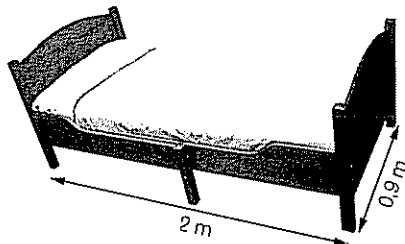
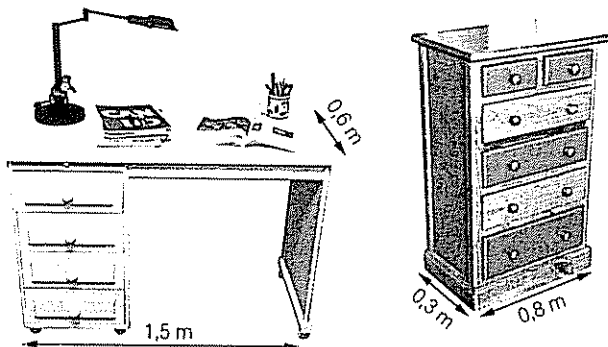
A la vida quotidiana

92. ●●● En Ramon se'n va a viure a un pis nou. Segons el plànol, aquesta serà la seva habitació:



El plànol està dibuixat a escala i l'únic que en Ramon sap de la seva nova habitació és que a la realitat fa 4,56 m de llargada.

En aquesta habitació haurà de distribuir els mobles que té. Per fer-se una idea de com els col·locarà, n'ha pres les mides.

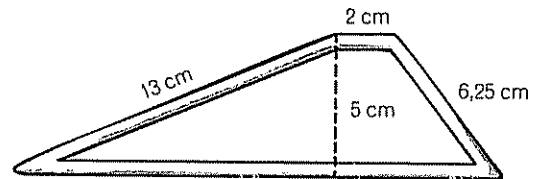


Després, els dibuixarà a escala i els retallarà. Aquests retalls els col·locarà sobre el plànol de l'habitació, i farà proves per decidir quina serà la ubicació dels mobles.

Copia el plànol a la teva llibreta i determina com es poden distribuir els mobles.

Podrà muntar a la nova habitació la maqueta completa del seu tren elèctric, que fa $2,5 \times 1,5$ m?

93. ●●● Aquesta és la peça que s'ha de fabricar per a l'enganxall de vagons de tren.



Per programar la màquina que la fabricarà cal construir la mateixa peça a una escala més petita. Quan es col·loqui aquesta peça sobre un escàner i s'hi indiqui l'escala, la màquina fabricarà totes les peces que s'encarreguin.

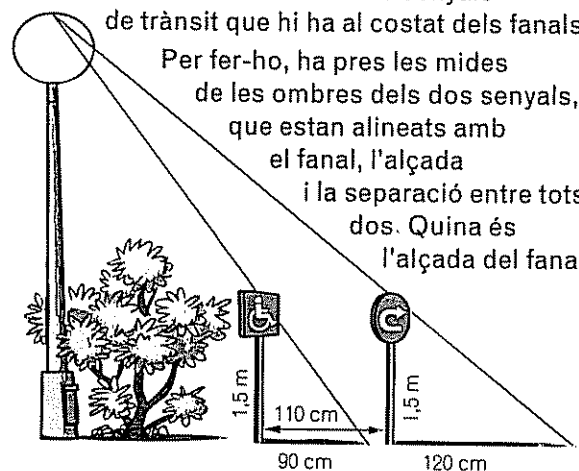


Si disposem d'una barreta de 6,5 cm de llargada i volem fer la peça tan gran com puguem, quina escala farem servir?

94. ●●● A la cantonada de la casa d'en Ricard han posat un fanal molt alt. En Ricard pensa que l'altura del fanal incompleix la normativa sobre contaminació lumínica i vol esbrinar quina alçada té exactament.

Al principi va pensar fer-ho mesurant-ne l'ombra, però com que el fanal està envoltat de plantes no el pot mesurar amb exactitud. Així doncs, ha decidit utilitzar les mides de dos senyals de trànsit que hi ha al costat dels fanals.

Per fer-ho, ha pres les mides de les ombres dels dos senyals, que estan alineats amb el fanal, l'alçada i la separació entre tots dos. Quina és l'alçada del fanal?



9

Figures planes. Àrees

El regal

Mentre es treia de sobre la pols que l'empedrat camí li havia dipositat damunt les robes i les sandàlies, Apol·loni de Perge mirava amb admiració el temple d'Artemisa, una de les set meravelles construïdes al món.

Després d'aquest parc agencament, va girar la vista cap als arbres i, sota una figuera, va veure Eudem, l'amic amb qui havia quedat, que descansava.

—La pujada és cansada, però paga la pena. El temple és el més semblant a l'Olimp dels déus que es pot veure a la Terra —va dir Apol·loni, mentre s'asseia al seu costat.

—No ho discuteixo, Apol·loni —va contestar Eudem—. Però hauries de fer ofrenes en honor d'Atena, que és la deessa de la saviesa, i no d'Artemisa, deessa de la cacera.

—Quan visito un amic sempre porto algun regal, i si vaig a la casa d'una deessa, per què no ho haig de fer? —va raonar Apol·loni.

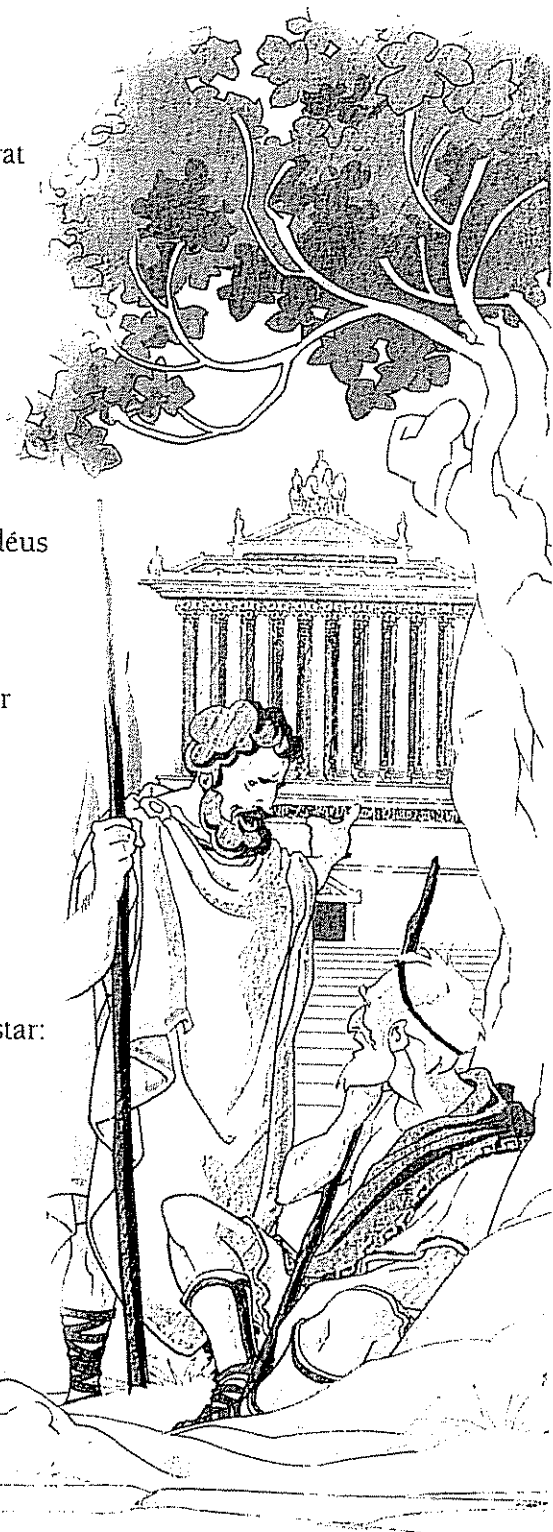
Eudem li va preguntar:

—Llavors a mi, quin regal m'has portat?

Apol·loni es va arronsar d'espatlles i va contestar:

—No en tens prou amb l'abraçada d'un amic! A més, com que sé que t'agraden, et porto una endevinalla geomètrica: Com es pot trobar una circumferència tangent a tres circumferències més donades?

Si dues circumferències tangents es tallen en un punt, en quants punts es poden tallar dues circumferències?



PLA DE TREBALL

En aquesta unitat aprendràs a...

- Conèixer i aplicar el teorema de Pitàgores
- Calcular l'àrea de triangles, paral·lelograms, trapezis i polígons regulars.
- Trobar la longitud d'una circumferència i d'un arc de circumferència
- Reconèixer i calcular l'àrea de figures circulars.