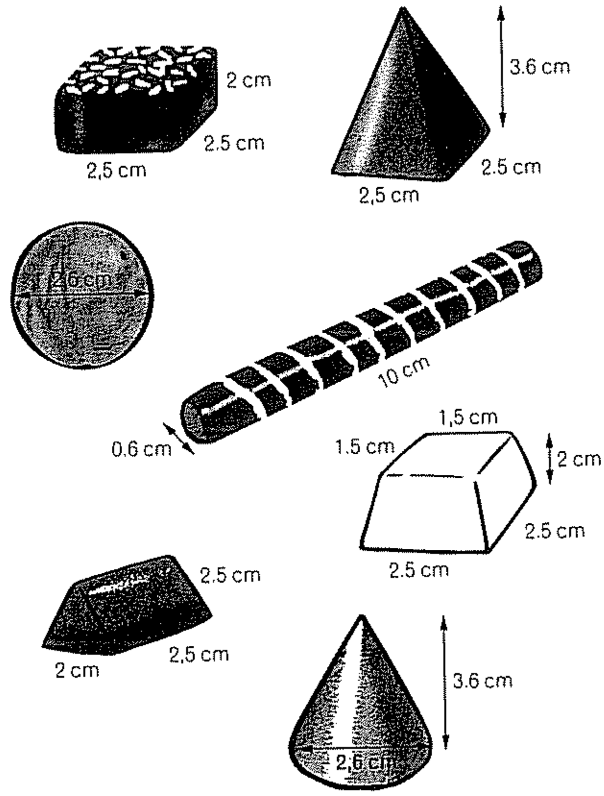
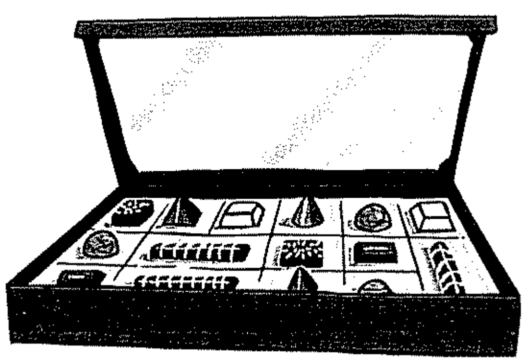
A la vida quotidiana

99. ●●● A Bombons Bombai tenen molta cura del disseny dels bombons que fabriquen. Per això, opinen que la qualitat de les matèries primeres que fan servir és essencial: cacau, vainilla, menta... Però també donen una importància especial a la forma dels bombons.



Els bombons són massissos i els fabriquen amb una mescla de xocolates diferents, als quals afegeixen aromes diversos. Una composició harmoniosa d'aquests bombons a la capsa en què els comercialitzen fa que el producte final es consideri una autèntica obra d'art.



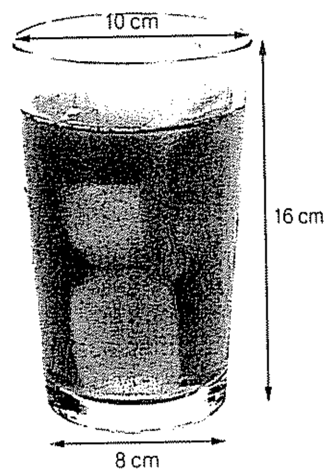
Quina quantitat de xocolata necessiten per fabricar una capsa com aquesta?

100. ●●● En una famosa cadena de restaurants anuncien l'oferta següent:

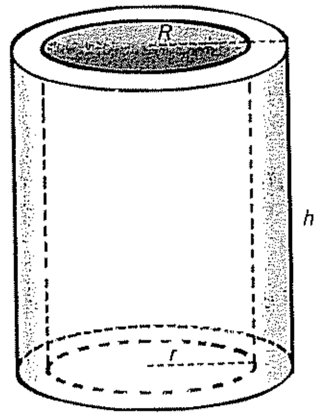
En aquesta oferta fan servir gots com el que veus al cartell, amb forma de con tallat per un pla paral·lel a la base.

Hi introdueixen vuit glaçons cúbics de 3 cm de costat i, després, els omplen de refresc fins a 2 cm del caire.

Si tens en compte que $\frac{1}{10}$ del volum dels glaçons sura en el refresc i queda fora del got, calcula el volum de refresc que contenen.



101. ●●● Hem rebut l'encàrrec de fabricar 25 m de canonades per les quals circularan 240 ℓ d'aigua i que tindran una gruixària de 2 mm.



Quantes plaques de plom de 48,56 kg ens caldran si la densitat és d'11,4 g/cm^3?

12

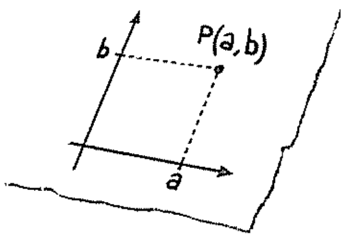
Funcions

L'enginy i l'espasa

René, un jove soldat que el 1618 tenia vint-i-dos anys, passejava per la ciutat de Breda. Havia decidit viatjar per conèixer món i no es penedia gens d'haver-ho fet com a soldat de fortuna. Podia llogar la seva espasa o el seu enginy; ningú no li preguntava per l'espasa, però, en canvi, s'exigia prova de l'enginy.

En arribar a una plaça li va cridar l'atenció un grup de gent que s'amuntegava davant d'una façana i que volia llegir un cartell que hi havia enganxat. La curiositat va poder amb ell i, com que desconeixia l'idioma, va demanar que li ho traduïssin al francès o al llatí. Era un problema matemàtic per a la resolució del qual Beeckman, un científic de renom al país, oferia una recompensa.

L'endemà René es va presentar a casa seva amb la solució del problema. Beeckman es va sorprendre en veure un soldat; però, quan va llegir la solució, va tornar a mirar el jove i ja no va veure l'espasa, sinó que en va veure l'enorme talent.



El jove era René Descartes i el seu enginy el va fer immortal. Li deuen el nom els diagrames cartesians, on se substitueix cada punt del pla per un parell de nombres que l'identifiquen.

En uns eixos cartesianos, assenyala els punts P *i* Q *les coordenades dels quals són* P(2, 3) *i* Q(–1, 2).

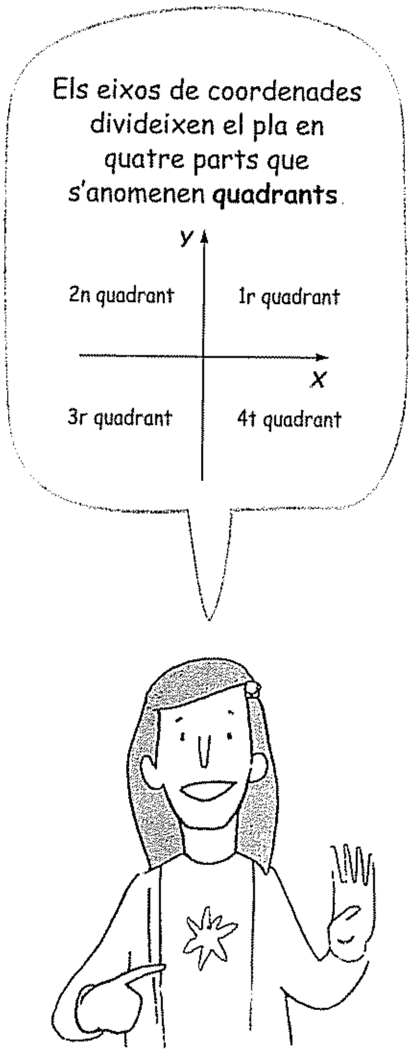
PLA DE TREBALL

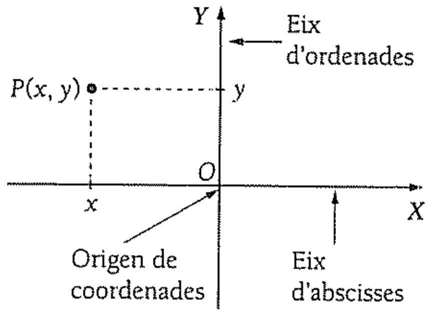
En aquesta unitat aprendràs a...

- Representar punts en coordenades cartesianes.
- Descriure una funció mitjançant una taula de valors, una gràfica o una expressió algebraica.
- Estudiar les característiques principals d'una funció.
- Representar funcions de proporcionalitat directa o inversa.

1 Coordenades cartesianes

Les coordenades d'un punt P en el pla vénen determinades per un parell ordenat de nombres, x i y, anomenats **coordenades cartesianes** del punt, i que s'escriuen $P(x, y)$.



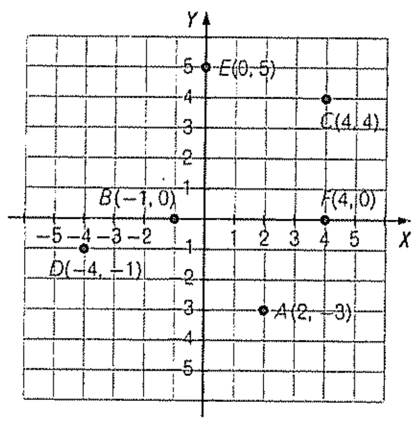


– La primera coordenada, x, es mesura sobre l'eix d'abscisses o horitzontal, OX. S'anomena **abscissa** del punt P.
– La segona coordenada, y, es mesura sobre l'eix d'ordenades o vertical, OY. S'anomena **ordenada** del punt P.
– El punt de tall dels eixos s'anomena **origen de coordenades**, O.

EXEMPLE

1 Representa en un sistema de coordenades els punts següents:

$A(2, -3)$
$B(-1, 0)$
$C(4, 4)$
$D(-4, -1)$
$E(0, 5)$
$F(4, 0)$



EXERCICIS

PRACTICA

1 Representa els punts següents en un sistema de coordenades cartesianes. Quants n'hi ha en cada quadrant?

$A(-6, 0)$ $D(-5, 3)$
$B(-3, -3)$ $E(1, 7)$
$C(0, -2)$ $F(3, -5)$

2 Donat el punt $P(x, y)$, amb $x > 0$ i $y < 0$, en quin quadrant estarà representat? Posa'n un exemple.

APLICA

3 Representa en un sistema de coordenades els punts.

$A(1, 1)$ $B(6, 1)$ $C(6, 6)$ $D(1, 6)$

Uneix els punts A, B, C i D. Quina figura has obtingut?

REFLEXIONA

4 Representa tots els punt amb ordenada 2. Què hi observes?

2 Concepte de funció

Una **funció** és una relació entre dues variables numèriques, x i y, de manera que a cada valor de x correspon un únic valor de y.

La variable x és la **variable independent**, i és un valor prefixat; i la variable y és la **variable dependent**, i el seu valor depèn del valor de x.

Si representem els parells de valors relacionats, (x, y), en un sistema de coordenades, com si fossin punts, obtenim la **gràfica de la funció**.

EXEMPLES

2 Comprova si la variació de la temperatura màxima des del dia 15 fins al 25 de desembre, anotada a la taula, és una funció.

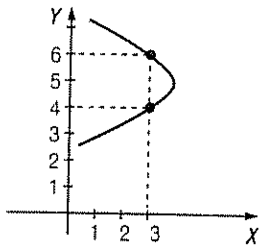
Dies (x)	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Temperatura (y)	16	10	12	24	20	16	14	18	20	18	20

A cada valor de la variable x (dies) correspon un únic valor de la variable y (temperatura) En cada dia, la temperatura màxima és única.

La relació entre les variables x (dies) i y (temperatura) és una funció

3 Estudia si aquestes gràfiques corresponen a una funció.

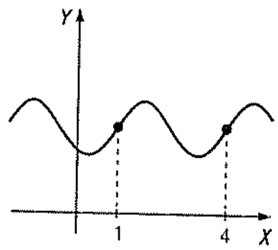
a)



Per al valor 3 de x, a y corresponen dos valors, 4 i 6

Aquesta gràfica no correspon a una funció.

b)



A cada valor de x correspon un únic valor de y.

Aquesta gràfica correspon a una funció

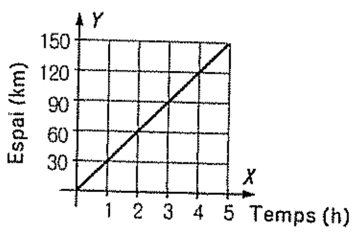
EXERCICIS

PRACTICA

5 Estudia si aquests valors són d'una funció.

Hores (h)	12	13	14	15	16	17
Altura (m)	3	6	6	9	8	7

6 Aquesta gràfica representa una funció?



APLICA

7 Cada quilo de fruita val 2,50 €. En la funció que associa cada pes amb el preu, troba les imatges per a 2, 4, 6, 8 i 10 quilos.

REFLEXIONA

8 Indica quines d'aquestes relacions són funcions i quines no ho són.

a) Títol d'un llibre i nombre de pàgines.

b) Velocitat i temps per recórrer un trajecte

c) Hora del dia i longitud d'una ombra.

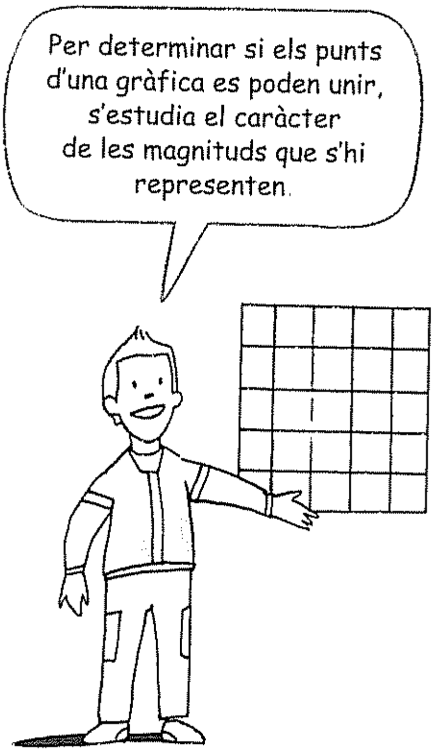
3 Representació gràfica d'una funció

Una funció es pot expressar mitjançant una taula de valors, una gràfica o una equació

3.1 Funció expressada mitjançant una taula de valors

Per representar gràficament una funció expressada mitjançant una taula de valors, se'n representen els parells de valors com a punts en un sistema d'eixos cartesians:

- Els valors de la variable independent es representen sobre l'eix horitzontal o d'abscisses.
- Els valors de la variable dependent es representen sobre l'eix vertical o d'ordenades



EXEMPLE

4 Una botiga ofereix un model de telèfon mòbil a 45 € la unitat. Expressa aquesta funció en forma de taula i representa-la gràficament.

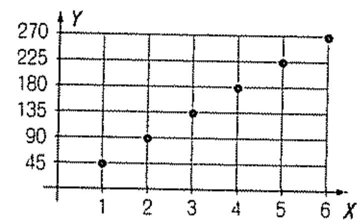
Si 1 mòbil val 45 €, 2 valdran 90 €, 3 valdran 135 €...

Nre. de mòbils (x)	1	2	3	4	5	6
Preu en € (y)	45	90	135	180	225	270

Representem aquests parells de valors en un sistema d'eixos, i obtenim la representació gràfica de la funció

El nombre de mòbils es representen en l'eix d'abscisses, eix X, i el preu en l'eix d'ordenades, eix Y

No unim els punts perquè no podem comprar 1,5 mòbils o 2,3 mòbils.



EXERCICIS

PRACTICA

9 Aquesta taula de valors relaciona la base amb l'àrea d'un rectangle de 2 cm d'altura.

Base (cm)	1	2	3	4	5	6
Àrea (cm²)	2	4	6	8	10	12

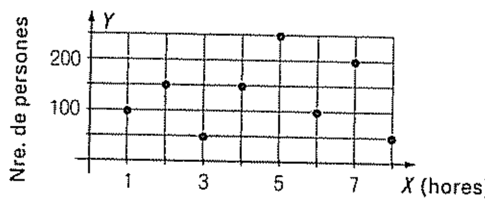
Representa gràficament els valors.

APLICA

10 Completa la taula i representa la funció que relaciona les magnituds.

Llet (ℓ)	1	3	5	9	10
Preu (€)	0,65				

11 Aquesta gràfica relaciona les hores que han passat des de la inauguració d'una exposició amb el nombre de persones que hi han anat. Forma la taula de valors corresponent.



REFLEXIONA

12 Posa un exemple d'una funció expressada mitjançant una taula de valors la representació gràfica de la qual tingui els punts units.

3.2 Funció donada mitjançant una expressió algebraica

L'expressió algebraica d'una funció s'escriu $y = f(x)$ i s'anomena **equació de la funció**.

A partir de l'equació obtenim la taula de valors. Per obtenir el valor de y, substituïm el corresponent valor de x a l'equació i operem.

Així, si a és un valor de la variable independent, la seva imatge, y, és $f(a)$.

EXEMPLE

5 Escriu l'expressió algebraica de la funció que a cada nombre li fa correspondre el seu doble menys una unitat.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to 2\cdot 1 - 1 = 1 \\ 2 \to 2\cdot 2 - 1 = 3 \end{array}\right\} \to \text{En general, } x \to 2\cdot x - 1$$

Per tant, l'expressió algebraica és $y = 2x - 1$, és a dir, $f(x) = 2x - 1$.

Elaborem la taula de valors i la gràfica corresponent.

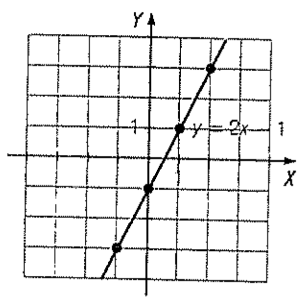
Valor de x	$y = f(x)$
-2	$f(-2) = 2\cdot(-2) - 1 = -4 - 1 = -5$
-1	$f(-1) = 2\cdot(-1) - 1 = -2 - 1 = -3$
0	$f(0) = 2\cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$
1	$f(1) = 2\cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$f(2) = 2\cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

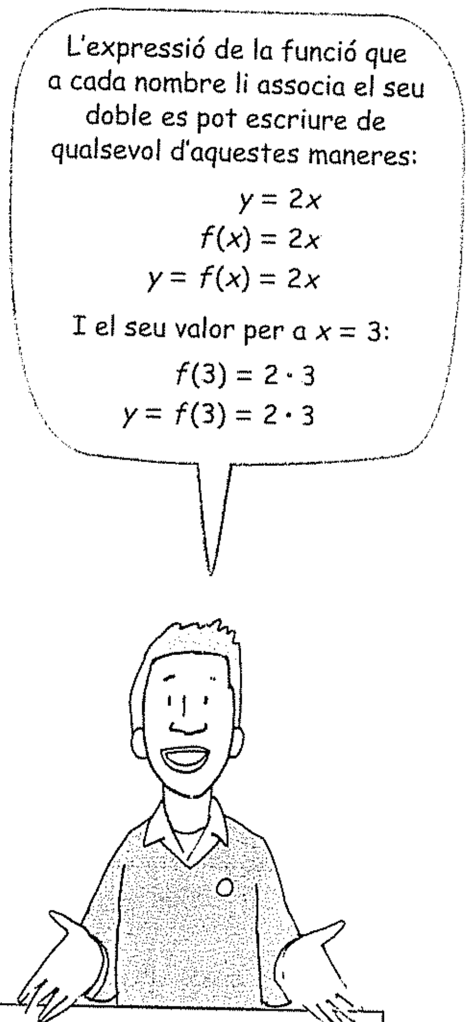
→

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3

Si representem aquests punts, obtenim la gràfica de la funció.

En aquest cas, es poden unir els punts perquè es pot calcular el doble menys una unitat de qualsevol nombre, encara que no sigui enter.





EXERCICIS

PRACTICA

13 Donada la funció que associa a cada nombre enter la seva quarta part més 5:

a) Troba'n l'expressió algebraica.

b) Calcula $f(2)$ i $f(0)$.

14 Donada la funció que associa a cada nombre el seu triple menys 7 unitats:

a) Troba'n l'expressió algebraica.

b) Calcula $f(3)$ i $f(5)$.

APLICA

15 Expressa la relació que hi ha entre el costat d'un quadrat i la seva àrea mitjançant una expressió algebraica.

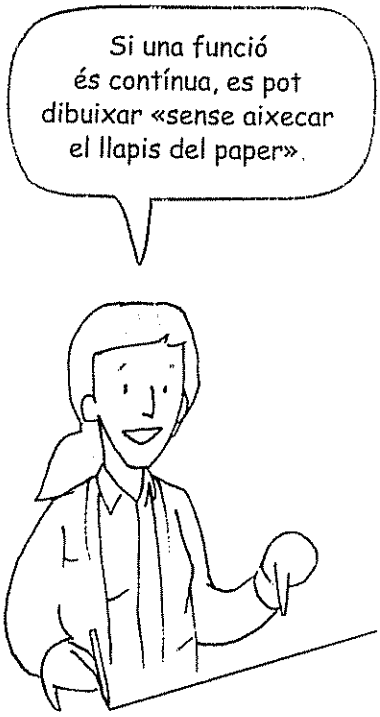
REFLEXIONA

16 La funció que relaciona cada instant (temps) amb la temperatura no té expressió algebraica. Raona-ho. Pots posar un altre exemple de funció semblant a aquesta?

4 Estudi d'una funció

4.1 Funció contínua i discontínua

- Una funció és **contínua** si podem dibuixar-ne la gràfica amb un sol traç.
- És **discontínua** si la seva gràfica no es pot dibuixar amb un sol traç.

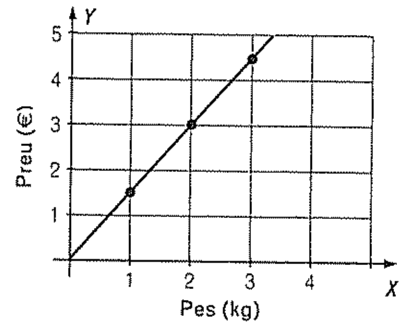


EXEMPLES

6 Si el quilo de tomàquets val 1,50 €, és contínua la funció que expressa la relació entre el pes dels tomàquets i el seu preu?

Per representar gràficament la relació entre aquestes dues variables, construïm una taula de valors

Quilos (x)	1	2	3	4
Preu en € (y)	1,50	3	4,50	6



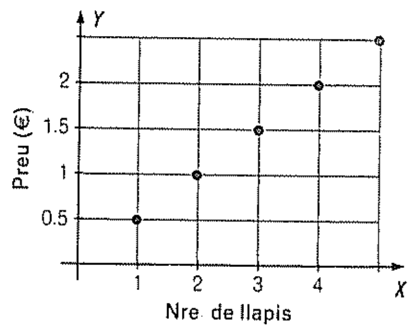
Es pot donar qualsevol pes de tomàquets, i per calcular-ne el preu n'hi ha prou a multiplicar per 1,50, és a dir, podem unir els punts de la gràfica. La funció és contínua.

Només representem els valors positius perquè no hi ha mesures de pes negatives.

7 Si cada llapis val 0,50 €, és contínua la funció que relaciona el nombre de llapis amb el seu preu?

Construïm la taula de valors:

Llapis (x)	1	2	3	4
Preu en € (y)	0,50	1	1,50	2



En aquest cas, els punts de la gràfica no es poden unir perquè només hi pot haver quantitats enteres de llapis. La funció no és contínua.

EXERCICIS

PRACTICA

17 Determina si la funció que relaciona l'edat amb el pes d'una persona és contínua. Alguns parells de valors estan recollits en la taula següent:

Edat (anys)	0,5	1	2	5	8	11
Pes (kg)	5	6	9	15	21	34

APLICA

18 En un magatzem es ven el litre de vi a 2,70 €. Expressa aquesta situació amb una funció, dibuixa'n la gràfica i determina si és contínua.

REFLEXIONA

19 Posa un exemple de funció contínua i un de discontínua.

4.2 Punts de tall amb els eixos

Els **punts de tall amb els eixos** d'una funció són els punts d'intersecció de la seva gràfica amb els eixos de coordenades.

- Els punts de tall amb l'eix X són de la forma $(a, 0)$. Per trobar-los, hem de calcular els valors de la variable x quan la variable y pren el valor 0.
- El punt de tall amb l'eix Y és de la forma $(0, b)$. Per trobar-lo, calculem el valor de la variable y quan la variable x pren el valor 0.

EXEMPLE

8 Determina els punts de tall amb els eixos de la gràfica d'aquestes funcions.

a) $y = 3x - 3$

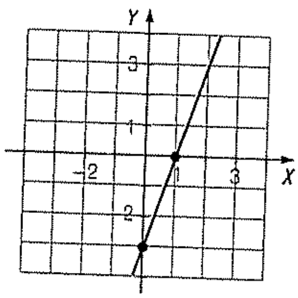
- Amb l'eix $X \rightarrow y = 0$

  $y = 3x - 3 \xrightarrow{y=0} 0 = 3x - 3 \rightarrow x = 1$

  Punt de tall amb l'eix X: $(1, 0)$
- Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0$

  $y = 3x - 3 \xrightarrow{x=0} y = 3 \cdot 0 - 3 \rightarrow y = -3$

  Punt de tall amb l'eix Y: $(0, -3)$



b) $y = 3 - x$

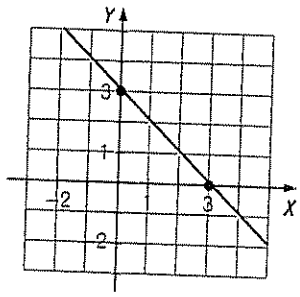
- Amb l'eix $X \rightarrow y = 0$

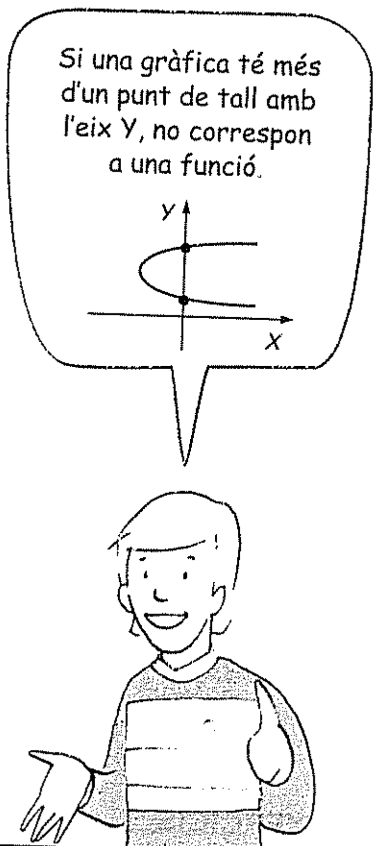
  $y = 3 - x \xrightarrow{y=0} 0 = 3 - x \rightarrow x = 3$

  Punt de tall amb l'eix X: $(3, 0)$
- Amb l'eix $Y \rightarrow x = 0$

  $y = 3 - x \xrightarrow{x=0} y = 3 - 0 \rightarrow y = 3$

  Punt de tall amb l'eix Y: $(0, 3)$

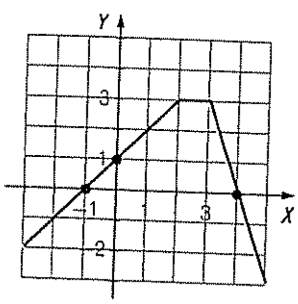




EXERCICIS

PRACTICA

20 Determina els punts de tall amb els eixos d'aquesta funció.



21 Representa la funció $y = -2x + 2$ i troba'n els punts de tall amb els eixos.

APLICA

22 Representa la funció $y = -x$. Troba'n els punts de tall amb els eixos.

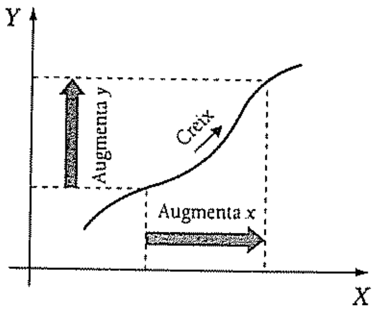
23 Dibuixa la gràfica d'una funció contínua que talli dos vegades l'eix X i una vegada l'eix Y.

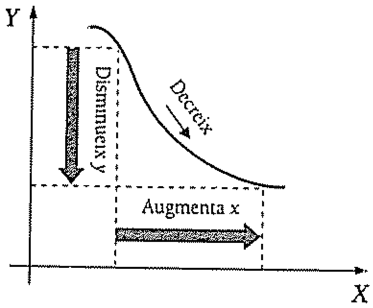
REFLEXIONA

24 Quants punts de tall amb l'eix X té una funció del tipus $y = x + a$? I amb l'eix Y?

25 Dibuixa una gràfica que no tingui punts de tall amb els eixos.

4.3 Creixement i decreixement

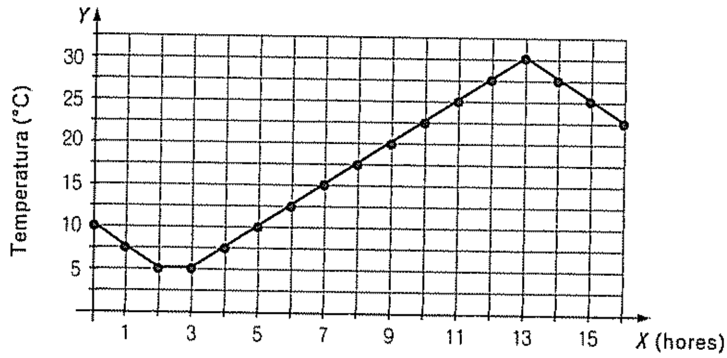




- Una **funció** és **creixent** en un tram si quan augmenta el valor de x també augmenta el valor de y.
- Al contrari, una **funció** és **decreixent** en un tram si quan augmenta el valor de x disminueix el valor de y.

EXEMPLE

9 La gràfica mostra la temperatura en una ciutat un dia de primavera. Observem en quins trams creix o decreix la funció.



– La gràfica és creixent des de les 3 fins a les 13 hores.

Quan augmenten els valors del temps (hores), augmenten els valors de la temperatura; si en seguim la trajectòria (d'esquerra a dreta), la funció creix.

– Dos trams de la gràfica són decreixents des de les 0 fins a les 2 hores, i des de les 13 fins a les 16 hores.

Quan augmenten els valors del temps (hores), disminueixen els valors de la temperatura; si en seguim la trajectòria (d'esquerra a dreta), la funció decreix.

EXERCICIS

PRACTICA

26 Representa l'evolució de la temperatura d'una tassa de cafè al llarg del temps.

Temps (min)	0	3	6	9	12
Temperatura (°C)	40	33	26	22	15

Indica quan creix i decreix la funció.

27 Un globus aerostàtic enregistra la temperatura de l'aire en funció de l'altitud.

Altitud (km)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (°C)	16	6	2	−1	−4	−6

Estudia si és creixent o decreixent.

APLICA

28 Dibuixa una funció per a cada una de les condicions.

a) Creix des de $x = 2$ fins a $x = 7$, i decreix des de $x = 7$ fins a $x = 10$

b) Decreix des de $x = 0$ fins a $x = 5$, i creix des de $x = 5$ fins a $x = 12$

REFLEXIONA

29 Representa la gràfica d'una funció que compleixi que:

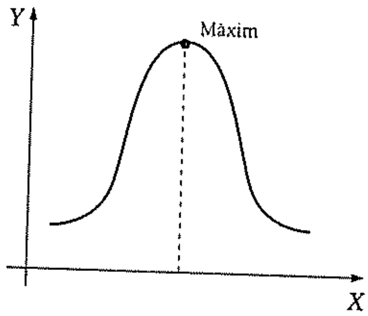
a) Sempre sigui creixent.

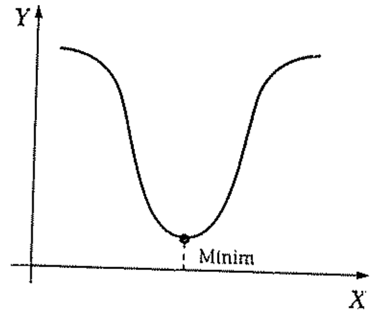
b) Sempre sigui decreixent.

4.4 Màxims i mínims

Als punts on la gràfica passa de ser creixent a ser decreixent, diem que la funció assoleix un **màxim**.

Als punts on la gràfica passa de ser decreixent a ser creixent, diem que la funció assoleix un **mínim**.

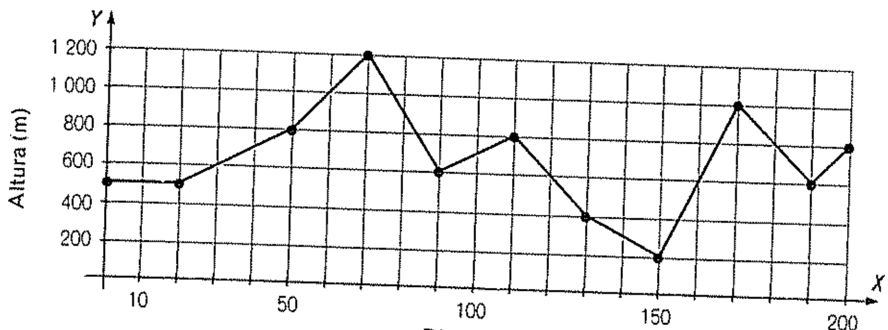




Els màxims i els mínims s'anomenen **extrems d'una funció**.

EXEMPLE

10 La gràfica següent mostra el perfil de l'etapa d'una prova ciclista, on la coordenada x representa els quilòmetres recorreguts i la coordenada y representa l'alçada respecte del nivell del mar. Troba'n els punts màxims i mínims.



Els punts (70, 1 200), (110, 800) i (170, 1 000) són màxims. En aquests punts, la gràfica passa de ser creixent a decreixent.

Els punts (90, 600), (150, 200) i (190, 600) són mínims. En aquests punts, la gràfica passa de ser decreixent a creixent.

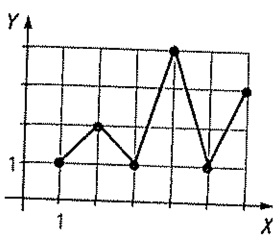
La funció té un **màxim absolut** en el quilòmetre 70, perquè és on assoleix l'alçada més gran sobre el nivell del mar, 1 200 m.

La funció té un **mínim absolut** en el quilòmetre 150, perquè és on assoleix la alçada més petita, 200 m.

EXERCICIS

PRACTICA

30 Indica els màxims i els mínims de la gràfica següent.



31 Les dades de la taula mostren la velocitat d'un motorista en funció del temps transcorregut.

Temps (min)	0	5	10	15	20	25
Velocitat (km/h)	0	45	90	45	60	30

Troba'n els màxims i els mínims.

APLICA

32 Representa gràficament les dades d'aquesta taula i troba'n els extrems.

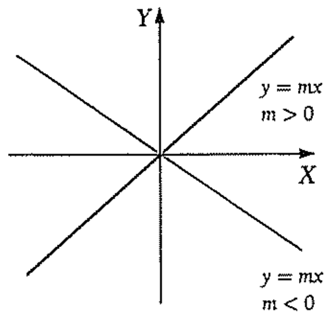
Altitud (km)	0	10	20	30	40	50
Temperatura (°C)	−20	−40	−30	−10	−18	5

REFLEXIONA

33 Dibuixa la representació gràfica d'una funció que tingui:

a) Un màxim i dos mínims.
b) Un màxim i cap mínim.
c) Cap màxim ni mínim.

5 Funció de proporcionalitat directa



Una **funció de proporcionalitat directa**, o funció lineal, és una funció que relaciona dues magnituds directament proporcionals.

- La seva expressió algebraica és del tipus $y = mx$, on m és la constant de proporcionalitat directa.
- La seva gràfica és una línia recta que passa per l'origen de coordenades.
- La constant de proporcionalidad, m, s'anomena **pendent** de la recta. Si és un nombre positiu, la funció és creixent. I si és negatiu, és decreixent.

EXEMPLE

11 Un cotxe circula a una velocitat constant de 120 km/h. Estudia i representa la funció que relaciona el temps transcorregut i l'espai recorregut pel vehicle.

Les variables són magnituds directament proporcionals.
Si augmentem el temps al doble, l'espai recorregut serà el doble.

Temps (h)		Distància (km)
1	$\longrightarrow$	120
2	$\longrightarrow$	$120 \cdot 2$
3	$\longrightarrow$	$120 \cdot 3$
x	$\longrightarrow$	$120x$

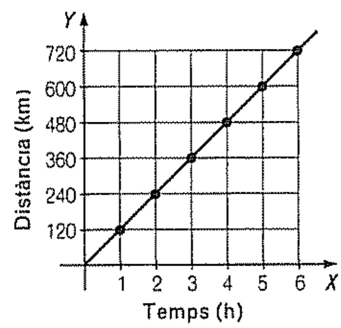
$\rightarrow$ L'expressió algebraica de la funció és $y = 120x$.

Construïm la taula de valors:

Temps (h)	1	2	3	4	5	6
Distància (km)	120	240	360	480	600	720

Representem la funció de proporcionalitat directa:

- La gràfica és una recta
- El pendent és $120 > 0$; per tant, és creixent.
- Representem els punts, els unim amb una línia recta, i comprovem que passa per l'origen de coordenades.



EXERCICIS

PRACTICA

34 Un litre d'un refresc val 1,25 €.

a) Elabora una taula que relacioni el preu en funció dels litres.

b) Troba l'expressió algebraica de la funció.

c) Representa gràficament la funció

APLICA

35 Volem instal·lar una línia elèctrica i cada metre de cable pesa 3 kg. Troba l'expressió algebraica de la funció.

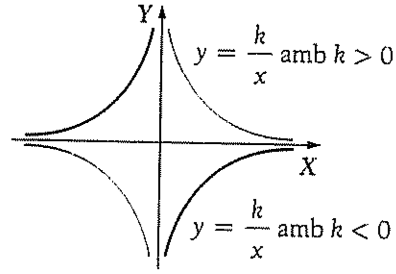
REFLEXIONA

36 Representa les funcions $y = 2x$, $y = -2x$. Estudia'n el creixement i compara-les.

6 Funció de proporcionalitat inversa

Una **funció de proporcionalitat inversa** és una funció que relaciona dues magnituds inversament proporcionals.

- La seva expressió algebraica és del tipus $y = \frac{k}{x}$, on k és la constant de proporcionalitat inversa.
- La gràfica d'una funció de proporcionalitat inversa és una corba anomenada **hipèrbola**, i no talla els eixos.



EXEMPLE

12 Un vehicle recorre 360 km. Estudia i representa la funció que relaciona la velocitat constant a què pot circular i el temps necessari per recórrer els 360 km.

Les variables són magnituds inversament proporcionals.

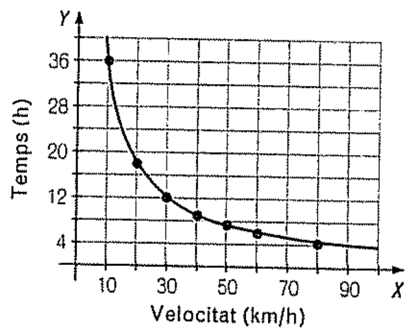
$$\left.\begin{array}{ccc} \underline{\text{Velocitat (km/h)}} & & \underline{\text{Temps (h)}} \\ 10 & \longrightarrow & 360:10 \\ 20 & \longrightarrow & 360:20 \\ 30 & \longrightarrow & 360:30 \\ x & \longrightarrow & \frac{360}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \text{L'expressió algebraica de la funció és } y = \frac{360}{x}$$

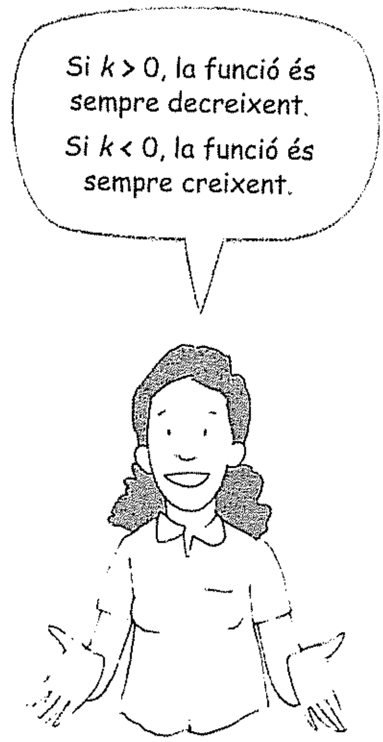
Construïm la taula de valors:

Velocitat (km/h)	10	20	30	40	50	60	80
Temps (h)	36	18	12	9	7,2	6	4,5

Representem la funció de proporcionalitat inversa:

- La gràfica és una hipèrbola.
- No talla els eixos.
- Només representem els valors positius de x, perquè no existeixen velocitats negatives.





EXERCICIS

PRACTICA

37 Representa les funcions següents:

a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{20}{x}$ c) $y = -\frac{3}{x}$

APLICA

38 En un trajecte, a una velocitat de 2 km/h, trigo 1,5 h. Quant trigaré a 15 km/h?

REFLEXIONA

39 Donades les funcions:

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{x} \qquad y = \frac{\frac{1}{3}}{x} \qquad y = \frac{\frac{1}{4}}{x}$$

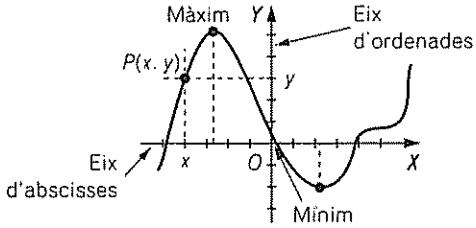
a) Representa-les als mateixos eixos.

b) Quina gràfica està per sobre de les altres?

L'essencial

COMPRÈN AQUESTES PARAULES

Funcions

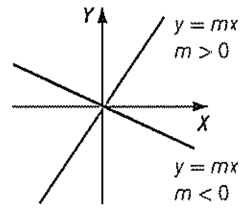


Equació de la funció

$$\underbrace{y}_{\text{Variable dependent}} = f(\underbrace{x}_{\text{Variable independent}})$$

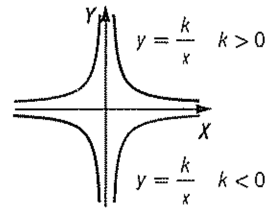
Funció de proporcionalitat directa

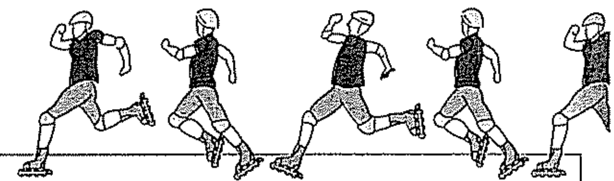
$$y = \underbrace{m}_{\text{Pendent}}x$$



Funció de proporcionalitat inversa

$$y = \frac{k}{x}$$





FES-HO AIXÍ

1. DETERMINACIÓ DE LES COORDENADES D'UN PUNT QUE PERTANY A UNA FUNCIÓ

Donada la funció $y = 2x - 7$, calcula el valor de y per a $x = 3$.

PRIMER. Substituïm x pel seu valor en l'equació de la funció.

Per a $x = 3$:

$$y = 2x - 7 \xrightarrow{x=3} y = 2 \cdot 3 - 7 = -1$$

SEGON. La primera coordenada és el valor de x i la segona és el valor de y.

El punt que busquem és $(3, -1)$.

2. DETERMINACIÓ DE SI UN PUNT PERTANY A UNA FUNCIÓ

Donada la funció $y = 2x - 7$, determina si el punt $A(-2, 0)$ pertany a la funció.

PRIMER. En l'equació de la funció, substituïm x per la primera coordenada del punt i y per la segona.

$$y = 2x - 7 \xrightarrow{x=-2,\, y=0} 0 \neq 2 \cdot (-2) - 7 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 \neq -11$$

SEGON. Si la igualtat s'acompleix, el punt pertany a la funció; si no s'acompleix, no hi pertany.

El punt $A(-2, 0)$ no pertany a la funció.

3. REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ

Representa la funció que relaciona la longitud del costat d'un quadrat amb el seu perímetre.

PRIMER. Construïm la taula de valors.

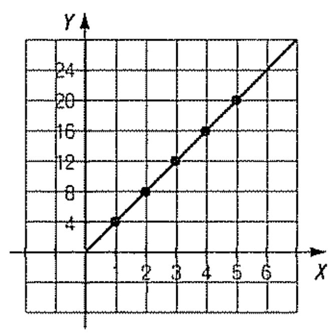
Costat (x)	1	2	3	4	5
Perímetre (y)	4	8	12	16	20

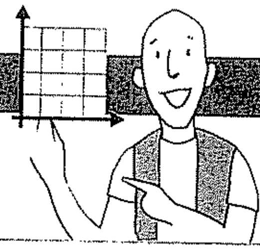
SEGON. Representem els punts en uns eixos cartesians.

TERCER. Analitzem si aquests punts es poden unir.

En aquest cas, x pot tenir qualsevol valor positiu, perquè el costat d'un quadrat pot tenir qualsevol longitud. A més, donada una longitud, si la multipliquem per 4 n'obtenim el perímetre.

Per tant, sí que podem unir els punts mitjançant una recta.





4. REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT DIRECTA

Un metre de filferro pesa 3 kg. Representa gràficament aquesta relació.

PRIMER. Determinem si les magnituds són directament proporcionals. En aquest cas, ho són

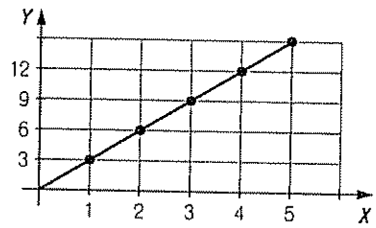
SEGON. Trobem l'equació, $y = mx$

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{Metres de filferro} \\ y \rightarrow \text{Pes} \end{array}\right\} \rightarrow y = 3x$$

TERCER. Construïm la taula de valors

Filferro (m)	1	2	3	4	5	6
Pes (kg)	3	6	9	12	15	18

QUART. Representem els punts en uns eixos i els unim amb una recta que passi per l'origen.



5. REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA

Una persona que neda a 1 km/h triga 4 hores a recórrer una distància. Representa la funció que relaciona la velocitat del nadador amb el temps que triga a recórrer aquesta distància.

PRIMER. Determinem si les magnituds són inversament proporcionals. En aquest cas, ho són

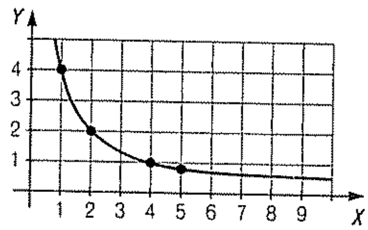
SEGON. Determinem l'equació, $y = \frac{k}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow \text{Velocitat} \\ y \rightarrow \text{Temps} \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{4}{x}$$

TERCER. Construïm una taula de valors

Velocitat (km/h)	1	2	4	5
Temps (h)	4	2	1	0,8

QUART. Representem els punts i els unim amb una línia corba que no talla els eixos.



I ARA... PRACTICA

Determinació de les coordenades d'un punt

1. A la funció $y = 3x - 2$, $f(-2)$ és:

a) 8 b) −8 c) 4 d) −2

Determinació de si un punt pertany a una funció

2. Quin punt pertany a la funció $y = x - 6$?

a) (0, 6) b) (0, −6) c) (2, 0) d) (6, 2)

Representació gràfica d'una funció

3. És contínua la funció que relaciona un nombre amb el seu quadrat?

a) Sí b) No c) Depèn de la base

Representació gràfica d'una funció de proporcionalitat directa

4. Quina d'aquestes funcions no és de proporcionalitat directa?

a) $y = x$ b) $y = -2x$ c) $y = 2x - 1$

Representació gràfica d'una funció de proporcionalitat inversa

5. Quina condició no compleix la gràfica d'una funció de proporcionalitat inversa?

a) No talla l'eix X

b) És una recta.

c) No passa per l'origen.

Activitats

COORDENADES CARTESIANES

40. ● Dibuixa uns eixos cartesians en un paper quadriculat i representa aquests punts.

$A(5, 2)$ $\quad C(2, 5)$ $\quad E(0, -5)$

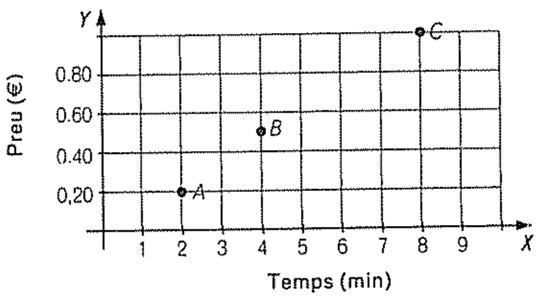
$B\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ $\quad D(4, -7)$ $\quad F\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

41. ● Representa en els eixos de coordenades cartesianes els punts següents:

$A(2, 2)$ $\quad C(1, 2)$ $\quad E(-3, 6)$ $\quad G(8, -6)$

$B(-5, -2)$ $\quad D\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ $\quad F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$ $\quad H\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

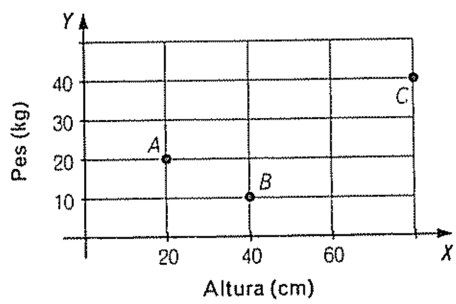
42. ● La gràfica relaciona el temps d'una trucada telefònica amb el seu preu. Digues el preu i el temps de les trucades A, B i C.



a) Quina unitat agafem en cada eix?

b) Troba la taula de valors que relaciona les dues magnituds.

43. ● A partir de la gràfica, digues si les afirmacions següents són certes:



a) B pesa més que C.

b) C és el més alt i el que pesa més

c) B és el més baix i el que pesa menys

44. ● Representa en uns eixos cartesians els punts $A(2, 3)$, $B(0, 1)$ i $C(2, -1)$. Troba les coordenades d'un altre punt que, amb aquests punts, formi els vèrtexs d'un quadrat.

FUNCIONS

45. ● Indica si aquestes relacions són funcions.

a) A cada nombre natural li associem els seus divisors

b) A cada nombre natural li fem correspondre el seu doble més 3.

46. ● El preu del quilogram de cireres és 2,75 €.

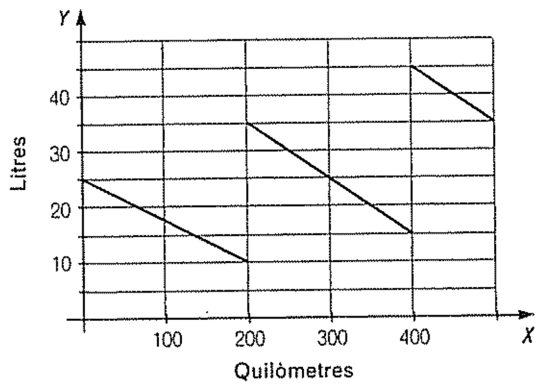
a) Fes una taula de valors en què constin el pes i el preu

b) Defineix la variable independent i la variable dependent

c) Troba'n l'expressió algebraica

d) Avalua si és una funció o no

47. ●● La gràfica representa la quantitat de gasolina que hi ha en un dipòsit durant un viatge.



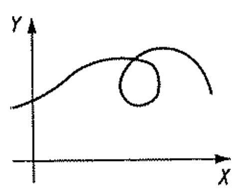
a) Quants litres hi ha al dipòsit en el moment de sortir? I a l'arribada?

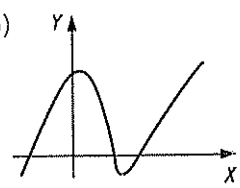
b) En quins quilòmetres es va posar gasolina?

c) Quants litres de gasolina es van posar durant el viatge?

d) Identifica la variable dependent i la independent.

48. ● Indica quines d'aquestes gràfiques pertanyen a una funció.

a)


b)


49. ●● Si en una cafeteria hem pagat 15 € per 6 cafès:

a) Fes una taula de valors on constin el nombre de cafès i el preu.

b) Digues quina és cada variable.

REPRESENTACIÓ GRÀFICA D'UNA FUNCIÓ

50. ● Expressa aquestes relacions mitjançant una taula de 5 valors com a mínim.

a) Un nombre i la seva meitat.
b) El costat d'un quadrat i la seva àrea.
c) Un nombre i el seu invers.
d) Un nombre i el seu triple.

FES-HO AIXÍ

COM EXPRESSEM ALGEBRAICAMENT ALGUNES RELACIONS NUMÈRIQUES?

51. Quina és l'expressió algebraica que relaciona un nombre enter amb el seu quadrat?

PRIMER Estudiem la taula de valors

Nombre	1	2	3	4	5	6	7
Quadrat	1	4	9	16	25	36	49

SEGON. Escrivim el resultat en forma algebraica.

$$x \rightarrow y = x^2$$

Si donem un valor a la variable independent, x, obtenim el quadrat d'aquest valor, que és la variable dependent, y.

52. ●● **Donada la funció que associa a cada nombre la seva meitat més 2 unitats:**

a) Elabora una taula de valors.
b) Troba'n l'expressió algebraica.
c) Troba $f(-5)$ i $f(4)$.

53. ●● **Donada la funció que associa a cada nombre el seu oposat més 5:**

a) Troba'n l'expressió algebraica.
b) Calcula $f(2)$ i $f(-2)$.
c) Representa la funció.

54. ●● **Escriu l'expressió algebraica.**

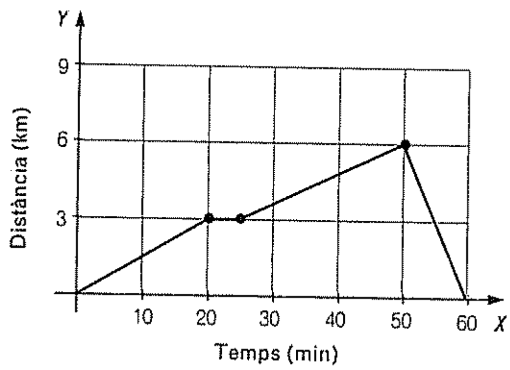
a) A cada nombre li assignem la seva cinquena part.
b) A cada nombre li fem correspondre el cub del seu doble.
c) A cada nombre li associem el quadrat de la seva tercera part.

55. ●● Cada apartat descriu una relació entre dues magnituds. Expressa-la mitjançant una expressió algebraica i defineix, prèviament, les variables x i y.

a) El preu del quilo de cafè és de 12,40 €.
b) El preu dels articles d'una botiga està rebaixat el 30 %.
c) El valor d'un cotxe es deprecia el 10 % cada any.
d) La distància recorreguda per un ciclista que circula a 20 km/h.

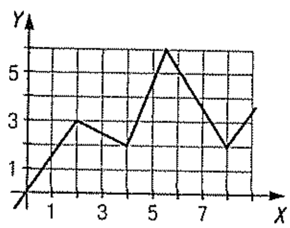
ESTUDI D'UNA FUNCIÓ

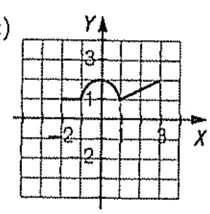
56. ●● La gràfica següent expressa la relació entre el temps (en minuts) i l'espai (en quilòmetres) recorregut per una persona durant una hora.

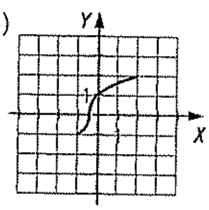


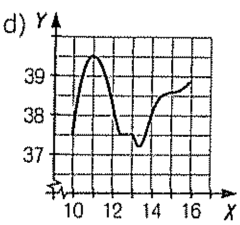
a) Expressa-la en una taula de valors.
b) Quants quilòmetres ha recorregut?
c) Quant temps ha estat aturada?
d) Quant temps ha caminat?

57. ●● **Estudia el creixement i el decreixement de les gràfiques de les funcions següents:**

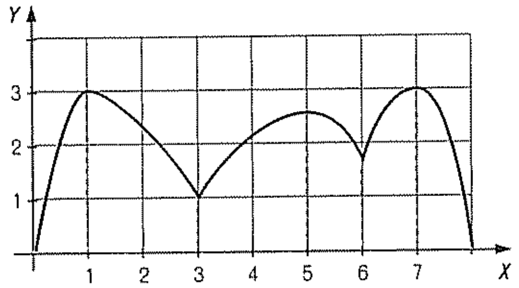
a) 

c) 

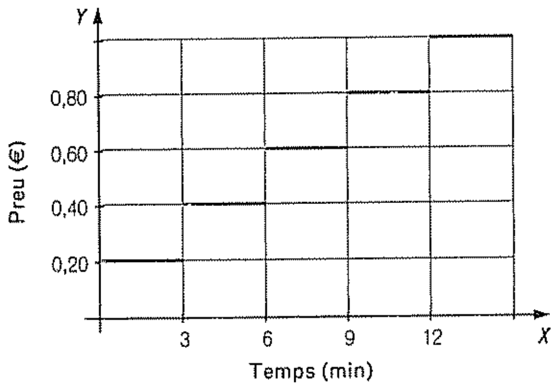
b) 

d) 

58. ◉ Indica'n els màxims i els mínims.



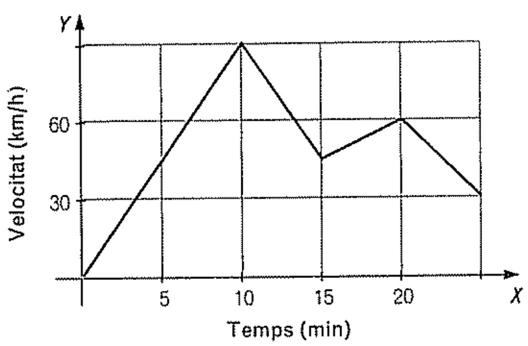
59. ◉◉ La gràfica mostra el preu d'una trucada telefònica amb un contracte determinat:



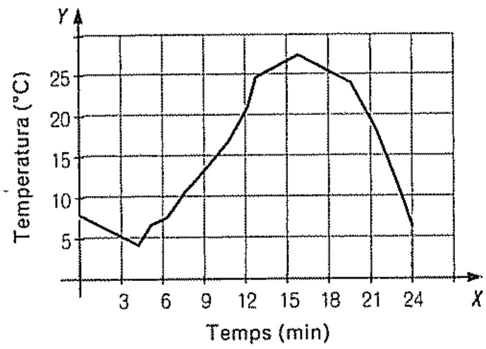
a) Identifica les variables. És una funció?
b) Esbrina si és una funció creixent o decreixent?
c) Té màxims i mínims?
d) Quant costarà una trucada de 8 minuts? I una de 7 minuts? I una de 2 minuts?
e) Si només vull gastar 1 €, quant temps podré parlar?
f) És una funció contínua?

60. ◉◉ La velocitat d'un motorista varia segons indica la gràfica.

a) Digues els trams on la funció creix
b) Digues els trams on la funció decreix.
c) Troba els màxims absoluts i relatius
d) Quins són els mínims absoluts o relatius?
e) És una funció contínua?



61. ◉◉ La gràfica mostra la temperatura d'una ciutat durant 24 hores seguides.



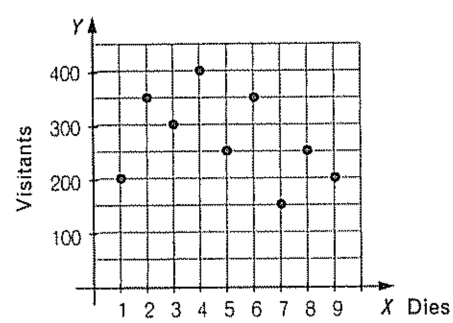
Analitza'n el creixement, el decreixement, els màxims i els mínims.

62. ◉◉ Aquesta taula recull les temperatures d'una localitat al llarg d'un dia.

Hores	°C
2	−9
6	−6
8	−3
10	3
12	8
14	9
16	7
18	4
20	−3
22	−3
24	−5

a) Identifica les variables.
b) Representa la gràfica
c) Troba'n els màxims relatius
d) Troba'n els mínims relatius.
e) És una funció contínua?
f) Durant quantes hores la temperatura ha superat els 0 °C?
g) A quina hora es va mesurar la temperatura mínima? I la màxima?
h) A quines hores la temperatura va ser de 0 °C?

63. ◉◉ La gràfica registra el nombre de visitants d'un museu durant 9 dies. Digues quines de les afirmacions són verdaderes.



a) Hi ha un màxim a $x = 4$, perquè el quart dia es va registrar el nombre de visitants més gran.
b) El nombre de visitants va ser diferent cada dia
c) En dos dies hi van anar 250 persones.
d) Els últims cinc dies hi va haver en total més visitants que durant els quatre primers dies.

FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT DIRECTA

64. ●● L'Elena surt del quilòmetre 0 d'una cursa amb una velocitat de 3 km/h.

a) Completa la taula i dibuixa'n la gràfica

Temps (h)	0	1	2	3	4	5
Distància al km 0	0	3				

b) Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció

c) En el moment en què passa pel quilòmetre 11, quant temps fa que ha sortit?

65. ●● Les dades de la taula són mesures d'espais i temps que es triguen a recórrer-los.

Espai (m)	120	30	60	
Temps (s)	9			6

a) Completa les dades de la taula.

b) Representa les dades gràficament

c) Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció

FES-HO AIXÍ

COM DETERMINEM L'EQUACIÓ D'UNA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT DIRECTA SI CONEIXEM UN PUNT QUE HI PERTANY?

66. Determina l'equació de la funció de proporcionalitat directa que passa pel punt (2, –2).

PRIMER. En l'equació $y = mx$, substituïm x per la primera coordenada i y per la segona

$$y = mx \xrightarrow{x=2,\ y=-2} -2 = m \cdot 2$$

SEGON. Calculem m.

$$-2 = 2m \rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

Per tant, l'equació de la funció és $y = -x$

67. ●● Determina l'equació i representa la funció que verifica aquestes dues condicions.

a) És una funció de proporcionalitat directa

b) $f(3) = 1$

68. ●● Determina l'equació de la funció de proporcionalitat directa que passa per:

a) $(1, -1)$ b) $(3, -4)$ c) $(-2, -1)$

Alguna d'aquestes funcions passa pel punt (7, 2)? I pel punt (0, –2)?

69. ●● Representa aquestes funcions en els mateixos eixos de coordenades. Explica les diferències que trobis entre elles.

a) $y = -x$ c) $y = -3x$

b) $y = -\frac{1}{2}x$ d) $y = -\frac{1}{3}x$

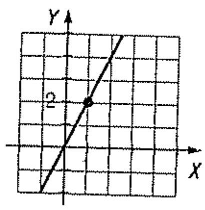
70. ●● Representa aquestes funcions en els mateixos eixos de coordenades. Explica les diferències que trobis entre elles.

a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = 2x$ d) $y = 5x$

FES-HO AIXÍ

COM DETERMINEM L'EQUACIÓ D'UNA FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT DIRECTA SI EN CONEIXEM LA GRÀFICA?

71. Determina l'equació d'aquesta funció:



PRIMER. Si la funció és una recta i passa per l'origen de coordenades, és una funció de proporcionalitat directa i, per tant, la seva equació és del tipus $y = mx$

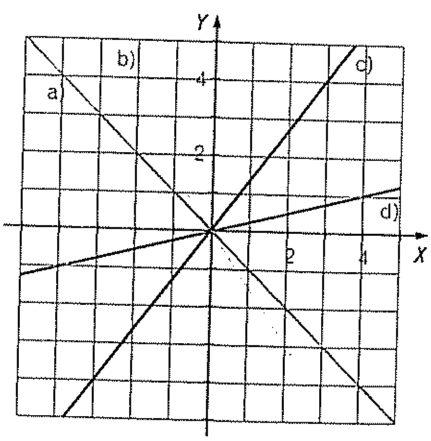
SEGON. Determinem un punt pel qual passa.
La gràfica passa per (1, 2).

TERCER. Calculem m.

$$y = mx \xrightarrow{x=1,\ y=2} 2 = m \cdot 1 \rightarrow m = 2$$

Per tant, l'equació de la funció és $y = 2x$

72. ●● Determina les equacions d'aquestes funcions:



FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA

73. ●● La taula següent correspon a una funció de proporcionalitat inversa.

x	1	2	3	4	5
y				1/4	

a) Completa la taula.

b) Escriu l'expressió algebraica de la funció.

c) Representa la funció.

74. ●● La relació entre dos nombres positius ve donada per la taula següent:

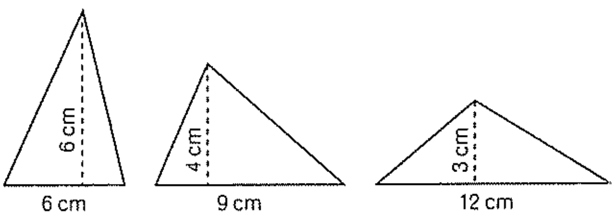
x	0,02	0,1	0,2	0,5	1	2
y	300	60	30	12	6	3

a) Quina és l'expressió algebraica d'aquesta relació?

b) Representa-la gràficament.

c) Dóna valors a x molt propers a zero. Què passa amb els valors de y?

75. ●● L'àrea d'un triangle és de 18 cm^2. Construeix una taula amb diferents valors de la base i l'altura i representa la funció que ens dóna l'altura en funció de la base.



Determina l'expressió algebraica que relaciona aquests valors i representa-la gràficament.

76. ●● Donades les funcions $y = \frac{6}{x}$ i $y = -\frac{6}{x}$.

a) Representa-les gràficament.

b) Escriu les característiques que les diferencien.

77. ●● Donada la funció $y = -\frac{5}{x}$:

a) Per a quins valors la funció és decreixent?

b) Té màxims o mínims?

c) Fes una taula de valors donant valors a x de -1 a 0 i de 1 a 0, i prenent valors cada vegada més propers a 0. A quins valors s'acosta la funció?

PROBLEMES AMB FUNCIONS

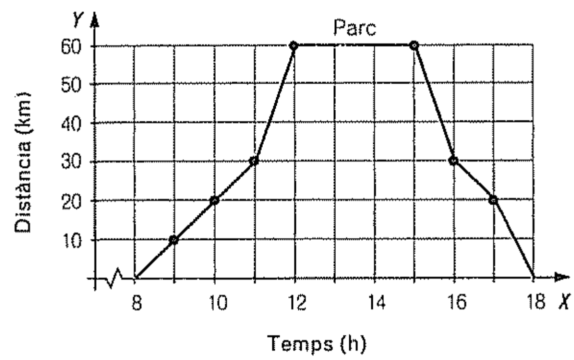
78. ●● La taula següent, publicada per una ONG dedicada a la conservació de les espècies, representa la població de tigres de Bengala a l'Índia des de 1999 fins a 2007.

Any	99	00	01	02	03	04	05	06	07
Tigres	900	870	800	810	805	750	700	720	750

a) Representa gràficament els parells de valors.

b) Interpreta els resultats obtinguts.

79. ●● Fem una excursió en bicicleta fins a un parc situat a 60 km. Per arribar-hi s'ha de recórrer un camí amb pujades i baixades. Després, descansem i tornem a casa.



a) Quin significat tenen els nombres situats en l'eix d'abscisses? I els de l'eix d'ordenades?

b) A quina hora hem sortit?

c) Quants quilòmetres hi ha des de l'inici de la primera pujada fins al cim?

d) Quant temps triguem a pujar-la? I a baixar-la?

e) Quant temps estem al parc?

f) Com és el camí de tornada?

g) En quin tram la funció creix? On decreix?

h) És una funció contínua?

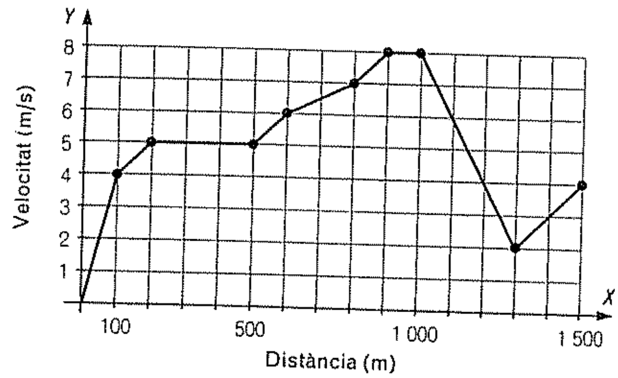
80. ●● S'ha fet un estudi en una ciutat sobre el nombre de famílies que es connecten a Internet cada any.

Anys	03	04	05	06	07
Nre. de connexions	100	500	1.500	3 000	7 000

a) Representa gràficament els parells de valors.

b) Interpreta els resultats.

81. ●● La gràfica següent mostra la variació de la velocitat d'un atleta durant una cursa de 1.500 m.



a) Quina és la variable independent? Per què?

b) Quina és la variable dependent? Per què?

c) En quins moments de la cursa la velocitat és de 6 m/s?

d) Quant creix la velocitat?

e) I quant decreix?

f) En quins moments manté la velocitat constant?

g) És una funció contínua?

h) Quina és la velocitat màxima?

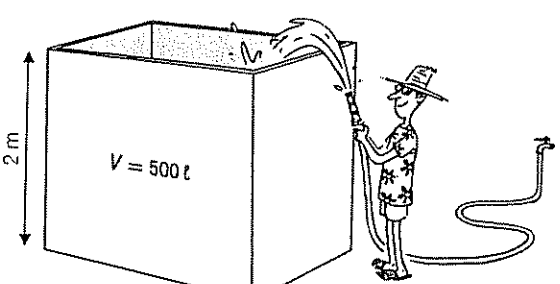
i) Aquesta funció té algun mínim relatiu?

j) Quina velocitat porta als 300 m?

82. ●●● Volem construir un dipòsit prismàtic amb aquestes mesures.

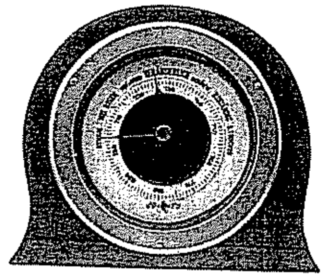
a) Fes una taula amb els diferents valors de les dimensions que pot tenir.

b) Escriu la funció corresponent i representa-la.



INVESTIGA

83. ●●● La pressió atmosfèrica mesura la pressió que excerceix l'atmosfera, és a dir, el pes de la columna d'aire que tenim damunt. Aquest pes és més petit a mesura que augmenta l'altitud. Així, la pressió baixa des del valor de 101.325 pascals (Pa) a nivell del mar fins a uns 2.350 Pa als 10.700 m (l'altitud de vol d'un reactor). Si suposem que aquesta variació és proporcional a l'altitud:



a) Fes una taula on apareguin les pressions des dels 0 m fins als 10.700 m, de 1 000 m en 1 000 m.

b) Representa gràficament aquests valors. És una funció lineal? Indica les característiques d'aquesta funció.

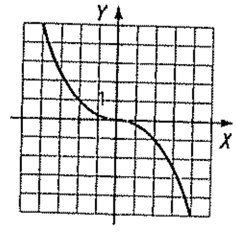
84. ●●● Els vèrtexs d'un triangle equilàter són els punts $A(0, 0)$, $B(8, 2)$ i $C(-1, 2)$. Calcula l'àrea d'aquest triangle.

85. ●●● Els vèrtexs d'un trapezi, de costats paral·lels AB i CD, són els punts $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 2)$ i D. Calcula l'equació de la funció que determina el costat AD perquè l'àrea del trapezi sigui 8 u^2.

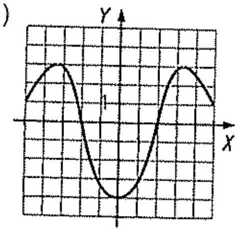
86. ●●● Una funció és parella si $f(x) = f(-x)$ per a qualsevol valor de x, i és imparella si $-f(x) = f(-x)$ per a qualsevol valor de x.

Determina si aquestes funcions són parelles, imparelles o no són parelles ni imparelles.

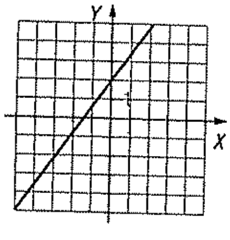
a)



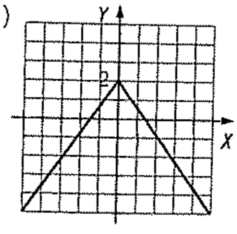
c)



b)



d)

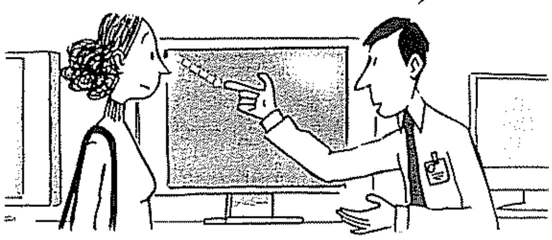


A la vida quotidiana

87. ●●● La mida d'un televisor l'acostumem a expressar en polzades. La polzada és una unitat de mesura del sistema anglosaxó l'equivalència de la qual és 1 polzada = 2,54 cm.

Un televisor de 24 polzades té:

- Una diagonal de: $d = 24 \cdot 2{,}54 = 60{,}96$ cm.
- Una base de: $b = \dfrac{7{,}62 \cdot p}{5} = \dfrac{7{,}62 \cdot 24}{5} = 36{,}58$ cm.



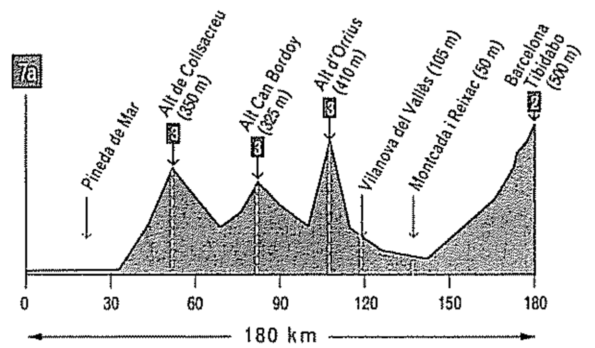
Segons les recomanacions de l'Associació Nacional d'Òptics, la mida del televisor ha de mantenir una certa relació amb la distància a què ens hi hem de situar.

Una regla senzilla per calcular la distància mínima aconsellable és multiplicar per 5 el nombre de polzades que té el televisor. El resultat és la distància mínima (en centímetres) a què ens hem de situar.

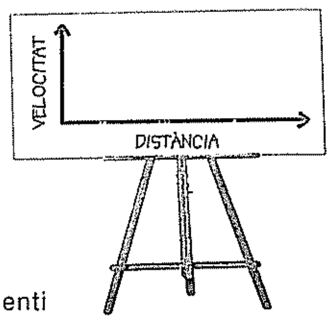
Per la forma de l'habitació, podem posar la butaca a 1,40 m i 1,80 m del televisor.

Quantes polzades pot tenir el televisor? Quant ha de mesurar com a mínim el llarg de la taula on el posem?

88. ●●● La 7a etapa (180 km) de la Volta Ciclista a Catalunya es va celebrar el diumenge 27 de maig i aquest és el seu perfil:

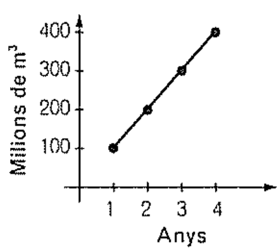


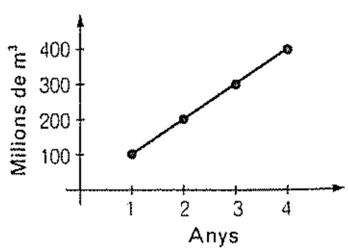
En Julià Ferrer, entrenador de l'equip CLIP, ha reunit els seus ciclistes per preparar l'etapa.

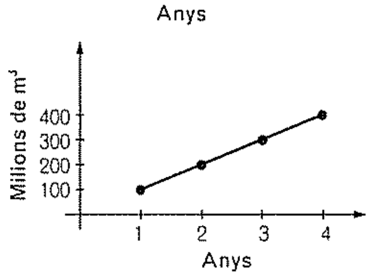


Ha dibuixat uns eixos en una pissarra i ha demanat al capità de l'equip que hi representi la gràfica corresponent a la velocitat que assoliria al llarg de l'etapa. Tu sabries dibuixar-la?

89. ●●● La principal notícia dels mitjans de comunicació és la constatació de l'increment de gasos contaminants emesos a l'atmosfera durant els últims 4 anys. Els tres diaris de màxima tirada han tractat la notícia amb una gràfica que reflecteix aquest augment preocupant.







a) Les gràfiques estan ben fetes?

b) Quines diferències trobes entre elles?

13

Estadística

La *Pax Augusta*

El dia era lluminós, com si volgués afegir-se a la celebració de la victòria en l'última batalla. Feia deu anys que les guerres civils havien acabat i estaven oblidades per una prosperitat que no semblava acabar.

Cèsar August parlaria davant del Senat. Grups de senadors esperaven que arribés i elucubraven sobre el caràcter del seu discurs.

Finalment, August va arribar i, després de saludar els senadors, va començar el discurs:

–Senadors del poble de Roma, ja fa deu anys que vivim en pau. Tots volem que la situació es mantingui i, per tant, cal obrar amb justícia.

August va fer una pausa breu i va continuar:

–Necessitem un nou cens de la població i dels béns de tots els habitants de l'imperi, perquè si ho sabem, podrem imposar els impostos i els tributs de manera justa, i evitarem els enganys i els abusos que ens podrien portar a una altra guerra.

L'emperador, recollint el mantell damunt del braç, es va mostrar complagut en veure l'entusiasme que la seva idea havia provocat als senadors.

Si en lloc d'estudiar tota la població n'estudiem només una part, diem que és una mostra. Posa un exemple de població i, dins d'ella, assenyala'n una mostra.

PLA DE TREBALL

En aquesta unitat aprendràs a...

- Reconèixer els elements d'un estudi estadístic.
- Diferenciar els tipus de variables estadístiques.
- Elaborar taules de freqüències.
- Interpretar i representar dades mitjançant gràfics.
- Calcular la mitjana, la mediana i la moda d'un conjunt de dades.
- Obtenir el rang i la desviació mitjana d'un conjunt de dades.