Divisió per Ruffini

Les divisions en les quals el divisor és de la forma (x-a) o (x+a) es poden fer, a banda de la forma que hem vist a l'apartat anterior, mitjançant el mètode de Ruffini.

Exemple: Dividir $2x^3 - 5x^2 + 2$ entre $x - 3$

Per aplicar el mètode de Ruffini es fa servir una mena de L. A la part de dalt es col·loquen els coeficients del dividend afegint els zeros que corresponguin on hi hagi un salt de grau. El número que acompanya la x del divisor es col·loca canviat de signe al costat de fora de l'angle recte de la L.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 0 & 2 \\
3 & & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & 2 & 1 & 3 & \mathbf{11}
\end{array}
$$

Coeficients dividend

Canviat de signe

Residu

El darrer número de la fila de sota indica el residu. La resta de nombres que apareixen en aquesta filera són els coeficients del quocient de la divisió. Aquest polinomi és sempre amb un grau més petit que el dividend. Com el grau del dividend era 3, el quocient, en aquest cas, és de grau 2. I queda : $2x^2 + x + 3$.

De fet, com en qualsevol divisió, s'ha de complir que el dividend sigui igual al resultat de multiplicar el divisor pel quocient i sumar el residu.

És a dir: $2x^3 - 5x^2 + 2 = (x - 3)\cdot(2x^2 + x + 3) + 11$

Teorema del residu

El teorema del residu relaciona el valor numèric d'un polinomi amb el residu de la divisió feta per Ruffini. En efecte, el teorema diu que el residu de la divisió d'un polinomi entre (x-a) coincideix amb el valor numèric d'aquest polinomi per x=a.

Prenem, com a exemple, la divisió que hem fet abans:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -5 & 0 & 2 \\
3 & & 6 & 3 & 9 \\
\hline
 & 2 & 1 & 3 & \mathbf{11}
\end{array}
$$

Hem vist que el residu de dividir el polinomi $2x^3 - 5x^2 + 2$ entre $x - 3$ és 11.

Ara veurem com es compleix el teorema del residu, trobarem el valor numèric de $2x^3 - 5x^2 + 2$ per x=3...i ha de sortir 11.

$$2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 2 = 2 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 2 = 54 - 45 + 2 = 11$$

I sí, ha donat 11, amb la qual cosa hem vist com es compleix el teorema del residu.

Tant Ruffini com el teorema del residu s'utilitzen per fer exercicis on els polinomis apareixen amb algun paràmetre desconegut.

Exemple: Donat el polinomi $2x^3 - 7x^2 + kx - 3$, trobar el valor de k sabent que si el dividim per $x - 3$, la divisió és exacta.

Ho fem per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & k & -3 \\
3 & & 6 & -3 & 3k-9 \\
\hline
 & 2 & -1 & k-3 & \mathbf{3k-12}
\end{array}$$

El residu, amb la k, ens ha quedat com 3k-12. Això, tal com diu l'enunciat de l'exercici ha de ser igual a 0. Per tant, $3k - 12 = 0 \rightarrow 3k = 12 \rightarrow k = \frac{12}{3} = 4$

També es pot fer pel teorema del residu. En aquest cas, el valor numèric del polinomi per a x=3 ha de ser igual a 0.
Veiem com queda:

$$2 \cdot 3^3 - 7 \cdot 3^2 + k \cdot 3 - 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot 27 - 7 \cdot 9 + 3k - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 54 - 63 + 3k - 3 = 0 \rightarrow 3k - 12 = 0 \rightarrow 3k = 12 \rightarrow k = \frac{12}{3} = 4$$

Divisibilitat de polinomis

Si la divisió d'un polinomi, P(x), entre un altre Q(x) és exacta, aleshores, tal com passa en els números, podem dir:

- P(x) és múltiple de Q(x)
- P(x) és divisible per Q(x)
- Q(x) és divisor de P(x).