Potències

Una potència és una expressió del tipus A^n, on A és la base i n és l'exponent i indica el número de vegades que hem de multiplicar la base per lla mateixa per tal d'obtenir el resultat.

Propietats de les potències:

a) Si multipliquem potències amb la mateixa base, se sumen els exponents: $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$

b) Si dividim potències amb la mateixa base, es resten els exponents: $A^n : A^m = A^{n-m}$

c) Les potències amb exponent igual a 0, donen 1. $A^0 = 1$

d) Les potències amb exponent negatiu, són iguals a l'invers de la base elevades al mateix exponent, però canviat de signe: $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$

Si la base és una fracció: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Arrels

Una arrel és una expressió del tipus: $\sqrt[n]{A} = b$. A és el radicand, n és l'índex de l'arrel i b és l'arrel enèsima d'A, ja que $b^n = A$

Qualsevol arrel es pot escriure en forma de potència amb exponent fraccionari. **Exemple:**

$$\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[n]{A^p} = A^{\frac{p}{n}} \Rightarrow \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Propietats de les arrels:

a) Si es multiplica l'índex de l'arrel i l'exponent del radicand pel mateix número, l'arrel no canvia: $\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[n\cdot t]{A^{p\cdot t}}$

Exemple: $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4}$ S'han multiplicat l'índex i l'exponent per 2

b) Arrel d'una multiplicació: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$

c) Arrel d'una divisió: $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$

En aquestes dues darreres operacions, si els índexs de les arrels no coincideixen, hem d'aplicar la primera propietat, per tal d'aconseguir índexs iguals.

Exemples:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7}$ El mínim comú múltiple dels índexs (2 i 3) és 6. Per tant, a la primera arrel el radicand (5) quedarà elevat al cub quan col·loquem l'arrel sisena, mentre que a la segona arrel el radicand (7) quedarà elevat al quadrat quan col·loquem l'arrel sisena.

Així: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 7^2}$

b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{9}}$ En aquest cas, el mínim comú múltiple dels índexs (3 i 5) és 15. Per tant, a l'arrel del numerador el radicand (2) quedarà elevat a la cinquena quan col·loquem l'arrel quinzena, mentre que a l'arrel del denominador el radicand (9) quedarà elevat al cub quan fem la mateixa operació. Així:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{9}} = \frac{\sqrt[15]{2^5}}{\sqrt[15]{9^3}} = \sqrt[15]{\frac{2^5}{9^3}}$$

Introducció de factors dins d'una arrel. Per introduir un número dins d'una arrel, només cal que l'elevem a l'índex de l'arrel i que quedi multiplicant, ja dins de l'arrel al radicand.

Exemple: $7 \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 5^2}$ Com l'índex de l'arrel era 3, hem elevat el 7 al cub.

Extracció de factors d'una arrel. Només es podran extreure factors si estan elevats a un exponent igual o superior a l'índex de l'arrel. En aquest cas, es fa la divisió entre l'exponent i l'índex. El quocient indica l'exponent dels factors que surten fora de l'arrel, mentre que el residu indica l'exponent dels factors que es queden dins de l'arrel.

Exemple: Extreure factors de $\sqrt{360}$. Si fem la descomposició en factors primers de 360 ens queda que és igual a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Per tant, només poden sortir de l'arrel els factors 2 i 3, que són els que tenen un exponent igual o superior a l'índex de l'arrel.

En el cas del 2, sortirà amb exponent 1 i quedarà dins de l'arrel també amb exponent 1.

En el cas del 3, sortirà amb exponent 1 i quedarà dins de l'arrel amb exponent 0, amb la qual cosa ja no cal que el col·loquem, perquè $3^0 = 1$.

Així: $\sqrt{360} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 6 \cdot \sqrt{10}$

Suma d'arrels Només es poden sumar arrels que tinguin el mateix índex i el mateix radicand. Si no és així, només es pot deixar indicat. Ara bé, s'ha d'anar amb compte per veure si, després d'extreure factors, ens queden arrels que sí es puguin sumar.

Exemple: $3\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{162}$

Aparentment, aquestes arrels no es poden sumar, però hauríem de fer la descomposició dels diferents radicands per veure si l'aparença és totalment certa.

Així: $50 = 2 \cdot 5^2$; $8 = 2^3$; $162 = 2 \cdot 3^4$. Amb aquestes descomposicions, veiem com del 50 pot sortir un 5 fora de l'arrel, del 8 pot sortir un 2 i del 162 pot sortir un 3 elevat al quadrat. Per tant, la suma inicial se'ns transforma en:

$$3\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{162} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 3^2 \cdot \sqrt{2} = 15 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2} + 9 \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2}$$

Arrel d'una arrel. Si tenim una arrel d'una arrel, s'han d'anar multiplicant els seus índexs...sempre que no hi hagi factors pel mig, ja que aleshores, abans de multiplicar índexs, hauríem d'introduir els factors dins de l'arrel corresponent.

Exemples: a) $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[2\cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$

b) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{5}}$ En aquest cas, abans de multiplicar els índexs s'ha d'introduir el 2 a la segona arrel, ho farem elevant el 2 al cub. Així: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}}$ i ara ja es poden multiplicar els índexs de les arrels: $\sqrt[15]{2^3 \cdot 5}$