La potència d'una matriu, que només es pot calcular per les matrius quadrades, es calcula de forma similar a la potència d'un número. És a dir, hem de multiplicar la matriu per ella mateixa tantes vegades com digui l'exponent.

Així: $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ..... \cdot A}_{\text{n vegades}}$

Exemple: Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^3

Hem de fer: $A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$

Fem, doncs, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1$ $\qquad$ $c_{12} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -4$

$c_{21} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$ $\qquad$ $c_{22} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7$

I ara $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$

$c_{11} = (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -9$ $\qquad$ $c_{12} = -1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -11$

$c_{21} = 8 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 22$ $\qquad$ $c_{22} = 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 3 = 13$

Propietats de les operacions i la matriu transposada:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

Exemple: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t$

Si fem la primera suma i després la transposada del resultat:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si fem les transposades de l'altre costat de l'igual i després la suma queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(kA)^t = k \cdot (A^t)$

Exemple: $\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t$

Fem en primer lloc la multiplicació i després fem la transposada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ara fem la transposada i després la multiplicació:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Exemple: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^t$

Fem en primer lloc la multiplicació i després fem la transposada del resultat

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$ $\qquad c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5$

$c_{21} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$ $\qquad c_{22} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -6$

Ara fem les transposades i després fem la multiplicació:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$ $\qquad c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 1$

$c_{21} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5$ $\qquad c_{22} = (-1) \cdot 3 + \cdot 3 \cdot (-1) = -6$

d) $(A^n)^t = (A^t)^n$

Exemple: $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2\right)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^t\right)^2$

Fem el quadrat de la primera matriu i després fem la transposada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{transposada} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1$ $\qquad c_{12} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -4$

$c_{21} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$ $\qquad c_{22} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7$

Ara fem la transposada i després calculem el quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$ $\qquad c_{12} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 8$

$c_{21} = -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -4$ $\qquad c_{22} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 7$