Operacions amb matrius

a) **Suma. Exemple:** Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, anem a calcular la matriu suma. Fixeu-vos que les dues matrius tenen el mateix ordre, una condició indispensable per poder fer aquesta operació. La matriu resultat de la suma també tindrà el mateix ordre de les matrius que es sumen i els seus elements $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, és a dir el $c_{11}=a_{11}+b_{11}$ i així amb tots els subíndexs que corresponguin. Seguint aquesta norma, la matriu resultat és: $C=\begin{pmatrix}-1+2 & 5-2 & 2+3\\ -3-1 & -4-2 & 3+1\end{pmatrix}\Rightarrow \quad C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -4 & -6 & 4\end{pmatrix}$

b) **Resta.** Tenint en compte el mecanisme de la suma, el de la resta és molt semblant, però, és clar, hem de tenir en compte que ara entre les dues matrius hi ha un signe negatiu, que fa canviar el signe de tots els elements de la matriu que li va al darrere.

Exemple: Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, calcular la matriu diferència.

$$C=\begin{pmatrix}-1-2 & 5+2 & 2-3\\ -3+1 & -4+2 & 3-1\end{pmatrix}\Rightarrow C=\begin{pmatrix}-3 & 7 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

c) **Multiplicació d'un número per una matriu.** Per obtenir el resultat només cal multiplicar tots els elements de la matriu pel número.

Exemple: Calcular amb la matriu A dels apartats anteriors, $5\cdot A$

$$5\cdot\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -3 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot(-1) & 5\cdot 5 & 5\cdot 2\\ 5\cdot(-3) & 5\cdot(-4) & 5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 25 & 10\\ -15 & -20 & 15\end{pmatrix}$$

d) **Multiplicació de matrius**. Per multiplicar matrius s'ha de complir que el número de columnes de la primera matriu sigui igual que el número de fileres de la segona. La matriu resultat tindrà el número de fileres de la primera matriu i el número de columnes de la segona matriu.

Així, si la matriu A és d'ordre (3, 2) i la matriu B és d'ordre (2, 4), es poden multiplicar (2 columnes a A i 2 fileres a B) i la matriu resultat serà d'ordre (3, 4) (3 fileres de A i 4 columnes de B).

Veurem com funciona amb un **exemple**: Calculem la multiplicació entre

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Es compleix la condició per fer la multiplicació. A és d'ordre (3, 2) i B és d'ordre (2, 3). El resultat serà d'ordre (3,3). Per tant, la matriu resultant serà del tipus $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$

Per calcular c_{11}, hem de resoldre aquesta operació $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$, és a dir, agafem els elements de la primera filera de la matriu A i els multipliquem pels elements de la primera columna de la matriu B amb una suma entre multiplicacions.

La primera columna de la matriu resultat és:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 11$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = -1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$

$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 13$

Ara passem a la segona columna:

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -1$

$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -5$

$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7$

I, finalment, la tercera columna:

$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = 19$

$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} = -1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 18$

$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} = 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 = -7$

Per tant, el resultat és: $C = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 19 \\ 0 & -5 & 18 \\ 13 & 7 & -7 \end{pmatrix}$