Menors d'una matriu. Adjunts d'una matriu.

El menor complementari d'un element d'una matriu és el determinant que resulta d'eliminar la fila i la columna a les quals pertany l'element.

Si tenim la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, el menor complementari del 0, que és l'element a_{11}, és: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$, ja que eliminem la primera filera i la primera columna.

Si, a més a més, multipliquem el menor complementari de cada element per +1 si la suma dels subíndexs i,j de l'element són parells i per -1 si la suma dels subíndexs i,j és un número imparell, obtenim l'adjunt de cada element. Si obtenim els adjunts de tots els elements i els col·loquem en forma de matriu, aleshores obtenim la matriu adjunta.

Calculem la matriu adjunta de la matriu A. Obtenim, doncs, els adjunts de tots els seus elements. Els simbolitzem amb la forma A_{ij}

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9-1) = -8$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$

El primer i el tercer elements tenen una suma de subíndexs parella, per això mantenen el signe. En canvi, el segon, en tenir una suma de subíndexs imparella, té un menys al davant. Això es manté per cadascun dels diferents elements.

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(0-3) = 3$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$

Per tant, la matriu adjunta queda: $A^{Adj} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Utilitats dels adjunts i de la matriu adjunta. Desenvolupament de determinants i càlcul de la matriu inversa

Els adjunts i la matriu adjunta tenen dues utilitats.

En primer lloc, el determinant d'una matriu es pot calcular per la suma de multiplicar els elements d'una filera o columna pels seus adjunts.

Si prenem la matriu A, i calculem el seu determinant pel mètode de la regla de Sarrus, tenim: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 1 - (1 + 9 + 0) = 13 - 10 = 3$

Si ens fixem en la primera filera, per exemple, el determinant quedaria, desenvolupat amb els respectius adjunts de la següent manera:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} = 0 + (-8) + 11 = 3$$

L'altra gran aplicació de la matriu adjunta és la seva participació en el càlcul de la matriu inversa, que es calcula segons la següent fórmula:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{Adj}\right)^t$ És a dir, la matriu inversa d'A és igual al resultat de multiplicar per 1 dividit pel determinant d'A la seva matriu adjunta transposada.

Apliquem la fórmula per calcular la matriu inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Sabem que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 1 - (1 + 9 + 0) = 13 - 10 = 3$

Sabem que la matriu adjunta és $A^{Adj} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, amb la qual cosa, la matriu adjunta transposada, queda: $\left(A^{Adj}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 3 \\ 11 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Per tant, si apliquem la fórmula de la matriu inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 3 \\ 11 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ -8/3 & -1/3 & 1 \\ 11/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenint en compte que per calcular la inversa hem de multiplicar per 1 dividit pel determinant de la matriu, no tindran inversa aquelles matrius el determinant de les quals sigui igual a 0