

Càlcul de determinants d'ordre superior a 3

Per matrius d'ordre superior a 3, no hi ha cap procediment com la regla de Sarrus. Així, que s'ha de recórrer a la forma genèrica de calcular un determinant, és a dir, calcular-lo a partir del desenvolupament del producte dels elements d'una filera o una columna pel seus adjunts corresponents.

Exemple: Calcular el determinant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Triem, per exemple els elements de la primera columna, per tal de calcular el determinant. Així:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{41} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-15 - (4 + 10)) + 1 \cdot [(-8 + 15) - (0 + 2 + 30)] - 2 \cdot [(8 + 3) - (-6 - 2)] = -29 - 25 - 38 = -92 \end{aligned}$$

Aquest procediment també es pot desenvolupar, però fent alguna transformació prèvia a la matriu. Aprofitant les propietats dels determinants, es tracta de triar un element amb el qual es vol desenvolupar el determinant i, a partir d'aquí tractar que la resta d'elements de la seva filera o columna, segons l'opció que es triï siguin zeros.

En aquest cas, es tria com a element per desenvolupar el determinant el $a_{11} = 1$ i es tractarà de fer zeros a la resta d'elements de la primera columna.

Partint de la situació inicial:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \text{Fem 3a filera} - 1\text{a filera} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & +1 & -3 \\ - & - & - & - \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ i ara}$$

substituïm la tercera filera pel resultat obtingut:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \text{Ara fem 4a}$$

$$\text{filera} - 2 \cdot 1\text{a filera} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ - & - & - & - \\ 0 & -4 & 7 & -8 \end{vmatrix} \text{ i ara substituïm la 4a filera pel resultat}$$

obtingut: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & -8 \end{vmatrix}$ amb la qual cosa el determinant es pot calcular com el

resultat de fer:

$$1 \cdot A_{11} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -4 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -8 - 63 + 8 - (-12 + 48 - 7) = -63 - (+29) = -92$$

Per tant, en el segon cas, després de fer les transformacions corresponents a la matriu, només hem hagut de calcular un determinant d'ordre 3 i no tres com en el primer cas.