**Arrels d'un polinomi. Factorització d'un polinomi.**

Un número a és una arrel d'un polinomi P(x) si el valor numèric d'aquest polinomi per x=a és 0.

Les arrels van molt lligades a la factorització d'un polinomi.

Anem a veure com es troben les arrels d'un polinomi i quina relació tenen amb la seva factorització segons diferents casos:

a) **Polinomis de segon grau.**
Per trobar les arrels, cal plantejar l'equació que resulta d'igualar el polinomi a 0 i resoldre-la. Els valors que són solució de l'equació són les arrel del polinomi. Si l'equació només té una solució **s**, el polinomi serà igual a $(x-s)^2$. Si l'equació té dues solucions, $s_1$ i $s_2$, el polinomi serà igual a $(x-s_1)\cdot(x-s_2)$.
Si hi ha algun número que multiplica la $x^2$, aquest número també apareix a la descomposició multiplicant els factors que hem vist abans.

**Exemples:**

1) Factoritzar $x^2-4x+3$
Plantegem l'equació: $x^2-4x+3=0$ i resolem
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(1)\cdot(3)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\begin{cases}x=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3\\ x=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$
Les dues solucions, per tant les dues arrels del polinomi, són 3 i 1. El polinomi $x^2-4x+3$, factoritzat és $(x-3)\cdot(x-1)$

2) Factoritzar $x^2-9$
Plantegem l'equació: $x^2-9=0$ i resolem, en aquest cas no cal aplicar la fórmula.
$$x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\begin{cases}+3\\-3\end{cases}$$
Les dues arrels són 3 i -3. El polinomi factoritzat queda:
$x^2-9=(x+3)\cdot(x-3)$

3) Factoritzar $2x^2-4x+2$
Plantegem l'equació: $2x^2-4x+2=0$ i resolem:
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot(2)\cdot(2)}}{2\cdot(2)}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{4}=\frac{4\pm0}{4}=1$$
Només hi ha una solució, en principi el polinomi factoritzat quedaria com $(x-1)^2$, però hi ha un número que multiplica la $x^2$, el 2, per tant, la factorització correcta és: $2\cdot(x-1)^2$

**b) Polinomis de grau superior a 2**

Pels polinomis de grau superior a 2, només queda que anar provant números fins a trobar una arrel. Això es pot fer calculant directament valors numèrics del polinomi fins a trobar un que ens doni 0, o bé fer divisions per Ruffini fins a trobar un valor pel qual el residu és 0.

El procediment es pot fer fins que al quocient quedi un polinomi de grau 2 i, aleshores, seguir amb el procediment que hem vist a l'apartat anterior, o bé segui amb Ruffini fins a que quedi al quocient un polinomi de grau 1.

Exemple: Factoritzar $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 9x + 2x + 6$

Plantegem la divisió per Ruffini amb 1 com a divisor:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Seguim amb 1:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Aquí podríem fer servir la fórmula, o bé seguir amb Ruffini, per exemple amb -2.

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Per tant, el polinomi descompost queda així: $(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x+3)$

Les arrels són: 1 (doble), -2 i -3, que són els valors que fan 0 cadascun dels factors que surten a la descomposició.