UVIC
UNIVERSITAT
DE VIC

Unitat 9. Càlcul de derivades

Curs d'Anivellament de Matemàtiques

Montserrat Corbera / Vladimir Zaiats

montserrat.corbera@uvic.cat / vladimir.zaiats@uvic.cat

Escola Politècnica Superior

Índex

Unitat 9. Càlcul de derivades

En aquesta secció ens centrarem exclusivament en l'aspecte tècnic del càlcul de derivades a partir de les derivades de les funcions elementals. La definició i la interpretació del concepte de derivada es veuran amb detall a l'assignatura de Matemàtiques específica del grau que esteu cursant.

La **derivada** de la funció f es denota per f'.

9.1 Derivades de les funcions elementals

Si f és una funció elemental, la seva derivada ve donada per la Taula 9.1.1.

Funció	Derivada	Funció	Derivada
c amb $c \in \mathbb{R}$	0	$\sin x$	$\cos x$
(*) x	1	$\cos x$	$-\sin x$
x^k amb $k \in \mathbb{R}$	$k\,x^{k-1}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
(*) $\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{cotan} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
(*) $\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x amb $a \in \mathbb{R}^+$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$ amb $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\cosh x$	$\sinh x$

Taula 9.1.1: Derivades de les funcions elementals.

Nota: Les derivades de les funcions assenyalades amb $^{(*)}$ es dedueixen de la derivada de la funció x^k.

La derivada de la funció tangent s'obté derivant el quocient $\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

La derivada de la funció cotangent s'obté derivant el quocient $\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

El sinus hiperbòlic i el cosinus hiperbòlic es defineixen mitjançant les fórmules següents:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

9.2 Derivades de les funcions que són transformació de les funcions elementals

Si f és una transformació de funcions elementals, llavors la derivada f' s'obté a partir del següent teorema.

Teorema 9.2.1:

Siguin f i g dues funcions reals de variable real derivables[a] *en el punt x. Llavors*

a) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$,

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

c) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$,

e) **Regla de la cadena**

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

[a] La definició formal de funció derivable en un punt es veurà durant el curs acadèmic, de moment podeu pensar que f és derivable en el punt x si es pot calcular $f'(x)$.

9.3 Càlcul de derivades

A l'hora de calcular les derivades podeu fer servir la Taula 9.1.1 juntament amb la regla de la cadena i la resta de propietats del Teorema 9.2.1. Si ho preferiu també podeu fer servir la Taula 9.3.2 en

Funció	Derivada	Funció	Derivada
c amb $c \in \mathbb{R}$	0	$\sin(f(x))$	$\cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$^{(*)}$ x	1	$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
$(f(x))^k$ amb $k \in \mathbb{R}$	$k\,(f(x))^{k-1} \cdot f'(x)$	$\tan(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$
$^{(*)}$ $\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\mathrm{cotan}(f(x))$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$
$^{(*)}$ $\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$	$\arcsin(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$a^{f(x)}$ amb $a \in \mathbb{R}^+$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$	$\arccos(f(x))$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$\arctan(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$
$\log_a(f(x))$ amb $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$	$\sinh(f(x))$	$\cosh(f(x)) \cdot f'(x)$
$\ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\cosh(f(x))$	$\sinh(f(x)) \cdot f'(x)$

Taula 9.3.2: Derivades de les funcions compostes.

comptes de la Taula 9.1.1. La Taula 9.3.2 s'obté a partir de la taula de derivades de les funcions elementals després d'aplicar la regla de la cadena.

Exemple 9.3.1 a) $(x^2)' \overset{(*1)}{=} 2x$.

(*1) Cas b) Taula 9.1.1 amb $k = 2$.

b) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' \overset{(*1)}{=} -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}.$

(*1) Cas b) Taula 9.1.1 amb $k = -3$.

c) $(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' \overset{(*1)}{=} \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

(*1) Cas b) Taula 9.1.1 amb $k = 1/2$.

d) $(2^x)' \overset{(*1)}{=} 2^x \ln 2.$

(*1) Cas c) Taula 9.1.1 amb $a = 2$.

e) $(x^3-3x^2+5x+4)' \overset{(^*1)}{=} (x^3)'-3\cdot(x^2)'+5\cdot(x)'+(4)' \overset{(^*2)}{=} 3x^2-3\cdot(2x)+5\cdot 1+0 = 3x^2-6x+5.$

(*1) Tenim una suma de funcions elementals multiplicades per una constant. Apliquem les propietats a) i b) del Teorema 9.2.1.

(*2) Calculem les derivades de les funcions x^3, x^2, x i 4 a partir de la Taula 9.1.1.

A partir d'ara les derivades dels polinomis es donaran directament sense especificar els passos intermedis.

f) $\left((x^2-2x)\cdot e^x\right)' \overset{(^*1)}{=} (x^2-2x)'e^x+(x^2-2x)\left(e^x\right)' \overset{(^*2)}{=} (2x-2)e^x+(x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x.$

(*1) Tenim un producte de funcions. Apliquem la propietat c) del Teorema 9.2.1.

(*2) Calculem la derivada del polinomi x^2-2x com a l'apartat e) i la derivada de e^x a partir de la Taula 9.1.1.

g) $$\left(\frac{5x^3-2x^2}{x^4-5x+3}\right)' \overset{(^*1)}{=} \frac{(5x^3-2x^2)'(x^4-5x+3)-(5x^3-2x^2)(x^4-5x+3)'}{(x^4-5x+3)^2}$$

$$\overset{(^*2)}{=} \frac{(15x^2-4x)(x^4-5x+3)-(5x^3-2x^2)(4x^3-5)}{(x^4-5x+3)^2} = \frac{-5x^6+4x^5-50x^3+55x^2-12x}{(x^4-5x+3)^2}.$$

(*1) Tenim una divisió de funcions. Apliquem la propietat d) del Teorema 9.2.1.

(*2) Calculem les derivades dels polinomis $5x^3-2x^2$ i x^4-5x+3 com a l'apartat e).

(*3) Simplifiquem l'expressió obtinguda.

h) $\left(\sin(x^2)\right)' = \left(\sin(\boxed{x^2})\right)' \overset{(^*1)}{=} \cos(x^2)\cdot(\boxed{x^2})' = \cos(x^2)\cdot(2x).$

(*1) Tenim una composició de funcions: $\sin(x^2)=(g\circ f)(x)$ on $g(x)=\sin x$ i $f(x)=x^2$. Apliquem la regla de la cadena (propietat e) del Teorema 9.2.1). $g'(x)=\cos x$.

i) $\left(\sin^2 x\right)' = \left((\boxed{\sin x})^2\right)' \overset{(^*1)}{=} 2\sin x\cdot(\boxed{\sin x})' = 2\sin x\cdot\cos x.$

(*1) Tenim una composició de funcions: $(\sin x)^2=(g\circ f)(x)$ on $g(x)=x^2$ i $f(x)=\sin x$. Apliquem la regla de la cadena (propietat e) del Teorema 9.2.1). $g'(x)=2x$.

j) $$\left(\sin(e^{x^2+2x+1})\right)' = \left(\sin\left(\boxed{e^{\boxed{x^2+2x+1}}}\right)\right)' \overset{(^*1)}{=} \cos(e^{x^2+2x+1})\left(e^{\boxed{x^2+2x+1}}\right)'$$

$$\overset{(^*2)}{=} \cos(e^{x^2+2x+1})e^{x^2+2x+1}\left(\boxed{x^2+2x+1}\right)' = \cos(e^{x^2+2x+1})e^{x^2+2x+1}(2x+2).$$

(*1) Tenim una composició de funcions: $\sin\left(\boxed{e^{x^2+2x+1}}\right)=(g\circ f)(x)$ on $g(x)=\sin x$ i $f(x)=e^{x^2+2x+1}$. Apliquem la regla de la cadena (propietat e) del Teorema 9.2.1). $g'(x)=\cos x$.

(*2) Tornem a tenir una composició de funcions: $e^{\boxed{x^2+2x+1}}=(g\circ f)(x)$ on $g(x)=e^x$ i $f(x)=x^2+2x+1$. Apliquem la regla de la cadena. $g'(x)=e^x$.

k) $\left(xe^{x^2}\right)' = \left(\boxed{x}\cdot\boxed{e^{x^2}}\right)' \overset{(^*1)}{=} (x)'e^{x^2}+x\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}+xe^{x^2}2x \overset{(^*3)}{=} (1+2x^2)e^{x^2}.$

(*1) Tenim un producte de funcions. Apliquem la propietat c) del Teorema 9.2.1.

(*2) Calculem les derivades que falten.
$(x)' = 1$
$\left(e^{x^2}\right)' \overset{(*a)}{=} e^{x^2}2x$

(*a) Tenim una composició de funcions. $e^{x^2} = (g \circ f)(x)$ amb $g(x) = e^x$ i $f(x) = x^2$. Apliquem la regla de la cadena. $g'(x) = e^x$ i $f'(x) = 2x$.

(*3) Simplifiquem l'expressió que queda.

l) $\left(\dfrac{\tan(x^2+4)+2\cos x}{x^2-5x+9}\right)' = \left(\dfrac{\boxed{\tan(x^2+4)+2\cos x}}{\boxed{x^2-5x+9}}\right)'$

$$\overset{(*1)}{=} \frac{(\tan(x^2+4)+2\cos x)'(x^2-5x+9)-(\tan(x^2+4)+2\cos x)(x^2-5x+9)'}{(x^2-5x+9)^2}$$

$$\overset{(*2)}{=} \frac{\left(\dfrac{1}{\cos^2(x^2+4)}(2x)-2\sin x\right)(x^2-5x+9)-(\tan(x^2+4)+2\cos x)(2x-5)}{(x^2-5x+9)^2}$$

(*1) Tenim una divisió de funcions. Apliquem la propietat d) del Teorema 9.2.1.

(*2) Calculem les derivades que falten.
$\left(\tan(x^2+4)+2\cos x\right)' = \left(\boxed{\tan(x^2+4)}+\boxed{2\cos x}\right)' \overset{(*a)}{=} (\tan(x^2+4))' + 2(\cos x)'$
$\overset{(*b)}{=} \dfrac{1}{\cos^2(x^2+4)}(2x) - 2\sin x$

(*a) Tenim la suma d'una funció amb una altra funció multiplicada per una constant. Apliquem les propietats a) i b) del Teorema 9.2.1.

(*b) Calculem les derivades que falten.
La funció $\tan(x^2+4)$ és una composició de funcions:
$\tan(x^2+4) = (g \circ f)(x)$ on $g(x) = \tan x$ i $f(x) = x^2+4$.
Apliquem la regla de la cadena. $g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ i $f'(x) = 2x$.

$(x^2-5x+9)' = 2x-5$

Exercicis d'autoavaluació

1. Calculeu les derivades de les següents funcions.

a) $f(x) = (x^2+16x+8)\sqrt{x^2+4x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{(x^2+17x-5)^4}$

c) $f(x) = \ln\left((x+2)^3\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)$

e) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}$

f) $f(x) = \left(\ln(7x^2-5x)\right)^4$

g) $f(x) = 4^{\ln(x^2-1)}$

h) $f(x) = 6^{\sqrt{x^2+4x}}$

i) $f(x) = \sqrt{\tan^2 x^2 + \operatorname{cosec} 5x}$

j) $f(x) = \dfrac{\tan\left(6x^3+e^{x^2+2x}\right)}{1+\sin 5x}$

k) $f(x) = \sin^2(x^3+2x^2)$

l) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\tan\left(e^{x^2+2x-1}\right)\right)}$

m) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{\sec x}\right)^2$

n) $f(x) = \ln\left((4e)^{7x^2}+6e^{2x}-x\right)$

Solució

Es presenten els resultats sense simplificar.

a) $$\left((x^2+16x+8)\sqrt{x^2+4x}\right)' = (x^2+16x+8)'\cdot\sqrt{x^2+4x} + (x^2+16x+8)\cdot\left(\sqrt{x^2+4x}\right)'$$
$$= (2x+16)\cdot\sqrt{x^2+4x} + (x^2+16x+8)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot(2x+4)$$

b) $$\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{(x^2+17x-5)^4}\right)' = \frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)'(x^2+17x-5)^4 - \sqrt{2x-1}\left((x^2+17x-5)^4\right)'}{(x^2+17x-5)^8}$$
$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\cdot(x^2+17x-5)^4 - \sqrt{2x-1}\cdot 4\cdot(x^2+17x-5)^3\cdot(2x+17)}{(x^2+17x-5)^8}$$

c) $$\left(\ln\left((x+2)^3\right)\right)' = \frac{1}{(x+2)^3}\cdot\left((x+2)^3\right)' = \frac{1}{(x+2)^3}\cdot 3\cdot(x+2)^2\cdot 1$$

d) $$\left(\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\right)' = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-1)-\sqrt{x+1}\cdot 1}{(x-1)^2}$$

e) $$\left(\sqrt{\ln\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}}\left(\ln\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}}\ \frac{1}{\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}}\ \left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}}\ \frac{1}{\left(\frac{\sin(x^2+4x)}{x^2+2}\right)}\ \frac{\cos(x^2+4x)(2x+4)(x^2+2)-\sin(x^2+4x)2x}{(x^2+2)^2}$$

f) $$\left(\left(\ln(7x^2-5x)\right)^4\right)' = 4\cdot\left(\ln(7x^2-5x)\right)^3\cdot(\ln(7x^2-5x))'$$

$$= 4\cdot\left(\ln(7x^2-5x)\right)^3\cdot\frac{1}{7x^2-5x}\cdot(14x-5)$$

g) $$\left(4^{\ln(x^2-1)}\right)' = 4^{\ln(x^2-1)}\ln 4\cdot(\ln(x^2-1))' = 4^{\ln(x^2-1)}\ln 4\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot(2x)$$

h) $$\left(6^{\sqrt{x^2+4x}}\right)' = 6^{\sqrt{x^2+4x}}\ln 6\cdot\left(\sqrt{x^2+4x}\right)' = 6^{\sqrt{x^2+4x}}\ln 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot(2x+4)$$

i) $$\left(\sqrt{\tan^2 x^2+\operatorname{cosec}5x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x^2+\operatorname{cosec}5x}}\cdot(\tan^2 x^2+\operatorname{cosec}5x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x^2+\operatorname{cosec}5x}}\cdot\left((\tan^2 x^2)'+\left(\frac{1}{\sin(5x)}\right)'\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 x^2+\operatorname{cosec}5x}}\cdot\left(2\tan x^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x^2}\cdot(2x)-\frac{1}{\sin^2(5x)}\cdot\cos(5x)\cdot 5\right)$$

j) $$\left(\frac{\tan\left(6x^3+e^{x^2+2x}\right)}{1+\sin 5x}\right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\left(6x^3+e^{x^2+2x}\right)}\cdot\left(18x^2+e^{x^2+2x}(2x+2)\right)\cdot(1+\sin(5x))-\tan\left(6x^3+e^{x^2+2x}\right)\cdot\cos(5x)\cdot 5}{(1+\sin 5x)^2}$$

k) $$\left(\sin^2(x^3+2x^2)\right)' = 2\cdot\sin(x^3+2x^2)\cdot\cos(x^3+2x^2)\cdot(3x^2+4x)$$

l) $$\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(e^{x^2+2x-1}\right)\right)}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(\tan\left(e^{x^2+2x-1}\right)\right)}}\cdot\frac{1}{\tan\left(e^{x^2+2x-1}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(e^{x^2+2x-1}\right)}\cdot e^{x^2+2x-1}\cdot(2x+2)$$

m) $$\left(\ln\left(\frac{x^2-4}{\sec x}\right)^2\right)' = \frac{1}{\left(\frac{x^2-4}{\sec x}\right)^2}\cdot 2\cdot\frac{x^2-4}{\sec x}\cdot\frac{(2x)(\sec x)-(x^2-4)\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\sec^2 x}$$

n) $\left(\ln\left((4e)^{7x^2}+6e^{2x}-x\right)\right)'=\dfrac{1}{(4e)^{7x^2}+6e^{2x}-x}\cdot\left((4e)^{7x^2}\ln(4e)\cdot(14x)+6e^{2x}\cdot(2)-1\right)$

2. Calculeu les derivades de les següents funcions.

a) $f(x)=x(x^2-3x+2)^4$

b) $f(x)=\dfrac{5}{x^5}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-e^{-x}}{x}$

d) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

e) $f(x)=\sin^2(\ln(1-x^2))$

Solució

Es presenten els resultats amb cert grau de simplificació.

a) $f'(x)=(x^2-3x+2)^3(9x^2-15x+2)$

b) $f'(x)=-\dfrac{25}{x^6}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$

c) $f'(x)=\dfrac{(2x\,e^{x^2}+e^{-x})x-(e^{x^2}-e^{-x})}{x^2}$

d) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2-1}$

e) $f'(x)=-\dfrac{4x}{1-x^2}\sin(\ln(1-x^2))\cos(\ln(1-x^2))$

Glossari de termes

Bibliografia

Podeu consultar qualsevol llibre de primer i segon de Batxillerat.