

2.1 La relació de divisibilitat

Per exemple: En un aparcament de 40 metres de longitud cap un nombre exacte d'autobusos de 10 m $\rightarrow 40:10 = 4$ autobusos.

Però, no passa el mateix amb camionetes de 7 m de longitud $\rightarrow 40:7$ no és una divisió exacta.

Així, la relació que hi ha entre dos nombres, quan un cap en l'altre una quantitat exacta de vegades, rep el nom de **relació de divisibilitat**.

$A:B$ és exacta $\leftrightarrow B$ cap un nombre exacte de vegades en $A \leftrightarrow A$ és divisible entre $B \leftrightarrow A$ i B es troben emparentats per una relació de divisibilitat.

Per exemple:

$40:10 = 4$ per tant, és exacta $\leftrightarrow 10$ cap 4 vegades en 40 $\leftrightarrow 40$ és divisible per 10 $\leftrightarrow 40$ i 10 tenen relació de divisibilitat.

2.2 Múltiples i divisors

Si entre dos nombres existeix una relació de divisibilitat, diem que:

- El major és **múltiple** del menor.
- El menor és **divisor** del major.

Per exemple:

a) $40:10 = 4 \rightarrow 40$ és múltiple de 10 (i de 4) i 10 és divisor de 40.

b) 3 cap un nombre exacte de vegades en 15 $\rightarrow 15$ és múltiple de 3 i 3 és divisor de 15.

Múltiples d'un nombre:

- Els múltiples d'un nombre s'obtenen multiplicant aquest nombre per qualsevol nombre natural: $a \cdot k \rightarrow$ múltiple d' a .
- Tot nombre és múltiple de si mateix : $a \cdot 1 = a \rightarrow$ múltiple d' a .
- Un nombre diferent de zero, té múltiples infinits.

Per exemple:

3 conjunt de múltiples de 3:

$$3 = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots\} = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$

Divisors d'un nombre:

- Els divisors d'un nombre s'obtenen buscant les divisions exactes.
- Tot nombre és divisor de si mateix: $a:a = 1$
- L'1 és divisor de qualsevol nombre: $a:1 = a$

Per exemple:

Divisors del 20:

$20:20 = 1$
$20:10 = 2$
$20:5 = 4$
$20:4 = 5$
$20:2 = 10$
$20:1 = 20$

2.3 Nombres primers i compostos.

Els nombres que només tenen per divisors l'1 i ell mateix s'anomenen **primers**. Els que tenen més divisors que aquests dos s'anomenen **compostos**.

Uns quants nombres primers són : 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,...

2.4 Criteris de divisibilitat

- És múltiple de 2 si acaba en 0 o xifra parell. Per exemple: 2,12,20,100,...
- És múltiple de 3 si la suma de les seves xifres és múltiple de 3. Per exemple: 36,39,741,...
- És múltiple de 5 si acaba en 0 o 5. Per exemple: 10, 100, 555,...
- És múltiple de 6 si ho és de 2 i 3 a la vegada. Per exemple: 12,36,48,...
- És múltiple de 9 si la suma de les seves xifres són 9 o múltiple de 9. Per exemple: 18,27,81,...
- És múltiple de 10 si acaba en 0. Per exemple: 20,500,10000,...
- És múltiple d'11 si la resta entre la suma de les xifres parells i la suma de les imparells dona 11 o múltiple d'11. Per exemple: 121, 1221,...
- Un nombre a és divisible per un nombre b si $a:b$ és exacta.

2.5 Descomposició d'un nombre en factors primers.

Per **descompondre un nombre en factors primers**, cosa que també anomenem

factoritzar, el dividim entre els divisors primers: primer entre 2 tantes vegades com es pugui, després entre 3, després entre 5... i així, successivament, fins a obtenir en el quocient un 1.

Per exemple:

a) Volem descompondre 36 en producte de factors primers:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

→ Per tant, $36 = 2^2 \cdot 3^2$

b) Volem descompondre 600 en producte de factors primers:

600	2
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

→ Per tant, $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

· Obtenció de tots els divisors d'un nombre a través de la descomposició en factors primers:

Per exemple: Volem trobar tots els divisors del nombre 40. Fem la descomposició.

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

→ Per tant, $40 = 2^3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

Seràn divisors totes les possibles combinacions entre els últims 4 nombres més l'1:

$D(40) = \{ 1, 2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2, 5, 2 \cdot 5, 2 \cdot 2 \cdot 5, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \}$ ordenem el conjunt si cal:

$D(40) = \{ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 \}$

2.6 Mínim comú múltiple (mcm).

El menor dels múltiples comuns de dos o més nombres l'anomenem **mínim comú múltiple**.

Per exemple:

a) mcm (18, 45)

18	2		45	3
9	3		15	3
3	3		5	5
1			1	

→ Per tant, $18 = 2 \cdot 3^2$ i $45 = 3^2 \cdot 5$

Per calcular el mcm hem d'agafar els factors primers que no es repeteixen i tots els que es repeteixen amb l'exponent més gran.

Així, $\text{mcm}(18, 45) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

b) El veterinari del zoo visita els goril·les cada 6 dies i els elefants cada 4 dies. Cada quant temps coincideixen ambdues visites al mateix dia?

Fixem-nos que :

visites als goril·les → 4t dia, 8è dia, **12è dia**, 16è dia,...

visites als elefants → 6è dia, **12è dia**, 18è dia,...

Estem buscant un múltiple comú el mínim de petit possible, és a dir el mcm:

$\text{mcm}(6, 4) = 2^2 \cdot 3 = 12$ ($6 = 2 \cdot 3$ $4 = 2^2$)

2.7 Màxim comú divisor (mcd).

El major dels divisors comuns a dos o més nombres l'anomenem **màxim comú divisor**.

Per exemple:

a) mcd (18, 45)

Cal fer la descomposició, ja la tenim feta de l'apartat 2.6:

→ $18 = 2 \cdot 3^2$ $45 = 3^2 \cdot 5$

Per calcular el mcd hem d'agafar només els factors que es repeteixen amb l'exponent més petit.

Així, $\text{mcd}(18, 45) = 3^2 = 9$.

b) El zoo ha adquirit 8 panteres i 12 gaseles que s'han de traslladar en gàbies d'igual nombre d'animals i tan grans com sigui possible. Quants animals aniran en cada gàbia?

Fixem-nos que:

8 panteres poden anar en gàbies de $\rightarrow$ 8 animals, 4 animals, 2 animals i 1 animal

12 gaseles poden anar en gàbies de $\rightarrow$ 12 animals, 6 animals, 4 animals, 3 animals, animals i 1 animal.

Estem buscant el divisor comú el més gran possible, és a dir el mcd (12, 8):

$$\rightarrow 12 = 2^2 \cdot 3 \text{ i } 8 = 2^3$$

Per tant, $\text{mcd}(12, 8) = 2^2 = 4$.