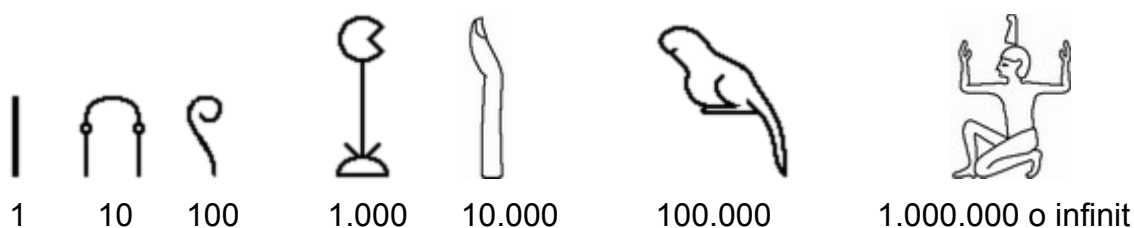


1.1 Origen i evolució dels nombres:

Per conservar els resultats dels recomptes, és a dir, per expressar els nombres, cada cultura ha inventat codis diferents que han anat simplificant-se i perfeccionant-se.

Hi ha diferents tipus de sistemes de numeració:

- Sistema Additiu: la quantitat total s'aconsegueix afegint els valors dels signes que hi intervenen. Per tant, no cal el valor del zero. Exemples d'aquests sistemes són l'egipci i el romà. El sistema de numeració romà l'estudiareu a Ciències Socials. Pel que fa al sistema de numeració egipci diposa de set símbols:



- Sistema Posicional: nosaltres utilitzem un sistema de numeració posicional decimal que va nèixer a l'Índia el segle VII i va arribar a Europa a través dels àrabs.

Es diu **decimal** perquè utilitza **deu** símbols:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Es diu **posicional** ja que cada símbol adquireix un valor diferent segons el lloc que ocupa.

Els diferents llocs que ocupa un símbol (xifra) són els diferents ordres o categories d'unitats:

Unitats U; desenes D; centenes C; unitats de miler Um; desenes de miler Dm; centenes de miler Cm; unitats de milió UM;

UM	Cm	Dm	Um	C	D	U
	2	0 7	0 0 2	0 0 0 6	0 0 0 0 5	0 0 0 0 8
	2	7	2	6	5	8

$$272.658 = 2 \cdot 100.000 + 7 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1.000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

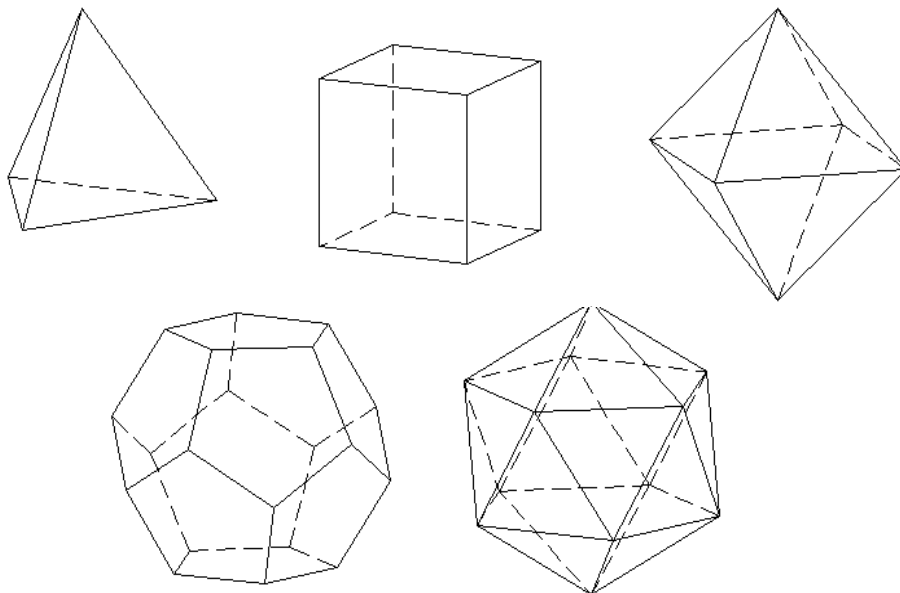
$$2 \text{ Cm} + 7 \text{ Dm} + 2 \text{ Um} + 6 \text{ C} + 5 \text{ D} + 8 \text{ U}$$

1.2 Què fem amb els nombres?

Amb els nombres naturals podem fer diverses tasques:

- **COMPTAR:** amb els nombres naturals podem comptar els elements d'un conjunt.

Per exemple: Quantes cares tenen aquests políedres regulars?



Solució: el tetraedre 3 cares, el cub (hexaedre) 6 cares, octaedre 8 cares, dodecaedre 12 cares i icosaedre 20 cares.

- **ESTIMAR (COMPTAR APROXIMADAMENT):** quan no podem o no volem comptar exactament una certa quantitat, podem donar una idea aproximada i ràpida, a aquesta acció se l'anomena estimar.

Per exemple: Quantes persones assiteixen a una manifestació en un carrer o una plaça pública?

Es compta amb fotografies aèries quantes persones hi ha per metre quadrat.

DADES ESTIMADES

ESTIMACIÓ DEL NOMBRE DE PERSONES

En un metre quadrat hi ha 3 persones En $1 \text{ m}^2 \rightarrow 3$ persones

La manifestació ocupa una superfície

de 2500 m^2

En $2500 \text{ m}^2 \rightarrow 2500 \cdot 3 = 7500$

Solució: Estimem que assisteixen a la manifestació unes 7500 persones.

- **ORDENAR:** Si associem un nombre natural a cadascun dels elements d'un grup l'estem ordenant. Els noms que reben els nombres per expressar ordre són (**ordinals**):

1: primer; 2: segon; 3: tercer; 4: quart; 5: cinqué; 6: sisé; 7: seté; 8: vuité; 9: nové; 10: desé; 11: onzé; 12: dotzé; 13: tretzé; 14: catorzé; 15: quinzé; 16: setzé; 17: disseté; 18: divuité; 19: dinové; 20: vinté;....

- **EXPRESSAR CODIS:** Els nombres naturals ens serveixen per identificar persones, objectes, llocs, entitats, ... és a dir, com a símbols d'un codi amb el qual catalogar i diferenciar els diferents elements d'un conjunt. Per comprendre un codi, cal conèixer-ne les **claus d'identificació**.

Per exemple: Els codis assignats pel Servei de Correus i Telègrafs a algunes províncies i localitats. Les dues primeres xifres d'un codi postal identifiquen la província.

Així, el codi de la província de Barcelona és 08 i totes les localitats d'aquesta província tenen codi postal que comença per 08. Per exemple: Manresa 08240; Sant Fruitós de Bages 08272; Avinyó: 08279; Badia del Vallés: 08214; Mollet del Vallés: 08100, ...

A la província de Lleida comencen per 25 i a la de Girona per 17.

1.3 Els grans nombres: milions, miliards i bilions.

La successió de nombres naturals creix indefinidament, sense límit, i el nostre sistema de numeració permet representar quantitats tan grans com calgui.

1000 milers = 1 milió = 1.000.000

1000 milions = 1 miliard = 1.000.000.000

1000 miliards = 1 bilió = 1.000.000.000.000

Resumint: MILIÓ = 1.000.000 ; MILIARD = 1.000.000.000; BILIÓ = 1.000.000.000.000.

Per exemple:

a) Un any té trenta-un milions i mig de segons = 31.500.000 segons.

b) La Terra té cinc mil milions d'habitants = 5.000.0000.000 d'habitants= 5 miliards d'habitants.

c) Un any llum equival a nou bilions i mig de quilòmetres = 9.500.000.000.000 de quilòmetres.

Aproximació d'un nombre a un determinat ordre d'unitats:

TRUNCAR: és substituir les xifres per zeros fins a un ordre d'unitats determinat.

ARRODONIR: és substituir el nombre per la quantitat d'unitats d'un ordre determinat que hi queda més pròxima.

Per exemple:

Aproximem a les centenes, per truncament i per arrodoniment, els nombres següents:

a) 27.640

TRUNCAMENT → 27.600

ARRODONIMENT → 27.600

b) 3.850

TRUNCAMENT → 3.800

ARRODONIMENT → 3.900

1.4 Operacions amb nombres naturals

Tot i que ja saps operar amb nombres naturals, recordarem alguns conceptes i propietats:

LA SUMA:

Sumar és unir, ajuntar i afegir. Els seus termes s'anomenen sumands. Algunes propietats de la suma són:

- Propietat commutativa: la suma no varia en canviar l'ordre dels sumands:

$$a + b = b + a$$

- Propietat associativa: el resultat de la suma és independent de l'ordre en què s'agrupen els sumands:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Per exemple: Dues poblacions properes tenen 23.709 i 18.526 habitants respectivament. Calculem el conjunt d'habitants entre els dos pobles:

$23.709 + 18.526 = 42.235$ habitants (23.709 i 18.526 són els sumands i 42.235 és el resultat)

LA RESTA:

Restar és treure o suprimir, és a dir, calcular-ne la diferència. Els termes de la resta s'anomenen minuend, substraend i resta: **minuend – substraend = resta**

Per exemple: Amb les dades de l'exemple anterior calculem la diferència entre el nombre d'habitants dels dos pobles:

$23.709 - 18.526 = 5.183$ habitants (23.709 és el minuend, 18.526 és el substraend i 5.183 és la resta).

ÚS DE PARENTÈSIS EN LA SUMA I LA RESTA:

Quan trobem un parèntesis en una cadena de sumes i restes cal fer sempre primer l'operació que hi hagi dins.

Per exemple:

$$8 - 2 + 4$$

$$6 + 4$$

$$10$$

$$8 - (2 + 4)$$

$$8 - 6$$

$$2$$

LA MULTIPLICACIÓ O PRODUCTE:

Multiplicar és una forma abreujada de fer una suma repetida de sumands iguals. Els termes d'una multiplicació s'anomenen factors. Algunes propietats del producte són:

- Propietat commutativa: el producte no varia en canviar l'ordre dels factors:
 $a \cdot b = b \cdot a$
- Propietat associativa: el resultat del producte és independent de l'ordre en què s'agrupen els factors:
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Propietat distributiva del producte:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Per exemple: a) Si un comerciant ven cinc televisors de 250 € cadascun, els diners que ingressa a caixa són:

$$250 + 250 + 250 + 250 + 250 = 5 \cdot 250 = 1250 \text{ €}$$

b) L'Alfred va a comprar quatre entrades per a un concert de rock i l'Aurora va a comprar dues entrades. Quant paguen entre els dos si cada entrada val 15 €?

$$15 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 60 + 30 = 90 \text{ €} \quad \text{o bé} \quad 15 \cdot (4 + 2) = 15 \cdot 6 = 90 \text{ €}$$

c) Per multiplicar $35 \cdot 12$ podem fer el següent i així aprofitar les operacions més senzilles:

$$35 \cdot 12 = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 10 \cdot 42 = 420$$

Producte per 10, 100, 1000,...:

Per multiplicar un nombre per la unitat seguida de zeros, s'afegeixen a la dreta del nombre tants zeros com acompanyen la unitat.

Per exemple:

$$\text{a) } 38 \cdot 10 = 380 \quad \text{b) } 38 \cdot 100 = 3800 \quad \text{c) } 38 \cdot 100.000 = 3.800.000$$

LA DIVISIÓ:

Dividir és repartir a parts iguals o partir en parts d'una determinada grandària. Les parts d'una divisió són Dividend, divisor, quocient i residu. Així:

$$D = d \cdot q + r$$

Si el residu és zero, la divisió és exacta.

Si el residu és diferent de zero, la divisió és entera.

Per exemple: Un autobús amb 40 turistes té una avaria camí de l'aeroport.

Com que no hi ha temps ja que l'avió no espera, el responsable del grup decideix acomodar els viatgers en taxis de 4 places. Quants taxis completaran?

$$40 : 4 \rightarrow D = 40; d = 4; q = 10 \text{ i } r = 0.$$

Suposem ara que són 43. Quants taxis completarien?

$$43 : 4 \rightarrow D = 43; d = 4; q = 10 \text{ i } r = 3.$$

PRIORITAT O JERARQUIA D'OPERACIONS:

En les expressions amb operacions combinades cal tenir clar en quin ordre s'ha d'actuar:

1. Parèntesis
2. Multiplicació i divisió.
3. Suma i resta

Per exemple:

a) $3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 15 + 8 - 12 = 23 - 12 = 11$

b) $3 \cdot (5+2) \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 3 \cdot 7 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 84 - 12 = 72$

c) $40 : (11-6) + 18:6 - 2 \cdot 3 = 40:5 + 18:6 - 2 \cdot 3 = 8 + 3 - 6 = 11 - 6 = 5$

1.5 Potències

Una **potència** és una forma abreujada d'expressar un producte de factors iguals:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

El factor repetit es diu base i el nombre de vegades que es repeteix, exponent.

Per exemple:

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ b) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ c) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

Dues potències que s'utilitzen molt són el quadrat i el cub:

- El quadrat d'un nombre és la potència d'exponent dos: $a^2 \rightarrow$ quadrat d'a
- El cub d'un nombre és la potència d'exponent tres: $a^3 \rightarrow$ cub d'a

Per exemple:

a) el quadrat de 5 $\rightarrow 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

b) el cub de 2 $\rightarrow 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Potències de base 10:

El càlcul de potències de base 10 és molt senzill: la unitat seguida de tants zeros com indica l'exponent.

Per exemple:

a) $10^2 = 100$ b) $10^3 = 1000$ c) $10^6 = 1000000$

1.7 Operacions amb potències

Per poder operar amb potències cal memoritzar les regles següents:

- Producte de potències de la mateixa base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Quocient de potències de la mateixa base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Potència d'una potència: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Per exemple:

a) $3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

b) $5^6 : 5^3 = 5^{6-3} = 5^3$

c) $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$

1.8 L'arrel quadrada

Calcular l'arrel quadrada és l'operació inversa d'elevat al quadrat:

$$b^2 = a \leftrightarrow \sqrt{a} = b$$

Es llegeix l'arrel quadrada de b és a.

D'aquesta manera:

$$3^2 = 9 \leftrightarrow \sqrt{9} = 3$$

$$4^2 = 16 \leftrightarrow \sqrt{16} = 4$$

...

A aquests nombres que la seva arrel quadrada és exacta se'ls anomena quadrats perfectes:

$1^2 = 1$	$7^2 = 49$	$13^2 = 169$
$2^2 = 4$	$8^2 = 64$	$14^2 = 196$
$3^2 = 9$	$9^2 = 81$	$15^2 = 225$
$4^2 = 16$	$10^2 = 100$	...
$5^2 = 25$	$11^2 = 121$	
$6^2 = 36$	$12^2 = 144$	

Per exemple: La superfície d'un quadrat és de 16 m^2 . Quant fa cada costat?

$$a^2 = 16 \rightarrow a = \sqrt{16} = 4m$$

Arrels exactes i arrels inexactes:

Hi ha nombres com el 49, el 100 o el 225, l'arrel dels quals és exacta:

$$\sqrt{49} = 7; \sqrt{100} = 10; \sqrt{225} = 15$$

Els anomenem **quadrats perfectes** tal com hem dit anteriorment:

$$7^2 = 49 ; 10^2 = 100 ; 15^2 = 225$$

Però, per la majoria de nombres, l'arrel quadrada no coincideix amb un nombre exacte. El que farem nosaltres és trobar una aproximació en aquests casos, l'anomenarem **arrel entera** (és a dir el nombre natural que més s'aproxima, sense passar-se).

Per exemple: Busquem l'arrel de 30:

Com que no és un quadrat perfecte, només podrem trobar un aproximació o arrel entera:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^2 = 25 < 30 \\ 6^2 = 36 > 30 \end{array} \right\} \rightarrow 5 < \sqrt{30} < 6$$

Per tant, l'arrel quadrada de 30 és un valor comprés entre 5 i 6 i la seva arrel entera és 5.