Solucions examen 5

1.- Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i B=} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula

a) (3A-5B)^t

b) A$\bullet$ B-B$\bullet$A

c) B^{-1}

b) A^2

En efecte,

a) $(3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\text{-5}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix})^t = \begin{pmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 1 & -9 & -23 \\ -9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) A$\bullet$ B-B$\bullet$A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -5 & 22 & 6 \\ -11 & 19 & 1 \\ -12 & 4 & -14 \end{pmatrix}$

c) B^{-1} $= \begin{pmatrix} 2/-4 & 10/-4 & -8/-4 \\ 0 & -4/-4 & 2/-4 \\ 0 & 4/-4 & 2/-4 \end{pmatrix}$

d) A^2 $= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 14 & 4 & 24 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

2.- Estudia i resol el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x + ay + (a+2)z = 5 \end{array} \right.$$

pdfMachine
Is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{bmatrix}$ = 16a-80=0→ a=5.

  Si **a≠5** com que detA≠0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $\begin{cases} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{cases}$ → El sistema serà compatible determinat i les seves solucions seran:

  x=$\dfrac{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{14a-70}{16a-80}$, y=$\dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & a+2 \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{-5a+25}{16a-80}$, z=$\dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & 5 \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{5a-25}{\text{5a-15}}$.

  Per altra banda si **a=5** aleshores el sistema sortirà

$$\begin{cases} 2x+y+5z=3 \\ 3x+4y+2z=2 \\ 5x+5y+7z=5 \end{cases}$$

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A. Observem que detA=0 i, per tant,

pdfMachine
Is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ =5 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = 0,$
$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ i d'aquesta manera el rang de B serà 2.
Així, doncs, tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=2} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà compatible indeterminat per a=7.}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y = 3 - 5z \\ 3x + 4y = 2 - 2z \end{array} \right.$$

Les solucions, doncs seran:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{bmatrix} 3-5z & 1 \\ 2-2z & 4 \end{bmatrix}}{5} = \frac{12 - 20z - 2 + 2z}{5} = \frac{-18z + 10}{5} \\ x &= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3-5z \\ 3 & 2-2z \end{bmatrix}}{5} = \frac{4 - 4z - 9 + 15z}{5} = \frac{11z - 5}{5} \end{aligned}$$

3.- Troba l' àrea de la regió f(x)=$2x - 1$ i f(x)=$x^2 - 3x + 3$

En efecte,

$$\int_1^4 (2x-1) - (x^2 - 3x + 3)dx = \frac{9}{2}$$

pdfMachine
Is a pdf writer that produces quality PDF files with ease!
Produce quality PDF files in seconds and preserve the integrity of your original documents. Compatible across nearly all Windows platforms, if you can print from a windows application you can use pdfMachine.
Get yours now!