Solucions examen 5

1.- Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i B=} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula

a) (3A-5B)^t

b) A$\bullet$ B-B$\bullet$A

c) B^{-1}

b) A^2

En efecte,

a) $(3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\text{-5}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix})^t = \begin{pmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 1 & -9 & -23 \\ -9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) A$\bullet$ B-B$\bullet$A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -5 & 22 & 6 \\ -11 & 19 & 1 \\ -12 & 4 & -14 \end{pmatrix}$

c) B^{-1} $= \begin{pmatrix} 2/-4 & 10/-4 & -8/-4 \\ 0 & -4/-4 & 2/-4 \\ 0 & 4/-4 & 2/-4 \end{pmatrix}$

d) A^2 $= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 20 \\ 14 & 4 & 24 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

2.- Estudia i resol el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x + ay + (a+2)z = 5 \end{array} \right.$$

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A.

  Aleshores $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{bmatrix}$ = 16a-80=0→ a=5.

  Si **a≠5** com que detA≠0 aleshores RangA=3 i per tant RangB=3, aleshores:

  $\begin{cases} \text{RangA=3} \\ \text{RangB=3} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{cases}$ → El sistema serà compatible determinat i les seves solucions seran:

  x=$\dfrac{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & a & \text{a+2} \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{14a-70}{16a-80}$, y=$\dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & a+2 \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{-5a+25}{16a-80}$, z=$\dfrac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & a & 5 \end{bmatrix}}{16a-80} = \frac{5a-25}{\text{5a-15}}$.

  Per altra banda si **a=5** aleshores el sistema sortirà

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 5x + 5y + 7z = 5 \end{cases}$$

En efecte, Aquest sistema té per matriu associada A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ i per matriu ampliada B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

- La primera cosa que farem és estudiar en funció dels valors d'a quin és el rang d'A. Observem que detA=0 i, per tant,

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ =5 tindrem que rangA=2. Per altra banda $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$ i d'aquesta manera el rang de B serà 2.
Així, doncs, tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{r} \text{RangA=2} \\ \text{RangB=2} \\ \text{n}^o \text{ incògnites=3} \end{array} \right. \rightarrow \text{El sistema serà compatible indeterminat per a=7.}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 3 - 5z \\ 3x + 4y = 2 - 2z \end{array} \right.$$

Les solucions, doncs seran:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 3-5z & 1 \\ 2-2z & 4 \end{bmatrix}}{5} = \frac{12-20z-2+2z}{5} = \frac{-18z+10}{5}$$
$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3-5z \\ 3 & 2-2z \end{bmatrix}}{5} = \frac{4-4z-9+15z}{5} = \frac{11z-5}{5}$$

3.- Tres maquines estan fetes amb un tipus de material. Si fabriquem 2 màquines del primer tipus,4 del segon tipus i 5 del tercer tipus gastarem 54 Kg de material. Si fabriquem 4 del primer tipus, 2 del segon tipus i 3 del tercer tipus aleshores gastarem 40 Kg de material. Finalment, si fabriquem 3 del primer tipus, 5 del segon i 1 del tercer aleshores gastarem 27 Kg de material. Quant material porta cada màquina?

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 5z &= 54 \\ 4x + 2y + 3z &= 40 \\ 3x + 5y + z &= 27 \end{aligned}$$

D' aquesta manera, per Cramer, les solucions són x=3, y=2 i z=8.