

## Rectes perpendiculars

En el pla dues rectes són perpendiculars si formen un angle de  $90^\circ$ . Equivalentment, dues rectes són perpendiculars si els seus vectors formen un angle de  $90^\circ$ .

**Propietat.** Els vectors  $u(x, y)$  i  $v(-y, x)$  són perpendiculars.

Demostració. En efecte,  $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{(x, y) \cdot (-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(-y)^2 + x^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$ .

**Exemple 1.** Troba la recta perpendicular a  $3x + 2y = 4$  que passi pel punt  $(8, 1)$ .

Resolució. El vector de la recta que busquem és perpendicular al de la recta  $3x + 2y = 4$ , és a dir el vector  $(3, 2)$ . així, doncs, la recta buscada serà

$$\frac{x - 8}{3} = \frac{y - 1}{2}$$

$$2x - 3y = 13$$

**Exemple 2.** Troba la recta perpendicular a  $x + y = 4$  que passi pel punt  $(0, 1)$ .

Resolució. El vector de la recta que busquem és perpendicular al de la recta  $3x + y = 4$ , és a dir el vector  $(3, 1)$ . així, doncs, la recta buscada serà

$$\frac{x - 0}{3} = \frac{y - 1}{1}$$

$$x - 3y = -3$$

**Exemple 3.** Troba la recta que passa pel punt  $(1, 2)$  i és perpendicular a la que passa pels punts  $A(2, 1)$  i  $B(-1, 0)$ .

Resolució. El vector de la recta  $AB = B - A = (-1, 0) - (2, 1) = (-3, -1)$ . I per tant, el vector de la recta que busquem serà  $(1, -3)$ . Així, doncs, la recta serà

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-3}$$

**Exemple 4.** Troba la recta que passa per la intersecció de les rectes  $3x + 2y = 19$  i  $2x + 3y = 21$  i és perpendicular a la recta  $3x - y = 3$ .

En efecte, busquem, primerament, la intersecció de les rectes  $3x + 2y = 19$  i  $2x + 3y = 21$  resolent el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x + 3y = 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{19 - 3x}{2} \\ y = \frac{21 - 2x}{3} \end{cases}$$

Com que no tenen el mateix pendent, resollem el sistema

$$\frac{19 - 3x}{2} = \frac{21 - 2x}{3}$$

$$57 - 9x = 42 - 4x$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \frac{19 - 3 \cdot 3}{2} = 5 \end{aligned}$$

Per tant, les rectes es tallen en el punt (3, 5).

D'altra banda, el vector de la recta que busquem serà perpendicular al de la recta  $3x - y = 3$  i, per tant, (3, -1). Així, la recta que busquem serà,

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 5}{-1}$$

**Exemple 5.** Troba la recta que passa per la intersecció de les rectes  $x + y = 2$  i  $x - y = 0$  i és perpendicular a la recta  $5x + y = 3$ .

En efecte, busquem, primerament, la intersecció de les rectes  $x + y = 2$  i  $x - y = 0$  resolent el sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ y = x \end{cases}$$

Com que no tenen el mateix pendent, resollem el sistema,

$$2 - x = x$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

Per tant, les rectes es tallen en el punt (1, 1).

D'altra banda, el vector de la recta que busquem serà perpendicular al de la recta  $5x + y = 3$  i, per tant, (5, 1). Així, la recta que busquem serà,

$$\frac{x - 3}{5} = \frac{y - 5}{1}$$