Posició relativa entre varietats lineals.

Posició relativa entre dos plans.

Siguin π_1 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ i π_2 : $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ dos plans, aleshores poden considerar el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ i si l'estudiem tindrem tres possibilitats:

1. RangA=RangB=2$\rightarrow$ sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat i per tant π_1 i π_2 es tallen en una recta.

2. RangA=RangB=1$\rightarrow$ sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i per tant π_1 i π_2 es tallen en un pla i per tant són el mateix pla.

3. RangA=1$\neq$ 2 =RangB$\rightarrow$ sistema incompatible i per tant.π_1 i π_2 són paral·lels.

Posició relativa entre un pla i una recta.

Siguin π_1 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ un pla i r: $\begin{cases} a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$ una recta, aleshores poden considerar el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$ i si l'estudiem tindrem tres possibilitats:

1. RangA=RangB=3$\rightarrow$sistema compatible determinat amb i per tant π_1 i r es tallen en una recta i per tant r tallarà π_1 en un punt.

2. RangA=RangB=2$\rightarrow$ sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat i per tant π_1 i r es tallen en una recta i per tant r estarà continguda en π_1.

3. RangA=2$\neq$3=RangB=1$\rightarrow$ sistema incompatible i per tant.π_1 i r són paral·lels.

Posició relativa entre dues rectes.

Siguin s: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ un pla i r: $\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$ una recta, aleshores poden considerar el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$ i si l'estudiem tindrem quatre possibilitats:

1. RangA=RangB=3→sistema compatible determinat amb i per tant s i r es tallen en una recta i per tant r tallarà s en un punt.
2. RangA=RangB=2→ sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat i per tant s i s es tallen en una recta i per tant r i s seran la mateixa recta.
3. RangA=2≠3=RangB→ sistema incompatible i per tant.s i r són paral·lels.
4. RangA=3≠4=RangB→ sistema incompatible i per tant.s i r es creuen.

Ara bé aquesta forma de trobar la posició relativa entre dues rectes és molt llarga. Una altra forma de calcular la posició relativa entre dues rectes pot ésser:

r: $(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3)= (a_1 + \lambda u_1,a_2+\lambda u_2,a_3+\lambda u_3)$.

s: $(x,y,z)=(b_1,b_2,b_3) + \beta(v_1,v_2,v_3)= (b_1 + \beta v_1,b_2+\beta v_2,b_3+\beta v_3)$.

I el sistema que tindrem serà:

$$\begin{cases} a_1+\lambda u_1 = b_1 + \beta v_1 \\ a_2+\lambda u_2 = b_2 + \beta v_2 \\ a_3+\lambda u_3 = b_3 + \beta v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda u_1 - \beta v_1 = b_1 - a_1 \\ \lambda u_2 - \beta v_2 = b_2 - a_2 \\ \lambda u_3 - \beta v_3 = b_3 - a_3 \end{cases}$$

1. RangA=RangB=2→sistema compatible determinat amb i per tant r i s es tallen en una recta i per tant r tallarà s en un punt.
2. RangA=RangB=1→ sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat i per tant s i s es tallen en una recta i per tant r i s seran la mateixa recta.
3. RangA=2≠3=RangB→ sistema incompatible i per tant.s i r és creuen.
4. RangA=1≠2=RangB→ sistema incompatible i per tant.s i r són paral·leles.

Exemple 1. Troba la posició relativa dels plans π_1: 3x+2y-4z=2 i π_2: 5x-2y+4z=1.

- Per tal de trobar la posició relativa entre aquests dos plans cals estudiar el sistema $\left\{\begin{array}{l}\text{3x+2y-4z=2}\\ \text{5x-2y+4z=1}\end{array}\right.$ la matriu A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ i B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ que si calculem el seu rang tindrem $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ = -16 i per tant

  RangA=RanB=2.

  Així, doncs aquest sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i per tant els dos plans es tallen amb una recta...Quina? Per trobar-la cal resoldre el sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{3x+2y=2+4z}\\ \text{5x-2y=1-4z}\end{array}\right.$$

  les solucions del qual són x=$\dfrac{\begin{bmatrix} 2+4z & 2 \\ 1-4z & -2 \end{bmatrix}}{-16}$ = $\frac{-6}{-16}$, y=$\dfrac{\begin{bmatrix} 3 & 2+4z \\ 5 & 1-4z \end{bmatrix}}{-16}$ = $\frac{-7-20z}{-16}$ i per tant la recta que sortirà serà:

$$(x,y,z)=(\frac{-3}{8},\frac{7}{16},0)+z(0,\frac{5}{4},1)$$

  Observem per tant que hem trobat una nova manera de donar una recta que seria com intersecció de dos plans $\left\{\begin{array}{l}\text{3x+2y-4z=2}\\ \text{5x-2y+4z=1}\end{array}\right.$.

Exemple 2. Troba la posició relativa entre el pla 2x+4y-3z=2 i la recta $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{2}$.

- Primerament escrivim la recta com a intersecció de dos plans $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+1}{2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{5x-3y=7}\\ \text{2y-5z=7}\end{array}\right.$ .per tant el sistema que sortirà per estudiar aquesta posició relativa serà $\left\{\begin{array}{c}\text{5x-3y=7}\\ \text{2y-5z=7}\\ \text{2x+4y-3z=2}\end{array}\right.$ i per tant les matrius que sortiran seran A=$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ mentre que B=$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Així el det$A\neq 0$ i aleshores RangA=RangB=3 i d'aquesta manera la recta i el pla es tallaran en un pnt que trobarem per Cramer.

Una altra forma de calcular la posició relativa entre una recta i un pla és la següent:

- Pla: 2x+4y-3z=2.
- Recta: (x,y,z)=(2,1,-1)+λ(3,5,2)$\rightarrow$ (x,y,z)=(1+3λ, 1+5λ, -1+2λ).

Substituint el punt al pla tindrem: 2(1+3λ)+4(1+5λ)-3(-1+2λ)=2$\rightarrow$ $20\lambda = -7$ i per tant $\lambda = \frac{-7}{20}$.i el punt on es tallaran serà (1+3($\frac{-7}{20}$), 1+5($\frac{-7}{20}$), -1+2($\frac{-7}{20}$)) = ($\frac{-1}{20}$, $\frac{-15}{20}$, $\frac{6}{20}$).

Exemple 3. Troba la posició relativa de larecta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}$ i el plà 3x-2y+5=0.

- Primerament escrivim la recta com a intersecció de dos plans $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x\text{-}2y=7 \\ 2y\text{-}3z=\text{-}13 \end{array} \right.$ .per tant el sistema que sortirà per estudiar aquesta posició relativa serà $\left\{ \begin{array}{c} 3x\text{-}2y=7 \\ 2y\text{-}3z=\text{-}13 \\ 3x\text{-}2y+5=0 \end{array} \right.$ i per tant les matrius que sortiran seran A=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mentre que B=$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -13 \\ 3 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

  Així el det$A=0$ i mentre que $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -13 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ = -15-42=-57$\neq$0, aleshores RangA=2$\neq$ 3=RangB i d'aquesta manera la recta i el pla seran paral·lels.

  Una altra forma de calcular la posició relativa entre una recta i un pla és la següent:

  - Pla: 3x-2y=-5.
  - Recta: (x,y,z)=(1,-2,3)+λ(2,3,2)$\rightarrow$ (x,y,z)=(1+2λ, -2+3λ, 3+2λ).

  Substituint el punt al pla tindrem: 3(1+2λ)-2(-2+3λ)=-5$\rightarrow$ $0\lambda = -12$ i per tant la recta i el pla són paral·lels.

Exemple 4. Troba la posició relativa entre les rectes r: $\frac{\text{x-1}}{5} = \frac{\text{y+1}}{4} = \frac{\text{z}-3}{5}$ i s: $\frac{\text{x-2}}{4} = \frac{\text{y+1}}{5} = \frac{\text{z+3}}{1}$.

- (x,y,z)=(1,-1,3)+λ(5,4,5)$\rightarrow$ (x,y,z)=(1+5λ, -1+4λ, 3+5λ).

  (x,y,z)=(2,-1,-3)+λ(4,5,1)$\rightarrow$ (x,y,z)=(2+4λ, -1+5λ, -3+λ).

  I aleshores el sistema que trobarem serà:

  $\left\{\begin{array}{c} 1+5\lambda=2+4\beta \\ -1+4\lambda=\text{-}1+5\beta \\ 3+5\lambda=\text{-}3+\beta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 5\lambda\text{-}4\beta = 1 \\ 4\lambda\text{-}5\beta = 0 \\ 5\lambda\text{-}\beta = -6 \end{array}\right.$, les matrius corresponents seran

  A=$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ i B=$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ i detB$\neq$0 per tant RangA=2$\neq$3=RangB i d'aquesta manera les rectes es creuen.

Exemple 5. Troba la posició relativa entre les rectes r: $\frac{\text{x-1}}{5} = \frac{\text{y+1}}{4} = \frac{\text{z}-3}{5}$ i s: $\frac{\text{x-6}}{4} = \frac{\text{y-3}}{5} = \frac{\text{z}-8}{1}$.

- (x,y,z)=(1,-1,3)+λ(5,4,5)$\rightarrow$ (x,y,z)=(1+5λ, -1+4λ, 3+5λ).

  (x,y,z)=(2,-1,-3)+λ(4,5,1)$\rightarrow$ (x,y,z)=(6+4λ, 3+5λ, 8+λ).

  I aleshores el sistema que trobarem serà:

  $\left\{\begin{array}{c} 1+5\lambda=6+4\beta \\ -1+4\lambda=3+5\beta \\ 3+5\lambda=8+\beta \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 5\lambda\text{-}4\beta = 5 \\ 4\lambda\text{-}5\beta = 4 \\ 5\lambda\text{-}\beta = 5 \end{array}\right.$, les matrius corresponents seran

  A=$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ i B=$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 4 & -5 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ i detB=0 per tant RangA=2=RangB i d'aquesta manera les rectes es tallen en un punt que trobarem pel mètode de Cramer:

  λ=$\frac{\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}}{-9}$= 1, β=$\frac{\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}{-9}$ = 0 i el punt que trobarem serà (6,3,8).