Matriu inversa

Donada una matriu quadrada A de dimensió n definim la seva inversa com aquella matriu A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =$ Id.

En principi no sempre existirà i en aquest apartat ens limitarem a trobar un mètode per tal de poder-la calcular.

Observem d'entrada que $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} =$ Id i aleshores per la propietat $\det(A \cdot A^{-1}) = 1 \rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \rightarrow$ Si ha d'existir inversa el $\det A \neq 0$.

Càlcul de la matriu inversa.

Exemple 1:

Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ anem a veure tots els passos que s'han de realitzar per calcular la seva inversa.

1. $\det(A) = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 11 \neq 0$.

2. Trasposem la matriu trasposta de A$\rightarrow$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3. Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta $\rightarrow$

$$\mathrm{adj}({}^tA) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -30 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Finalment $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}({}^tA)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 7 & -30 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}}{11} = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$.

5. Comprovem-ho : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{11} & \frac{-30}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-2}{11} & \frac{7}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2:

Sigui A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ anem a calcular la seva inversa.

1. det(A)=3·0-1·4+2·4=4≠0.

2. Trasposem la matriu trasposta de A→ ^{t}A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calculem l'anomenada matriu dels adjunts de la trasposta →

$$^{\text{adj}}({}^{t}A) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Finalment $A^{-1} = \frac{^{\text{adj}}({}^{t}A)}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

5. Comprovem-ho: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exemple 3:

Sigui A=$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ anem a calcular la seva inversa.

1. det(A)=3·0-1·8+2·4=0.

   Per tant aquesta matriu no té inversa.

En resum per tal de calcular la inversa d'una matriu quadrada A cal realitzar els següents passos:

1. Calculem el determinant de la matriu A, si aquest determinant és 0 aleshores la matriu inversa no existirà i per tant no podrem continuar.
2. Fem la trasposta d' A$\rightarrow$ ^{t}A.
3. Fem la matriu adjunta d'A$\rightarrow$ $^{\mathrm{adj}}(^{t}\mathrm{A})$.
4. Finalment $\mathrm{A}^{-1} = \frac{^{\mathrm{adj}}(^{t}\mathrm{A})}{\det \mathrm{A}}$.

Observació.

$$\begin{cases} 2x+y+z=9 \\ x+2y+3z=11 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

- **Com podem, ara, trobar les solucions?**
  - **Mètode de la matriu inversa.**
    En aquest cas calculem la matriu inversa de la matriu associada al sistema i la multipliquem pel vector de termes independents:
    $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$
    $$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

-
  - **Mètode de la matriu inversa.**
    En aquest cas calculem la matriu inversa de la matriu associada al sistema i la multipliquem pel vector de termes independents:
    $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
    $$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Exercici 1. Sigui $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ calcula A^{-1}.

- Matriu inversa d'A: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ detA=2$\neq$0$\rightarrow$

$$A^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} & -\begin{matrix} -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{matrix} & -\begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{matrix} & -\begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 24 \\ -6 & 16 & -2 \\ 8 & -7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{\mathrm{adj}})^{t} = \begin{pmatrix} 14 & -6 & 8 \\ -6 & 16 & -7 \\ 24 & -2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 8 & -7/2 \\ 12 & -1 & 17/2 \end{pmatrix}.$$

Exercici 2. Donada la matriu A= $\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p\text{-}1 \end{pmatrix}$

1. Troba el valor de p pel qual A té inversa.
2. Pel valor P=2 troba la matriu inversa.
3. Resol el sistema $\begin{cases} px=1 \\ x+py+z=3 \\ x+(p\text{-}1)z=4 \end{cases}$ per p=2 seguint el mètode de la matriu inversa.

- Per tal que A tingui inversa cal que el seu determinant sigui diferent de 0, per tant tindrem $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p\text{-}1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow p^2 \cdot (p\text{-}1)=0 \rightarrow \begin{cases} p=0 \\ p=1 \end{cases}$.

  Per tant existirà inversa sempre que p$\neq$0,1.

  Per p=2 la matriu que haurem de fer la inversa serà $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ detA=4$\rightarrow$

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(A^{adj})^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema per tant que tindrem serà $\begin{cases} 2x=1 \\ x+2y+z=3 \\ x+z=4 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$