

## Geometria mètrica

### Distància d' un punt a un altre punt

Donats dos punts  $A(a_1, b_1)$  i  $B(a_2, b_2)$  podem definir la distància entre aquests dos punts com el mòdul del vector  $AB$ .

$$d(A, B) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

### Distància d' un punt a una recta

Donats un punt  $A(a_1, b_1)$  i una recta de la forma  $Ax + By + C = 0$  definim la distància del punt a la recta com la més petita de les distàncies que hi ha del punt a la recta. Pel teorema de Pitàgores aquesta distància coincideix amb la longitud del segment perpendicular a la recta que té per un extrem el punt  $A(a_1, b_1)$ . A més a més, aquesta longitud coincideix amb la fórmula:

$$d = \frac{Aa_1 + Bb_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

### Angle format per dues rectes

Donades dues rectes  $Ax + By + C = 0$  i  $A'x + B'y + C' = 0$ . Definim l' angle que formen com l' angle format pels seus vectors directors.

$$\cos \alpha = \frac{(-B', A') \cdot (-B, A)}{|(-B', A')| \cdot |(-B, A)|}$$

**Exemple 1.** Troba l' angle format per les rectes  $3x+2y=5$  i  $4x-y=3$ .

En efecte, el vector de la recta  $3x+2y=5$  és  $(-2,3)$ , mentre que el de la recta  $4x-y=3$  és  $(1,4)$ . D' aquesta manera l' angle que formen en dos vectors és

$$\cos \alpha = \frac{(-2, 3) \cdot (1, 4)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{221}} = 0,67249 \rightarrow \alpha = 47,74$$

**Exemple 2.** Troba el valor de  $a$  per tal que l' angle format per les rectes  $ax+2y=5$  i  $4x-3y=3$  sigui de  $60^\circ$ .

En efecte, el vector de la recta  $ax+2y=5$  és  $(-2,a)$ , mentre que el de la recta  $4x-3y=3$  és  $(3,4)$ . D' aquesta manera l' angle que formen en dos vectors és

$$\cos 60^\circ = \frac{(-2, a) \cdot (3, 4)}{\sqrt{4 + a^2} \cdot \sqrt{25}} = \frac{-6 + 4a}{5\sqrt{4 + a^2}} = 0,5$$

$$\begin{aligned}
 -6 + 4a &= 2,5\sqrt{4 + a^2} \\
 36 - 48a + 16a^2 &= 6,25(4 + a^2) \\
 9,75a^2 + 48a + 11 &= 0 \\
 a &= \frac{-48 \pm \sqrt{1875}}{19,5}
 \end{aligned}$$

**Exemple 3.** Troba la distància del punt  $A(1,4)$  a la recta  $2x+y-5=0$ .

En efecte,

$$d = \left| \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

**Exemple 4.** Troba l'àrea i el perímetre del triangle  $A(2,4)$ ,  $B(1,5)$  i  $C(0,7)$ .

En efecte,

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = (-1, 1) \\ A(2, 4) \end{array} \right. \rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{1} \rightarrow x+y-6=0$$

Àrea d'un triangle és

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{d(A, B) \cdot d((0,7), x+y-6=0)}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

D'altra banda, el perímetre és

$$\begin{aligned}
 P &= d(A, B) + d(A, C) + d(B, C) \\
 &= \sqrt{2} + \sqrt{13} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$